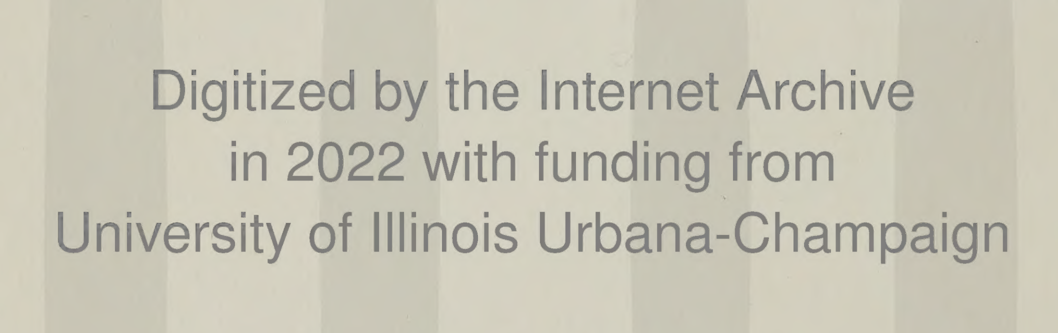
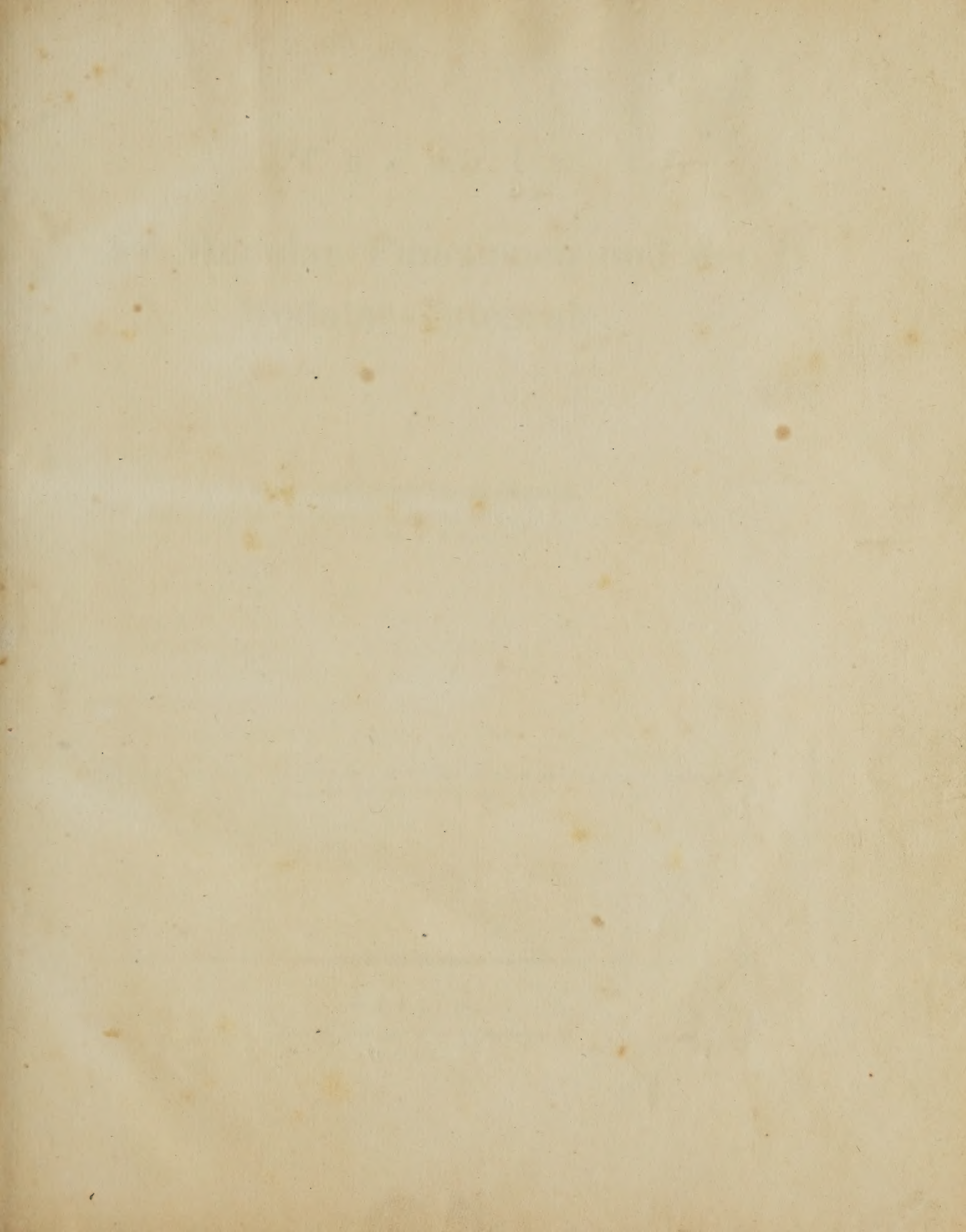
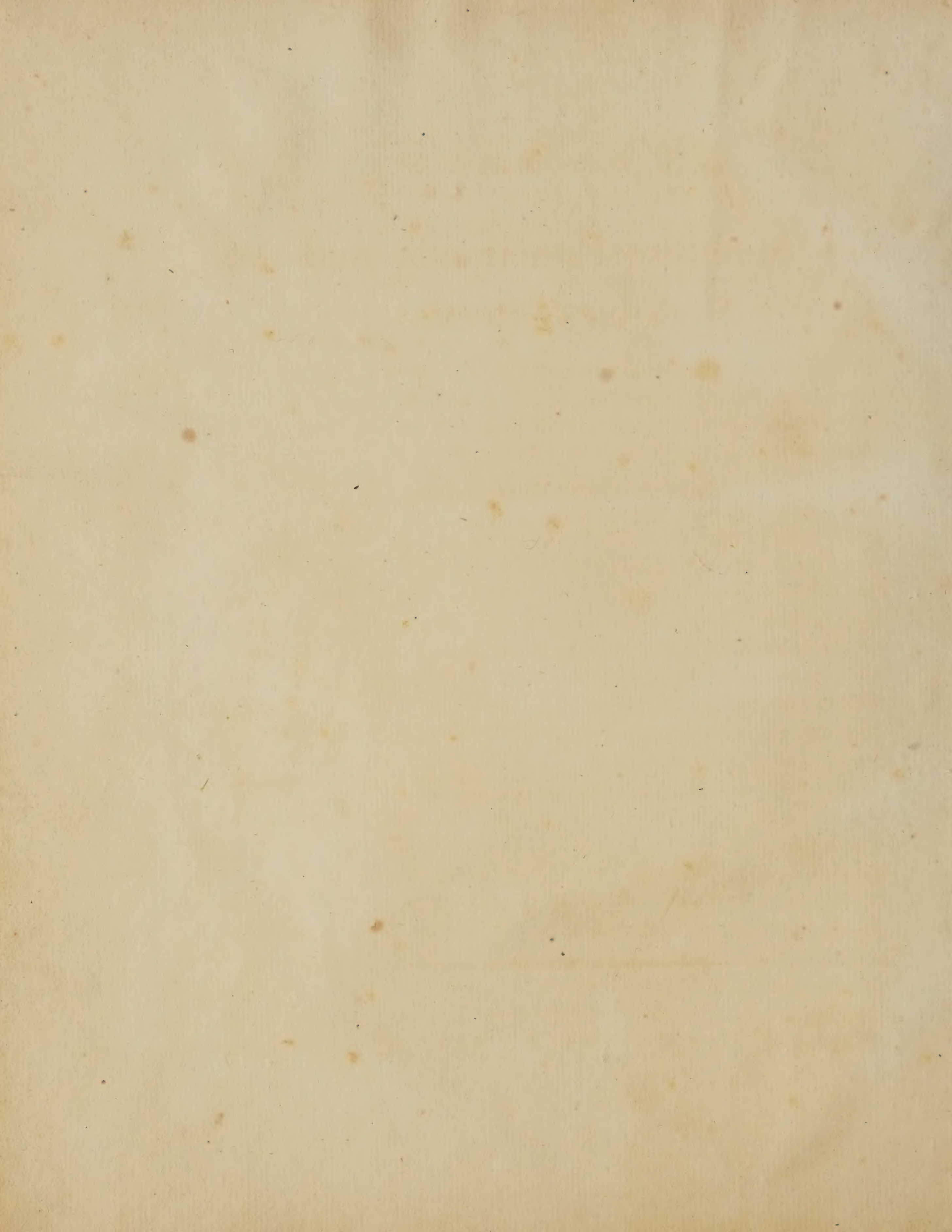












Theorie

der Modular-Functionen und der Modular-Integrale,

von

Dr. Christoph Gudermann,
ordentlichem Professor der Mathematik an der Königl. theologischen und philosophischen Akademie zu Münster.

(Besonders abgedruckt aus „Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik Band 18, 19, 20, 21, 23 und 25.")

Berlin.
Gedruckt und verlegt bei G. Reimer.
1844.

Vorrede.

Der durch die glänzenden Erfindungen der ausgezeichnetsten Mathematiker: **Euler**, **Landen**, **Legendre**, **Gaufs**, **Abel** und **Jacobi** geschaffene und im Nachfolgenden behandelte neue Zweig der Analysis umfafst zunächst eine Theorie doppelt-periodischer Functionen, welche nämlich reell-periodisch, wie die gemeinen cyklischen, und zugleich imaginär-periodisch sind, wie die gemeinen hyperbolischen Functionen. Aufserdem hangen jene Functionen nicht nur, eben wie diese, von einem veränderlich gedachten Argumente ab, sondern auch noch von einer zweiten, in der Regel als unveränderlich angesehenen Gröfse, welche ihr Modul heifst und welche gewöhnlich zwischen den Grenzen Null und Eins enthalten ist. Aus diesem Grunde nennen wir jene doppelt-periodischen Functionen auch Modular-Functionen. Das Problem der Rectification der ebenen Ellipse führt zu einem Differenziale, welches einige Aehnlichkeit hat mit denjenigen Differenzialen, die den Zusammenhang der Modular-Functionen mit ihrem Argumente ausdrücken; und wegen dieser Aehnlichkeit der Differenziale wurden ihre Integrale von **Legendre**, welcher zuerst eine ausführliche Theorie derselben zu entwerfen versuchte, elliptische Trancendenten oder auch elliptische Functionen genannt, obgleich dieser ausgezeichnete Analyst die grofse Verschiedenheit unter den Integralen keineswegs verkannte. Die Belassung dieser Benennung könnte zwar allerdings durch die ihrem Urheber zu bezeigende Achtung entschuldigt werden, indessen habe ich die Benennung, fern von Neuerungssucht, aufgeben zu müssen geglaubt, weil sie bei Anfän-

gern von vorn herein die irrige Meinung erwecken kann, als wäre diese ganze Theorie nur da, um die Ellipse rectificiren zu können: eine Meinung, in welcher sogar ältere Mathematiker befangen sein sollen, welche diesen neueren Studien ihre Aufmerksamkeit noch nicht gebührend geschenkt haben.

Ist der Modul der Modular-Functionen wirklich reell, und liegt zwischen den Grenzen Null und Eins, so sind diese Functionen selbst zwischen den beiden oben genannten Arten der Potenzial-Functionen enthalten: nähert sich der Modul der Grenze Null, so gewinnen die Modular-Functionen eine gröfsere Uebereinstimmung mit den gemeinen cyklischen Functionen; und nähert sich der Modul der andern Grenze Eins, so entsteht eine gröfsere Uebereinstimmung mit den gemeinen hyperbolisehen Functionen: völlige Uebereinstimmung mit jenen oder diesen tritt endlich dann ein, wenn der Modul entweder gleich Null, oder gleich Eins wird. Hiernach also sind die Modular-Functionen ein grofses Geschlecht periodischer Functionen, welches unendlich viele Arten begreift, und zu welchen auch die gemeinen cyklischen und hyperbolischen Functionen selbst, als einfachste, und zugleich als Grenzformen, gehören.

Daher steht dies Werk mit meinem früheren: „Theorie der Potenzial- oder der cyklisch-hyperbolischen Functionen, Berlin, bei G. Reimer, 1833," im engsten, ja in einem nothwendigen Zusammenhange und kann auch als ein zweiter Theil, (jenes als erster Theil,) der Darstellung einer Theorie der periodischen Functionen überhaupt und der davon abhängenden Integrale angesehen werden.

Die zahllosen Anwendungen der Potenzial-Functionen in allen Zweigen der reinen und angewandten Mathematik haben das sorgfältigste Studium der Mathematiker jenen Functionen zugewendet; wodurch denn ihre Theorie auch einen hohen Grad der Ausbildung erlangt hat. Die höhere Allgemeinheit des Begriffes der Modular-Functionen zieht aber die Aufmerksamkeit des wissenschaftlichen Geistes in einem noch gesteigerten Grade auf sich;

zudem sind ihre Anwendungen wohl eben so zahlreich, und der Einflufs ihrer Theorie auf die Integral-Rechnung ist vollends so mächtig und ausgedehnt, überhaupt so unabweisbar, dafs in dieser Hinsicht alle früheren Darstellungen der Integral-Rechnung als im hohen Grade mangelhaft und dürftig erscheinen und die unermüdliche und gewandte Thätigkeit eines neuen Euler zur Darstellung eines dem jetzigen Stande und Bedürfnisse der Wissenschaft mehr angemessenen Lehrbegriffs der Integral-Rechnung schon längst erforderlich ist und mit Sehnsucht erwartet wird.

Die Kenntnifs der vorzüglichsten Eigenschaften der Modular-Functionen und der davon zunächst abhängenden Integrale ist für jeden jungen Mathematiker, welcher in der Analysis den höheren Standpunct einnehmen will, jetzt eben so unumgänglich nöthig, als es früher die Kenntnifs der vorzüglicheren Eigenschaften der trigonometrischen Functionen war. In zahllosen Fällen beginnt die Untersuchung des neuern Mathematikers gerade da erst eigentlich, wo sie früher wegen der Unzulänglichkeit der Wissenschaft aufhören mufste, weil etwa das gefundene Integral von den Modular-Functionen abhing, oder ein Modular-Integral war. Die neuen Untersuchungen enthüllen aber auch bei der Anwendung dieser Theorie wunderbare, ungeachtet ihrer Einfachheit sehr versteckt liegende Gesetze, da, wo ohne diese Anwendung kaum die Möglichkeit der Erkenntnifs eines der Erwähnung werthen Gesetzes geahnet wird. Solche Behauptungen können nur factisch gerechtfertigt werden, und aus diesem Grunde habe ich diesem Werke noch einen Theil als Anhang hinzugefügt, welcher Anwendungen der Theorie der Modular-Functionen in der Geometrie, in der Geodäsie, in der Statik und Mechanik, und namentlich eine umfassende Behandlung der sphärischen Kettenlinien enthält, die allein schon geeignet ist, die obige Behauptung vollkommen zu rechtfertigen. Dieser Anhang wird, falls das Erscheinen dieser Theorie beifällig aufgenommen wird, und keine erhebliche Hindernisse eintreten, ihr im Drucke bald nachfolgen und hoffentlich durch die ermittelten neuen Re-

sultate das Interesse Derjenigen erregen, welche ihre Aufmerksamkeit solchen Studien zuwenden.

Die Möglichkeit der Herausgabe dieses Werks ist lediglich dem um die Förderung und Verbreitung des Studiums der Mathematik und um die vielseitige Ausbildung dieser Wissenschaft höchst verdienten Herrn etc. Dr. Crelle zu verdanken; indessen mufsten die eigenthümlichen, dabei obwaltenden Umstände nothwendig so grofse Verzögerungen mit sich bringen, dafs nun darüber allein schon mehr als vier Jahre verflossen sind. Während einer so langen Zeit berichtigen und erweitern sich schon die wissenschaftlichen Ansichten, und daher kommt es, dafs in diesem Werke Mängel vorhanden sind, welche der Verfasser schon längst als solche erkannt hat, die er aber erst in einer neuen Ausgabe zu verbessern im Stand sein würde, aber unfehlbar verbessern würde, obgleich so ziemlich dieselben Mängel in den ausgezeichnetsten Schriften der Vorgänger ebenfalls sich finden.

Der beträchtliche Umfang des Werks rührt von dem grofsen Reichthum nicht zu vernachlässigender Formeln her, welche, zumal in einem für Anfänger bestimmten Werke, mit der nöthigen Klarheit entwickelt werden mufsten; und insbesondere noch davon, dafs nicht nur die unendlichen Producte und Reihen hergeleitet oder aufgestellt worden sind, welche desto rascher convergiren, je kleiner der Modul ist, sondern in gleicher Vollständigkeit auch diejenigen, deren Convergenz desto gröfser ist, je mehr sich der Modul der Grenze Eins nähert; zumal da diese Producte und Reihen in der berühmten Schrift „Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum", mit einer einzigen Ausnahme, vielleicht der Kürze wegen, oder auch darum übergangen worden sind, weil sie zu ihrer einfachen Darstellung den Gebrauch der hyperbolischen Functionen erfordern.

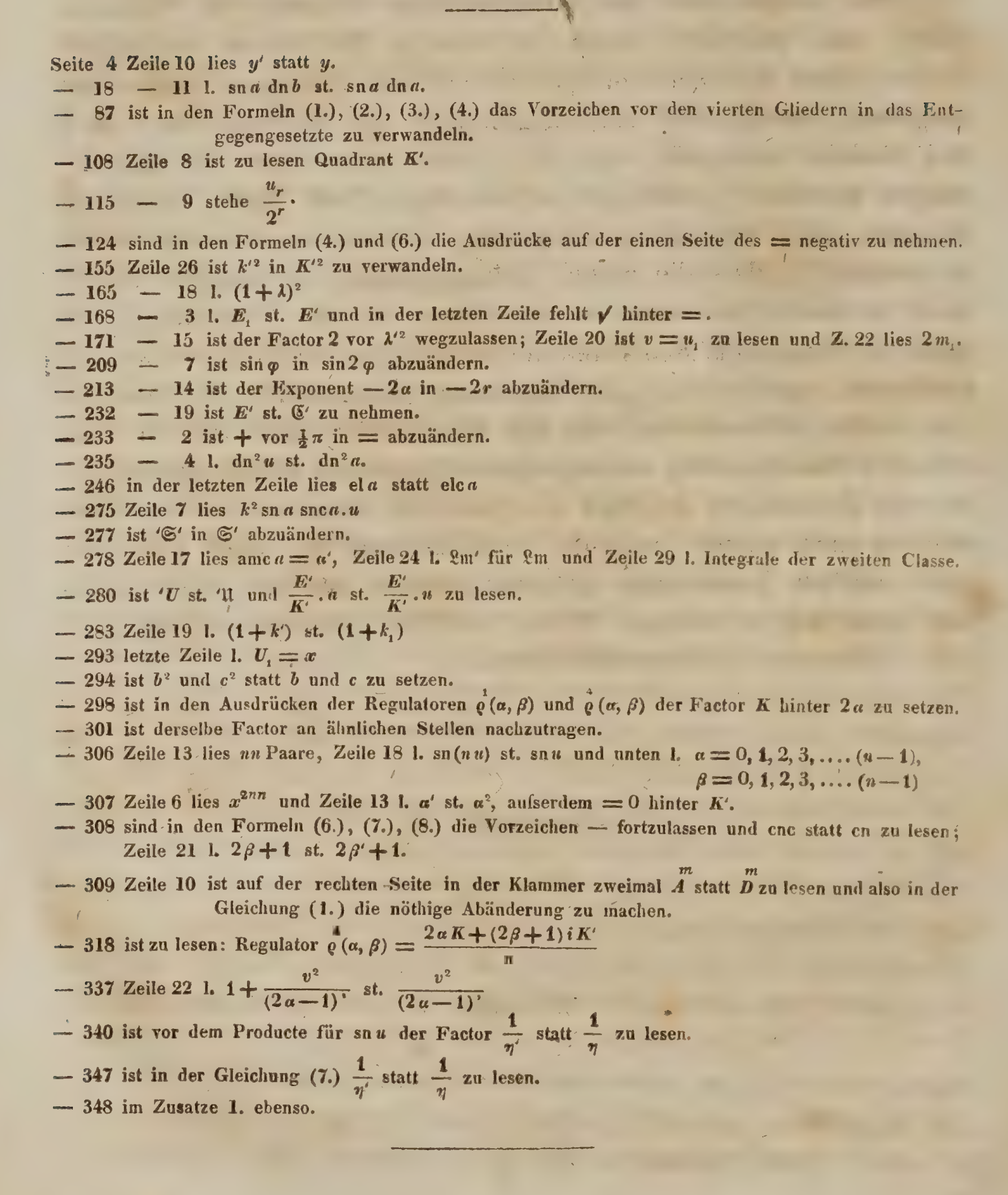
Hiernach dient unser Werk aber auch zugleich als ein Repertorium aller irgend bemerkenswerthen Formeln, welche in den Anwendungen der Theorie in Gebrauch kommen können, und es

ist ihm hierin nach meinem Dafürhalten ein nicht unbedeutender Vorzug gesichert worden.

Nur aufgefordert durch hochachtbare Freunde der Wissenschaft, und ermuntert durch die freudige Theilnahme derjenigen akademischen Zuhörer, vor welchen ich seit mehreren Jahren unausgesetzt ansführliche Vorlesungen über die Modular-Functionen und Modular-Integrale, wie auch nicht selten über die Anwendungen derselben, halten zu können das Glück hatte, entschloſs ich mich, die Theorie dieser Functionen auf eine so faſsliche Weise zu behandeln, daſs die ersten Anfangsgründe der Integral-Rechnung zu ihrem Verständnisse hinreichen, in der Erwartung, mir dadurch wenigstens den Dank derjenigen jüngern Mathematiker zu verdienen, welche ohne die Anhörung akademischer Vorlesungen sich durch Selbststudium die zur Gewinnung eines höhern analytischen Standpunctes unumgängliche Kenntniſs dieses neuen und überaus fruchtbaren Zweiges der Analysis erwerben wollen, über welchen nach meiner innigsten Ueberzeugung auf allen Universitäten jährlich Vorlesungen gehalten werden müſsten, aber selten, oder doch nur an wenigen Orten, bis jetzt gehalten werden.

Münster, im November 1843.

Verzeichnifs der sinnstörenden Druckfehler.



Seite 4 Zeile 10 lies y' statt y.
— 18 — 11 l. $\operatorname{sn} a \operatorname{dn} b$ st. $\operatorname{sn} a \operatorname{dn} a$.
— 87 ist in den Formeln (1.), (2.), (3.), (4.) das Vorzeichen vor den vierten Gliedern in das Entgegengesetzte zu verwandeln.
— 108 Zeile 8 ist zu lesen Quadrant K'.
— 115 — 9 stehe $\frac{u_r}{2^r}$.
— 124 sind in den Formeln (4.) und (6.) die Ausdrücke auf der einen Seite des $=$ negativ zu nehmen.
— 155 Zeile 26 ist k'^2 in K'^2 zu verwandeln.
— 165 — 18 l. $(1+\lambda)^2$
— 168 — 3 l. E_1 st. E' und in der letzten Zeile fehlt $\sqrt{}$ hinter $=$.
— 171 — 15 ist der Factor 2 vor λ'^2 wegzulassen; Zeile 20 ist $v = u_1$ zu lesen und Z. 22 lies $2m_1$.
— 209 — 7 ist $\sin\varphi$ in $\sin 2\varphi$ abzuändern.
— 213 — 14 ist der Exponent -2α in $-2r$ abzuändern.
— 232 — 19 ist E' st. $\mathfrak{E}'$ zu nehmen.
— 233 — 2 ist $+$ vor $\frac{1}{2}\pi$ in $=$ abzuändern.
— 235 — 4 l. $\operatorname{dn}^2 u$ st. $\operatorname{dn}^2 a$.
— 246 in der letzten Zeile lies $\operatorname{el} a$ statt $\operatorname{elc} a$
— 275 Zeile 7 lies $k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{snc} a.u$
— 277 ist '$\mathfrak{S}'$ in $\mathfrak{S}'$ abzuändern.
— 278 Zeile 17 lies $\operatorname{amc} a = \alpha'$, Zeile 24 l. $\mathfrak{Lm}'$ für $\mathfrak{Lm}$ und Zeile 29 l. Integrale der zweiten Classe.
— 280 ist 'U st. '$\mathfrak{U}$ und $\frac{E'}{K'}.a$ st. $\frac{E'}{K'}.u$ zu lesen.
— 283 Zeile 19 l. $(1+k')$ st. $(1+k_1)$
— 293 letzte Zeile l. $U_1 = x$
— 294 ist b^2 und c^2 statt b und c zu setzen.
— 298 ist in den Ausdrücken der Regulatoren $\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)$ und $\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)$ der Factor K hinter 2α zu setzen.
— 301 ist derselbe Factor an ähnlichen Stellen nachzutragen.
— 306 Zeile 13 lies nn Paare, Zeile 18 l. $\operatorname{sn}(nu)$ st. $\operatorname{sn} u$ und unten l. $\alpha = 0, 1, 2, 3, \ldots (n-1)$, $\beta = 0, 1, 2, 3, \ldots (n-1)$
— 307 Zeile 6 lies x^{2nn} und Zeile 13 l. α' st. α^2, aufserdem $=0$ hinter K'.
— 308 sind in den Formeln (6.), (7.), (8.) die Vorzeichen — fortzulassen und cnc statt cn zu lesen; Zeile 21 l. $2\beta+1$ st. $2\beta'+1$.
— 309 Zeile 10 ist auf der rechten Seite in der Klammer zweimal $\overset{m}{A}$ statt $\overset{m}{D}$ zu lesen und also in der Gleichung (1.) die nöthige Abänderung zu machen.
— 318 ist zu lesen: Regulator $\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta) = \frac{2\alpha K + (2\beta+1) i K'}{n}$
— 337 Zeile 22 l. $1 + \frac{v^2}{(2\alpha-1)}$ st. $\frac{v^2}{(2\alpha-1)}$
— 340 ist vor dem Producte für $\operatorname{sn} u$ der Factor $\frac{1}{\eta'}$ statt $\frac{1}{\eta}$ zu lesen.
— 347 ist in der Gleichung (7.) $\frac{1}{\eta'}$ statt $\frac{1}{\eta}$ zu lesen.
— 348 im Zusatze 1. ebenso.

Inhaltsverzeichnifs.

Einleitung. . . . . Seite 1.

§. 1. Characteristische Gleichung der Potenzial-Functionen.
§. 2. Herleitung dieser Functionen aus ihrer characteristischen Gleichung.

Erster Abschnitt. . . . . S. 4.

§. 3. Characteristische Gleichung der Modular-Functionen.
§. 4. Integral für den Zusammenhang zwischen der Modular-Function und ihrem Argumente.
§. 5. Allgemeine Formeln für den Zusammenhang unter Modular-Functionen, deren Argumente eine unveränderliche Summe ausmachen.
§. 6. Cyklische Modular-Functionen überhaupt.
§. 7. Zusammenhang unter den vier cyklischen Modular-Functionen. Grenzen derselben bei veränderlichem Modul.
§. 8. Erste Differenziale der cyklischen Modular-Functionen.
§. 9. Die Amplitude der cyklischen Modular-Functionen.
§. 10. Die beiden conjugirten Modular-Quadranten.
§. 11. Ausdrücke für die cyklischen Modular-Functionen eines Binoms.
§. 12. Ausdrücke für die cyklische Amplitude eines Binoms.
§. 13. Die cyklischen Modular-Functionen und die Amplitude des Complements. Zweite Art von Formeln für die Functionen eines Binoms.
§. 14. Zurückführung der cyklischen Modular-Functionen, deren Argument $> \frac{1}{2}K$ und $< K$ auf solche, deren Argument $< \frac{1}{2}K$ ist. Werthe der Functionen von $\frac{1}{2}K$.
§. 15. Die Amplituden und Modular-Functionen eines reellen Arguments überhaupt, zurückgeführt auf solche, deren Argument nicht $> \frac{1}{2}K$ ist.
§. 16. Die hyperbolischen Modular-Functionen überhaupt.
§. 17. Erste Differenziale der hyperbolischen Modular-Functionen.
§. 18. Die Amplitude der hyperbolischen Modular-Functionen.
§. 19. Ausdrücke für die hyperbolischen Modular-Functionen eines Binoms.
§. 20. Imaginäre Relationen zwischen den cyklischen und hyperbolischen Modular-Functionen.
§. 21. Hyperbolische Modular-Functionen eines Arguments von der Form $u + niK$ und $a + bi$.

Zweiter Abschnitt. . . . . S. 34.

§. 22. Einige Relationen unter den cyklischen und hyperbolischen Modular-Functionen in reellen Formen.

§. 23. Ausdrücke für die Längezahl der Amplitude eines Binoms.
§. 24. Die Werthe von $\mathfrak{Am}(u \pm 2mK')$ und $\mathrm{am}(u \pm 2miK')$.
§. 25. Die cyklischen Modular-Functionen und Amplituden der Argumente von der Form $u + 2mK + 2niK'$.
§. 26. Die hyperbolischen Modular-Functionen und Amplituden der Argumente von der Form $u + mK'$.
§§. 27. und 28. Cyklische Functionen imaginärer Argumente zurückgeführt auf cyklische Functionen mit reellem Argumente.
§. 29. Allgemeine Formeln für Grenz-Werthe der cyklischen Modular-Functionen.
§. 30. Cyklische Modular-Functionen mit dem Modul $\frac{1}{k}$ zurückgeführt auf ähnliche mit dem Modul k.
§. 31. Cyklische Modular-Functionen mit dem Modul $\frac{ik}{k'}$ zurückgeführt auf cyklische Functionen mit dem Modul k.

Dritter Abschnitt . . . . S. 55.

§. 32. Die Modular-Functionen von $\frac{1}{2}iK'$ und $\frac{1}{2}(K \pm iK')$.
§. 32. *a*. Von der Verdoppelung und Halbirung des Arguments der cyklischen Modular-Functionen.
§§. 33 bis 39. Fernere Relationen unter den cyklischen Functionen der Binome $a + b$ und $a - b$ und denen der Theile a und b.
§§. 40 bis 43. Einige Relationen unter cyklischen Modular-Functionen mit drei und auch vier beliebigen Argumenten.
§§. 44. und 45. Verschiedene Formen der Gröſse U und $\log U$.
§. 46. Die characteristischen Gleichungen der Modular-Functionen.

Vierter Abschnitt . . . . S. 88.

§. 47. Integral-Formel zum Ausdrucke des Zusammenhanges zwischen t und u, wenn $t = \mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\,\mathrm{am}\,u$.
§. 48. Ueber den Zusammenhang zwischen den Functionen von u und der Function $\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\,\mathrm{am}\,2u$.
§§. 49. und 50. Zurückführung der cyklischen Modular-Functionen mit imaginärem Modul von der Form $\cos\alpha \pm i\sin\alpha$ auf solche Functionen mit reellem Modul.
§§. 51. und 52. Zurückführung der cyklischen Modular-Functionen auf andere mit kleinerem Argument und kleinerem Modul.
§. 53. Zurückführung der cyklischen Modular-Functionen auf andere mit gröſserm Argument und gröſserm Modul.
§. 54. Zusammenhang unter den Modular-Quadranten. Wichtige Eigenschaft der Modular-Gleichungen.
§. 55. Einfache Berechnungs-Art des Modular-Quadranten K aus dem gegebenen Modul k.
§. 56. Berechnung des Quadranten K', wenn sein Modul k' wenig von Eins verschieden ist.
§. 57. Berechnung des Quadranten K' aus denselben Modular-Zahlen, welche zur Berechnung des Quadranten K dienten.
§. 58. Darstellung der Functionen $\sin(\eta u)$, $\cos(\eta u)$ und $\mathrm{tang}(\eta u)$, wenn $\mathrm{am}\,u$ gegeben ist, und der Functionen $\mathfrak{Sin}(\eta u)$, $\mathfrak{Cos}(\eta u)$ und $\mathfrak{Tang}(\eta u)$, wenn $\mathrm{am}\,u'$ gegeben ist, als Producte unendlich vieler Factoren in Anwendung derselben Modular-Zahlen, welche zur Berechnung von K und η dienen.

§. 59. Die Gröfse ηu dargestellt in rasch convergirenden Reihen, wenn $\mathrm{am}\, u$ oder $\mathrm{am}' u$ gegeben ist, in Anwendung derselben Modular-Zahlen, welche zur Berechnung von η und K dienen.

Fünfter Abschnitt. . . . . S. 120.

§§. 60. und 61. Von der Integration der Modular-Functionen.
§. 62. Zweite Differenziale der Modular-Functionen und ihrer natürlichen Logarithmen.

Sechster Abschnitt. . . . . S. 127.

Von den Modular-Integralen der ersten Art.

§. 63. Von den Modular-Integralen der ersten Art und den elliptischen Quadranten überhaupt.
§. 64. Zurückführung aller cyklischen Modular-Integrale der ersten Art auf das einzige $\mathrm{el}\, u$.
§. 65. Allgemeine Relation unter den Functionen $\mathrm{el}(a \pm u)$, $\mathrm{el}\, a$ und $\mathrm{el}\, u$. Entwicklung der elliptischen Function eines Trinoms.
§. 66. Die elliptischen Functionen reeller Argumente zurückgeführt auf solche, deren Argument nicht $> K$.
§. 67. Entwicklung von $\mathrm{el}(K \pm ui)$ und $\mathrm{el}(u \pm iK')$.
§. 68. Zurückführung des Modular-Integrals $\mathrm{el}\, u$ mit einem der Modul $\frac{1}{k}$ und $\frac{ik}{k'}$ auf ein solches mit dem Modul k.
§. 69. Entwicklung von $\mathrm{el}(\frac{1}{2}K \pm \frac{1}{2}(iK'))$ und $\mathrm{el}(u \pm \frac{1}{2}(iK'))$.
§. 70. Von den Werthen der Function $\mathfrak{El}\, u = \frac{\mathrm{el}(ui)}{i}$,
§. 71. Reduction der Integrale von der Form $\int x^n \partial u$, in welchen x eine Modular-Function des Arguments u ist, auf Modular-Integrale und Amplituden.

Siebenter Abschnitt. . . . . S. 145.

§. 72. Von den Modular-Logarithmen $\mathrm{lm}\, u$ und $\mathfrak{Lm}\, u$.
§. 73. Relation unter den Modular-Logarithmen $\mathrm{lm}(a \pm u)$, $\mathrm{lm}\, a$ und $\mathrm{lm}\, u$. Entwicklung des Modular-Logarithmen eines Trinoms.
§. 74. Entwicklung von $\mathrm{lm}(u \pm 2mK)$ und reelles periodisches Verhalten des Ausdrucks $\mathrm{lm}\, u - \frac{E}{K} \cdot \frac{1}{2}u^2$.
§. 75. Entwicklung von $\mathrm{lm}(K \pm ui)$ und $\mathrm{lm}(K \pm iK')$.
§. 76. Zusammenhang zwischen den beiden Modular-Quadranten K und K' und den beiden elliptischen Quadranten E und E'.
§. 77. Entwicklung von $\mathrm{lm}\,(u + iK')$.
§. 78. Entwicklung von $\mathrm{lm}(u + \frac{1}{2}(iK'))$, $\mathrm{lm}\frac{1}{2}(iK')$ und $\mathrm{lm}\frac{1}{2}(K + iK')$.
§. 79. Entwicklung von $\mathrm{lm}(u + 2niK')$ und periodisches Verhalten des Ausdrucks $\mathrm{lm}\, u - \left(1 - \frac{E'}{K'}\right) \cdot \frac{1}{2}u^2$.
§. 80. Entwicklung von $\mathrm{lm}(u + 2mK + 2niK')$ und unzählige daraus abgeleitete periodische Ausdrücke.
§. 81. Zurückführung der Modular-Logarithmen mit den Moduln $\frac{1}{k}$ und $\frac{ik}{k'}$ auf eben solche Functionen mit dem Modul k.

Achter Abschnitt. . . . . S. 160.

§. 82. Zusammenhang unter elliptischen Functionen der Argumente u, $\frac{1}{2}u$ und v mit den Moduln k und λ des §. 51.
§. 83. Relation zwischen $\mathrm{el}'u$ und $\mathrm{el}'v$, wenn u, v und die Moduln k' und λ' dieselben sind, wie in §. 51.
§. 84. Einfaches Verfahren der Berechnung der elliptischen Quadranten E und E' aus denselben Modular-Zahlen, welche zur Berechnung des Quadranten K dienen.
§. 85. Zweiter Beweis der Formel $\frac{E}{K}+\frac{E'}{K'}-1=\frac{\pi}{2KK'}$.
§. 86. Erste Art der Berechnung von $\mathrm{el}\,u$ und $\mathrm{el}'u$ aus $\mathrm{am}\,u$ und $\mathrm{am}'u$ in Anwendung derselben Modular-Zahlen, welche zur Berechnung von η und K dienen.
§. 87. Erste Art der Berechnung von $\mathrm{lm}\,u$ und $\mathrm{lm}'u$ aus $\mathrm{am}\,u$ und $\mathrm{am}'u$.
§. 88. Zweite Art der Berechnung von $\mathrm{el}\,u$ und $\mathrm{el}'u$ aus $\mathrm{am}\,u$ und $\mathrm{am}'u$.
§. 89. Zweite Art der Berechnung von $\mathrm{lm}\,u$ und $\mathrm{lm}'u$ aus $\mathrm{am}\,u$ und $\mathrm{am}'u$.

Neunter Abschnitt. . . . . S. 173.

§. 90. Differenzial-Gleichungen der ersten Ordnung für die Gröfsen $\arg\mathrm{am}(\varphi)=u$, $\mathrm{el}\,u$, K und E bei einer Aenderung des Moduls k.
§. 91. Differenzial-Gleichungen der zweiten Ordnung für die Abhängigkeit der Gröfsen $u=\arg\mathrm{am}(\varphi)$ und $\mathrm{el}\,\mathrm{am}(\varphi)$ vom Modul k.
§. 92. Differenzial-Gleichungen der zweiten Ordnung für die Abhängigkeit der Gröfsen $u=\arg\mathrm{am}'(\psi)$ und $\mathrm{el}\,\mathrm{am}'(\psi)$ vom Modul k.
§. 93. Dritter Beweis der Formel $KE'+K'E-KK'=\frac{1}{2}\pi$.
§. 94. Differenzial-Gleichung der ersten Ordnung für das Verhältnifs $\frac{E}{K}$, und Ausdruck desselben durch eine nach Potenzen von k fortschreitende Reihe.
§. 95. Differenzial-Gleichung für das Verhältnifs $v=\frac{aE+b(K'-E')}{aK+bK'}$.
§. 96. Ausdruck der Abhängigkeit einer Function der Gröfse $v=\frac{a'K+b'K'}{aK+bK'}$ vom Modul k durch eine Differenzial-Gleichung der ersten Ordnung.
§. 97. Ausdruck des Zusammenhanges unter den beiden Moduln k und λ, wenn die dazu gehörigen Quadranten K und L und die conjugirten K' und L' durch eine Gleichung von der Form $\frac{a'K+b'K'}{aK+bK'}=\frac{\alpha'L+\beta'L'}{\alpha L+\beta L'}$ mit einander verbunden sind.
§. 98. Vollständige Integration dreier Differenzial-Gleichungen der zweiten Ordnung.

Zehnter Abschnitt. . . . . S. 189.

§. 99. Ausdruck von u und $\mathrm{el}\,u$ durch $\mathrm{am}\,u$ in Reihen, welche nach Potenzen des Moduls k fortschreiten.
§. 100. Erster Ausdruck und Eigenschaften der Hülfs-Function $\lambda^r(\varphi)$, mit Bezugnahme auf die vorigen Reihen.
§. 101. Anderer Ausdruck der Hülfs-Function $\lambda^r(\varphi)$, und Folgerungen daraus.
§. 102. Ausdrücke der Quadranten K und E durch den Modul k und die Gröfse $\theta=\arc\sin(k)$.
§. 103. Reihe für den Quadranten K', welche desto rascher convergirt, je gröfser der Modul k' dieses Quadranten ist.
§. 104. Reihe für den Quadranten E', welche desto rascher convergirt, je gröfser sein Modul k' ist.

§. 105. Andere Reihen für u und el u, welche nach Potenzen von k und $\frac{k}{k'}$ fortschreiten.
§. 106. Reihen zur Berechnung von u und el u aus am u, welche nach Potenzen von sn u fortschreiten.
§. 107. Reihen für u und el u, welche nach den Sinus der vervielfachten Amplitude $\varphi =$ am u fortschreiten.
§. 108. Entwicklung der Hülfsfunction $\lambda^n(\varphi)$ in eine nach Potenzen von φ fortschreitende Reihe.
§. 109. Reihen für arg am(φ) und arg am$(\frac{1}{2}\pi - \varphi)$, welche nach Potenzen von φ fortschreiten.
§. 110. Reihen für el u, welche nach Potenzen φ und $\frac{1}{2}\pi - \varphi$ fortschreiten, wenn $\varphi =$ am u gesetzt wird.
§. 111. Reihe für u, welche völlig nach Potenzen von sn u fortschreitet.
§. 112. Andere Darstellung und Berechnung der Coëfficienten in der nach Potenzen von sn u fortschreitenden Reihe für u.
§. 113. Reihe für sn u, welche nach Potenzen von u fortschreitet.
§. 114. Reihen für cn u, dn u und am u, welche nach Potenzen des Arguments u fortschreiten.
§. 115. Die sieben ersten Glieder der Reihen für el u und lm u, welche nach Potenzen von u fortschreiten.

Elfter Abschnitt. . . . . S. 227.

§. 116. Von den Modular-Integralen der zweiten Art.
§. 117. Eintheilung der Modular-Integrale der zweiten Art in vier Classen.
§. 118. Fundamental-Formeln für die Integrale der ersten Classe.
§. 119. Fundamental-Formeln für die Integrale der dritten Classe.
§. 120. Die einfachsten reellen Relationen unter den Integralen der ersten und dritten Classe.
§. 121. Fundamental-Formeln für die Modular-Integrale der zweiten und vierten Classe.
§. 122. Kennzeichen bei Bestimmung der Classe, zu welcher ein Modular-Integral der zweiten Art gehört.
§. 123. Die Modular-Integrale der ersten und zweiten Classe mit dem Modul $\frac{1}{k}$ zurückgeführt auf solche Integrale mit dem Modul k.
§. 124. Die Modular-Integrale der ersten und zweiten Classe mit dem Modul $\frac{ik}{k'}$ zurückgeführt auf solche Integrale mit dem Modul k.
§. 125. Die Modular-Integrale der dritten und vierten Classe mit dem Modul $\frac{1}{k}$ und $\frac{ik}{k'}$ zurückgeführt auf Integrale mit dem Modul k.
§. 126. Die auf das Argument $K - u$ bezogenen Integrale aller vier Classen zurückgeführt auf Integrale des Arguments u.
§. 127. Die auf das Argument $u + iK'$ bezogenen Integrale der zweiten Art.
§. 128. Die auf den Parameter $K - a$ bezogenen Integrale der zweiten Classe zurückgeführt auf andere mit dem Parameter a.
§. 129. Die auf den Parameter $K' - a$ bezogenen Integrale der ersten Classe zurückgeführt auf andere mit dem Parameter a.
§. 130. Die auf den Parameter $K' - a$ bezogenen Integrale der dritten Classe zurückgeführt auf solche Integrale mit dem Parameter a.
§. 131. Die auf den Parameter $K - a$ bezogenen Integrale der vierten Classe zurückgeführt auf andere mit dem Parameter a.

§. 132. Die auf den Parameter $a+iK'$ bezogenen Integrale der zweiten und vierten Classe und die auf den Parameter $a+iK$ bezogenen Integrale der ersten und dritten Classe zurückgeführt auf Integrale mit reellem Parameter.
§ 133. Relationen zwischen den Integralen der ersten und dritten Classe in reellen Formen.
§. 134. Relationen zwischen den Integralen der zweiten und vierten Classe in reeller Form.
§. 135. Ausdruck von $\mathfrak{S}(u+v, a)$ durch $\mathfrak{S}(u, a)$ und $\mathfrak{S}(v, a)$. Aehnliche Ausdrücke für die andern Integrale der zweiten Classe.
§. 136. Entwicklung der auf ein zweigliedriges Argument $u+v$ bezogenen Integrale der ersten, dritten und vierten Classe.
§. 137. Entwicklung der Integrale aller Classen, wenn ihr Parameter ein Binom ist.
§. 138. Entwicklung der Integrale der zweiten Classe, wenn sowohl ihr Argument als auch ihr Parameter ein Binom ist.

Zwölfter Abschnitt. . . . . . . S. 270.

§. 139. Erste Art der Berechnung von $\frac{1}{2}[\mathrm{lm}(a+u)-\mathrm{lm}(a-u)]$, wenn am$u$ und am$a$ nebst dem Modul k gegeben sind.
§. 140. Erste Art der Berechnung der Integrale $\mathfrak{S}(u, a)$, $\mathfrak{C}(u, a)$ und $\mathfrak{D}(u, a)$ unter Beschränkung auf den Gebrauch der gewöhnlichen Tafeln.
§. 141. Erste Art der Berechnung der Integrale $S(u, a)$, $C(u, a)$ und $D(u, a)$ unter Beschränkung auf den Gebrauch der gewöhnlichen Tafeln.
§. 142. Erste Art der Berechnung der Integrale $'\mathfrak{S}(u, a)$, $'\mathfrak{C}(u, a)$ und $'\mathfrak{D}(u, a)$ unter Beschränkung auf den Gebrauch der gewöhnlichen Tafeln.
§. 143. Erste Art der Berechnung der Integrale $'S(u, a)$, $'C(u, a)$ und $'D(u, a)$ unter Beschränkung auf den Gebrauch der gewöhnlichen Tafeln.
§. 144. Zweite Art der Berechnung von $\frac{1}{2}[\mathrm{lm}(a+u)-\mathrm{lm}(a-u)]$.
§. 145. Zweite Art der Berechnung der Integrale $\mathfrak{S}(u, a)$, $\mathfrak{C}(u, a)$ und $\mathfrak{D}(u, a)$ unter Beschränkung auf den Gebrauch der gewöhnlichen Tafeln.
§. 146. Zweite Art der Berechnung der Integrale $S(u, a)$, $C(u, a)$ und $D(u, a)$ unter Beschränkung auf den Gebrauch der gewöhnlichen Tafeln.
§. 147. Zweite Art der Berechnung der Integrale $'\mathfrak{S}(u, a)$, $'\mathfrak{C}(u, a)$ und $'\mathfrak{D}(u, a)$ unter Beschränkung auf den Gebrauch der gewöhnlichen Tafeln.
§. 148. Zweite Art der Berechnung der Integrale $'S(u, a)$, $'C(u, a)$ und $'D(u, a)$ unter Beschränkung auf den Gebrauch der gewöhnlichen Tafeln.

Dreizehnter Abschnitt. . . . . . . S. 292.

Von der Vervielfachung des Arguments der Modular-Functionen.

§. 149. Formen der Ausdrücke für sn(nu), cn(nu), dn(nu).
§. 150. Ausdrücke für sn(nu) durch sn$u$ in der Form eines Products.
§. 151. Beweis der Gleichung $\overset{1}{D}=0$ für jede ganze Zahl n.
§. 152. Relationen unter den Coëfficienten im Zähler und Nenner des entwickelten Ausdrucks von sn(nu).
§. 153. Mehrgliedriger Ausdruck für sn$^2(nu)$ für ein gerades n, desgleichen für cn$^2(nu)$ und dn$^2(nu)$.
§. 154. Vielgliedriger Ausdruck von sn(nu) für ein ungerades n; ferner für sn$^2(nu)$, cn$^2(nu)$ und dn$^2(nu)$.
§. 155. Ausdruck von cn(nu) durch sn$u$ und cn$u$ in der Form eines Products.
§. 156. Ausdruck von dn(nu) durch sn$u$ und dn$u$ in der Form eines Products.

§. 157. Uebersicht der Specialisirung der vier Regulatoren und der Ausdrücke für sn(nu), cn(nu), dn(nu).
§. 158. Relationen unter den Coëfficienten in dem entwickelten Zähler und Nenner der Ausdrücke von cn(nu) und dn(nu).
§. 159. Vielgliedrige Ausdrücke für cn(nu), und dn(nu), am(nu), $\mathfrak{L}$am(nu), worin n eine ungerade Zahl ist.
§. 160. Zweite Darstellung von sn(nu), cn(nu) und dn(nu) für ein ungerades n in der Form eines Products.
§. 161. Ausdrücke von el(nu) für ein gerades und ein ungerades n.
§. 162. Ausdrücke für lm(nu), wenn n eine gerade oder ungerade ganze Zahl ist.
§. 163. Ausdrücke für die Modular-Integrale mit dem Argumente nu und dem Parameter na durch andere mit dem Argumente u und dem Parameter a.
§. 164. Differenzial-Gleichungen zur Bestimmung des Zählers und Nenners des Ausdrucks von sn(nu) für ein ungerades n.

Vierzehnter Abschnitt. . . . . S. 334.

§. 165. Die Modular-Functionen dargestellt als Producte unendlich vieler Factoren.
§. 166. Ausdruck der cyklischen Modular-Functionen des Arguments u durch hyperbolische Potenzial-Functionen des Arcus $\eta' u$, in der Form unendlich vieler Factoren. Aehnliche Ausdrücke durch gewöhnliche cyklische Functionen des Arcus ηu
§. 167. Aenderungen von η' und der hyperbolischen Functionen von $n\eta' K$, wenn der Modul k mit $\frac{1}{k}$ vertauscht wird; und Aenderungen von η und der hyperbolischen Functionen von $n\eta K'$, wenn der Modul k mit $\frac{ik}{k'}$ vertauscht wird.
§. 168. Aenderungen von p und q, wenn statt des Moduls k der kleinere $\lambda = \frac{1-k'}{1+k'}$ gesetzt wird.
§. 169. Ausdruck der cyklischen Modular-Functionen durch reelle Exponentialgröfsen.
§. 170. Zurückführung der Modular-Functionen auf vier hpperbolische Hülfs-Functionen, und Ausdruck dieser durch trinomische Factoren.
§. 171. Zurückführung der Modular-Functionen auf vier cyklische Hülfs-Functionen, und Ausdruck dieser durch trinomische Factoren.
§. 172. Bestimmung der beiden Constanten g und g' und einiger particulärer Werthe der acht Hülfs-Functionen
§. 173. Die cyklischen Hülfs-Functionen der Argumente von der Form $u + mK + niK'$.
§. 174. Reihen für die natürlichen Logarithmen der hyperbolischen und cyklischen Hülfs-Functionen des Arguments u.
§. 175. Reihen für die Logarithmen der Modular-Functionen, welche nach den Cosinus der Vielfachen von ηu und $\eta' u$ fortschreiten.
§. 176. Reihen für die ersten Differenzial-Verhältnisse der natürlichen Logarithmen der Modular-Functionen des Arguments u.
§. 177. Reihen für $\sqrt{\frac{1 \pm t}{1 \mp t}}$, wenn t eine von den Functionen snc$u$, cn$u$ und dn$u$ ist.
§. 178. Entwicklung der Modular-Functionen des Arguments u und $K-u$ in Reihen, welche nach Potenzial-Functionen der Vielfachen von ηu und $\eta' u$ fortschreiten.
§. 179. Uebersichtliche Zusammenstellung der einfachsten Reihen für die cyklischen Modularfunctionen.

§. 180. Reihen für $\sqrt{\frac{1 \pm t}{1 \mp t}}$, wenn t eine von den Modular-Functionen sn$u$, k sn$u$, k snc$u$, cnc$u$ und dnc$u$ ist.
§§. 181. und 182. Reihen für die Quadrate der Modular-Functionen.
§. 183. Reihen für das Modular-Integral el$u$ der ersten Art, welche nach Functionen der Vielfachen von ηu und $\eta' u$ fortschreiten. Ausdruck der Modular-Logarithmen durch die Hülfs-Functionen.
§. 184. Die Differenziale der acht Hülfs-Functionen.
§. 185. Einfacher Zusammenhang der cyklischen Hülfs-Functionen mit den auf den conjugirten Modul bezogenen hyperbolischen.
§§. 186. und 187. Andere Darstellung der Factoren der unendlichen Producte, wodurch die cyklischen und hyperbolischen Hülfs-Functionen ausgedrückt werden.
§§. 188. und 189. Entwicklung der acht Hülfs-Functionen in Reihen, welche nach Potenzial-Functionen des vervielfachten Arguments fortschreiten.
§. 190. Entwicklung particulärer Formeln, welche sich auf die Hülfs-Functionen beziehen.
§§. 191. und 192. Allgemeine Relationen zwischen den Hülfs-Functionen mehrtheiliger Argumente und den Functionen der Theile.
§§. 193. und 194. Reihen für die cyklischen und hyperbolischen Amplituden, welche nach Potenzial-Functionen der vervielfachten Arcus ηu und $\eta' u$ fortschreiten.
§§. 195. und 196. Die cyklischen und hyperbolischen Amplituden dargestellt als unendliche Reihen von Arcus.
§§. 197. und 198. Die Amplituden als Arcus, deren Tangenten Brüche sind mit unendlichen Reihen für den Zähler und den Nenner.
§. 199. Zweite Darstellung der Modular-Functionen in unendlichen Reihen.
§. 200. Die Differenzial-Verhältnisse der Logarithmen der acht Hülfs-Functionen als eben so viele neue oder abgeleitete Functionen.
§. 201. Allgemeine Relationen unter jenen Functionen.

Funfzehnter Abschnitt. . . . . . . S. 424.

§. 202. Ausdruck der Modular-Integrale der zweiten Art und der zweiten Classe durch die Hülfs-Functionen und die davon abgeleiteten Functionen.
§. 203. Ausdruck der Modular-Integrale der zweiten Art und vierten Classe durch die Hülfs-Functionen und die davon abgeleiteten Functionen.
§§. 204. und 205. Entwicklung des Ausdrucks $\log \sqrt{\frac{\mathrm{Hl}(a+u)}{\mathrm{Hl}(a-u)}}$ und ähnlicher Ausdrücke mit andern Hülfs-Functionen.
§. 206. Die bequemsten Ausdrücke der Modular-Integrale der ersten und dritten Classe, welche rasch convergiren, wenn ihr Modul $k < \sin \frac{1}{4}\pi$.
§. 207. Die bequemsten Ausdrücke der Modular-Integrale der ersten und dritten Classe, welche rasch convergiren, wenn ihr Modul $k > \sin \frac{1}{4}\pi$.
§. 208. Reihen für die Quadrate der acht Hülfs-Functionen.
§. 209. Entwicklung der Quadrate der Modular-Functionen desjenigen Argumentes, für welches die Function $\mathrm{H}(u, a)$ oder $\mathrm{G}(u, a)$ ein Maximum ist.

Sechzehnter Abschnitt. . . . . . . S. 449.

§. 210. Neue Modular-Integrale, welche von denen der zweiten Art und zweiten Classe abhängen.

§. 211. Integrale, welche von den Modular-Integralen der zweiten Art und vierten Classe abhängen.
§. 212. Integrale, welche von Modular-Integralen der zweiten Art und ersten Classe abhängen.
§. 213. Integrale, welche von den Modular-Integralen der zweiten Art und dritten Classe abhängen.
§. 214. Relationen unter den Modular-Functionen und Amplituden zweier Argumente u und v, wenn die Moduln jener Functionen ein gegebenes Verhältnifs zu einander haben.
§. 215. Vom Integrale $v=\int_0 \frac{\mathrm{dn}\, a\, \partial u}{\sqrt{(1-k^2 \mathrm{sn}^2 a\, \mathrm{sn}^2 u)}}$.
§. 216. Die conjugirten Relationen unter den Amplituden und Modular-Functionen der Argumente u und v, wenn die Moduln jener Functionen das vorhin gegebene Verhältnifs haben.
Von dem Integrale $v=\int_0 \frac{\mathrm{cn}\, u\, \partial u}{\sqrt{(\mathrm{snc}^2 a-\mathrm{sn}^2 u)}}=\int_0 \frac{\mathrm{dn}\, a\, \mathrm{snc} u\, \partial u}{\sqrt{(\mathrm{cn}^2 a-\mathrm{cnc}^2 u)}}$.
§. 217. Umkehrung der ursprünglichen Relationen unter den Argumenten u und v mit Moduln, welche das frühere Verhältnifs zu einander haben.
Von dem umgekehrten Integrale $u=\int_0 \frac{\partial v}{\mathrm{snc}' b \sqrt{(1+\lambda^2 \mathrm{tn}'^2 b\, \mathrm{sn}^2 v)}}$.
§. 218. Umkehrung der conjugirteu Relationen unter den Functionen der Argumente v und u, deren Moduln das frühere Verhältnifs zu einander haben.
§. 219. Ein neues Geschlecht von Integralen, welche sich als Modular-Integrale der zweiten Art darstellen.
§. 220. Reihen für die Integrale $\int_0^u -u\, \partial\, \mathrm{amc} u$ und $\int_0^u u\, \partial\, \mathrm{am} u$.
§. 221. Merkwürdige Ausdrücke für $\mathrm{el} u$ und $\mathrm{elc} u$.
§. 222. Reihen für die Integrale $\int_0 -\mathrm{el} u.\partial\, \mathrm{amc} u$ und $\int_0 \mathrm{elc} u\, \partial\, \mathrm{am} u$.

Siebzehnter Abschnitt . . . . S. 223.

§. 223. Die sieben verschiedenen Fälle der Integration $y=\int_0 \frac{\partial x}{\sqrt{R}}$, wenn R die Form $A+Bx^2+Cx^4$ hat.
Die Integration $y=\int_0 \frac{\partial x}{\sqrt{(m^2 \pm 2mn\gamma x^2+n^2 x^4)}}$ für $\gamma<1$.
§. 224. Die Integration $y=\int_0 \frac{\partial x}{\sqrt{(m^2-2mn\gamma x^2+n^2 x^4)}}$ für $\gamma>1$.
§. 225. Die Integration $y=\int_0 \frac{\partial x}{\sqrt{(m^2+2mn\gamma x^2+n^2 x^4)}}$ für $\gamma>1$.
§. 226. Die Integration $y=\int_0 \frac{\partial x}{\sqrt{(m^2+2mn\gamma x^2+n^2 x^4)}}$ für $\gamma \gtrless 0$.
§. 227. Die Integration $y=\int_0 \frac{\partial x}{\sqrt{(-m^2+2mn\gamma x^2+n^2 x^4)}}$ für $\gamma \gtrless 0$.
§. 228. Die Integration $y=\int_0 \frac{\partial x}{\sqrt{(-m^2+2mn\gamma x^2-n^2 x^4)}}$ für $\gamma>1$.

§§. 229. bis 231. Die Integration $y=\int\frac{\partial x}{\sqrt{R}}$, wenn R eine biquadratische Form mit vier imaginären Factoren vom ersten Grade in Ansehung von x ist.

§. 232. Zweites Verfahren der Integration.

§§. 233. und 234. Die Integration $y=\int\frac{\partial x}{\sqrt{R}}$, wenn R zwei reelle und zwei imaginäre Factoren hat, welche Formen des ersten Grades in Ansehung von x sind.

§. 235. Von den Integralen $y=\int_0\frac{\partial x}{\sqrt{(1+x^4)}}$ und $y=\int_0\frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^4)}}$.

§. 236. Die Integration $y=\int\frac{\partial x}{\sqrt{R}}$, wenn $R=0$ nur eine Gleichung des dritten Grades mit zwei imaginären und einer reellen Wurzel ist.

§§. 237. und 238. Die Integration $y=\int\frac{\partial x}{\sqrt{R}}$, wenn $R=0$ eine biquadratische Gleichung mit vier reellen Wurzeln oder $R=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$ ist.

§. 239. Von den coordinirten Werthen von x in den beiden Integrationen von $\frac{\partial x}{\sqrt{R}}$.

§§. 240. u. 241. Die beiden Integrationen von $y=\int\frac{\partial x}{\sqrt{-R}}$, wenn $R=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$ ist.

§. 242. Die coordinirten Werthe von x in den beiden Integrationen von $y=\int\frac{\partial x}{\sqrt{-R}}$.

§§. 243. und 244. Eine zweite Art der Coordination bei der Integration $\int\frac{\partial x}{\sqrt{\pm R}}$ und $\int\frac{\partial x}{\sqrt{\pm R'}}$.

§. 245. Zweite ziemlich einfache Integration von $\frac{\partial x}{\sqrt{R}}$ und $\frac{\partial x}{\sqrt{-R}}$, $\frac{\partial x}{\sqrt{R'}}$ und $\frac{\partial x}{\sqrt{-R'}}$, welche zu einem reellen Modul führt, der <1 ist.

§. 246. Die Integrationen von $\frac{\partial x}{\sqrt{R}}$ und $\frac{\partial x}{\sqrt{-R}}$, wenn $R=(x-a)(x-b)(x-c)$ und also eine cubische Form ist.

§. 247. Zweite Art der Integration von $\frac{\partial x}{\sqrt{R}}$ und $\frac{\partial x}{\sqrt{-R}}$, wenn $R=(x-a)(x-b)(x-c)$ ist.

§. 248. Die Integration $y=\int\frac{H\partial x}{\sqrt{R}}$, wenn H eine rationale (ganze oder gebrochene) Function von x, und R eine arithmetische Form des dritten oder vierten Grades in Ansehung von x ist.

§. 249. Die Integration von $\frac{\partial u}{(\alpha+\beta t)^r}$ und $\frac{t^r\partial u}{(\alpha+\beta t)^r}$, wenn t eine Modular-Function von u ist.

§. 250. Die Integrationen von $\frac{\partial u}{(\alpha+\beta t^2)^r}$ und $\frac{t^{2r}\partial u}{(\alpha+\beta t^2)^r}$, wenn t eine Modular-Function von u ist.

§§. 251. und 252. Reduction des Unterschiedes zweier Modular-Integrale von der zweiten und vierten Classe, deren Parameter sich zu K ergänzen, auf ein einziges Integral von derselben Classe.

§. 253. Summen oder Unterschiede der Modular-Integrale von der ersten und dritten Classe, deren Parameter sich zum conjugirten Modularquadranten ergänzen.

Achtzehnter Abschnitt. . . . . . . S. 529.

Ausdruck der Modular-Integrale der zweiten Art durch Functionen der Aplitude des Arguments und des Parameters in convergirenden Reihen.

§. 254. Reihen für das Integral $'\mathfrak{S}(u,a)$.
§. 255. Reihen für das Integral $'\mathfrak{C}(u,a)$.
§. 256. Reihen für das Integral $'\mathfrak{D}(u,a)$.
§. 257. Reihe für das Integral $\mathfrak{S}(u,a)$.
§. 258. Reihen für die Integrale $\mathfrak{C}(u,a)$ und $\mathfrak{D}(u,a)$.
§. 259. Reihen für das Integral $S(u,a)$.
§. 260. Reihen für das Integral $C(u,a)$.
§. 261. Reihe für das Integral $D(u,a)$.
§. 262. Reihen für das Integral $'S(u,a)$.
§. 263. Reihen für das Integral $'C(u,a)$.
§. 264. Reihen für das Integral $'D(u,a)$.
§. 265. Andere Reihen für die Integrale $S(u,a)$, $C(u,a)$, $D(u,a)$.
§. 266. Andere Reihen für die Integrale $'S(u,a)$, $'C(u,a)$, $'D(u,a)$.
§§. 267. und 268. Reihen für die Integrale $\int_0 u.\partial\,\mathrm{am}\,u$ und $\int_0 n.\partial\,\mathrm{amc}\,u$.
§. 269. Reihen für die Integrale $\int_0 \mathrm{el}\,u.\partial\,\mathrm{am}\,u$ und $\int_0 \mathrm{elc}\,u.\partial\,\mathrm{am}\,u$.
§. 270. Reihen zur Berechnung von u und v, wenn $\mathrm{am}\,u = \mathrm{am}'v = \varphi$ gegeben ist.
§. 271. Reihen zur Berechnung von $\mathrm{el}\,u$ und $\mathrm{el}'v$, wenn $\varphi = \mathrm{am}\,u = \mathrm{am}'v$ gegeben ist.
§. 272. Entwicklung der Functionen $\overset{1}{\Theta}$, $\overset{2}{\Theta}$, $\overset{3}{\Theta}$, $\overset{4}{\Theta}$, ... nach den Cosinus der Vielfachen von θ.
§§. 273 bis 275. Zweite Umwandlung der Reihen, welche zur Berechnung von u und v aus $\varphi = \mathrm{am}\,u = \mathrm{am}'v$ dienen.
§. 276. Berechnung der Modular-Quadranten K und K' nach Reihen, welche einen Potenzen-Fortschritt mit dem Grundfactor $\cos 2\theta$ haben.
§. 277. Umordnung der vorigen Reihe zur Berechnung von u und v aus $\varphi = \mathrm{am}\,u = \mathrm{am}'v$.
§. 278. Reihen zur Berechnung von $\mathrm{el}\,u$ und $\mathrm{el}'v$ aus $\varphi = \mathrm{am}\,u = \mathrm{am}'v$, welche nach Potenzen von $\cos 2\theta$ entwickelt sind.

Neunzehnter Abschnitt. . . . . . . S. 584.

§§. 279. und 280. Umformung der Gleichung $x = \mathrm{sn}\,u$ in eine ähnliche mit einem andern Argumente und einem andern Modul durch eine Substitution des dritten Grades.
§. 281. Ergänzende Substitution des dritten Grades.
§§. 282. und 283. Umformung der Gleichung $x = \mathrm{sn}\,u$ in eine ähnliche durch eine Substitution des fünften Grades.
§. 284. Die ergänzende Substitution des fünften Grades.
§§. 285 bis 293. Allgemeine Umformung der Gleichung $x = \mathrm{sn}\,u$ in eine ähnliche durch eine Substitution des $n$ten Grades, wenn n eine ungerade ganze Zahl ist.
§. 294. Die umgekehrte Substitution des $n$ten Grades, wenn n eine ungerade ganze Zahl ist.
§. 295. Die erste einfache Substitution des $n$ten Grades für ein ungerades n.

§§. 296. und 297. Die zweite einfache und umgekehrte Substitution $n$ten Grades für ein ungerades n.

§§. 298. und 299. Umformung der Modular-Integrale der ersten Art durch Substitutionen des $n$ten Grades, wenn n eine ungerade ganze Zahl ist.

§§. 300. und 301. Umformung der Modular-Logarithmen und der damit im Zusammenhange stehenden Hülfs-Functionen durch die obigen Substitutionen des $n$ten Grades.

§. 302. Umformung der Modular-Integrale der zweiten Art durch Substitutionen des $n$ten Grades, wenn n eine ungerade ganze Zahl ist.

§. 303. Differenzial-Gleichungen für den Zähler und Nenner der Substitution des $n$ten Grades, wenn n eine ungerade ganze Zahl ist.

Einleitung.

Allgemeiner Charakter der Potenzial-Functionen.

§. 1.

Die Potenzial-Functionen, welche ich in einer frühern Schrift abgehandelt habe, erscheinen nur als besondere Formen der Modular-Functionen in weitester Bedeutung, und eine Folge dieses Verhältnisses ist die grofse Aehnlichkeit zwischen den beiden Hauptarten dieser periodischen Functionen; diese Aehnlichkeit mufs nicht nur, um dem Gedächtnisse zu Hülfe zu kommen, in der Bezeichnung berücksichtigt oder geltend gemacht, sondern überhaupt als ein Princip bei der Behandlung der Modular-Functionen betrachtet werden. Aus diesem Grunde werden wir zuerst den allgemeinen Charakter der Potenzial-Functionen ins Klare setzen, dann aber auch den allgemeinen Charakter der Modular-Functionen angeben, und ihn also jenem der besseren Unterscheidung wegen gegenüberstellen. Hierin nehmen wir zugleich den Weg der Erfindung, welchen der unsterbliche *Euler* betrat, als er unbewufst den Grund zu der Theorie der Modular-Functionen legte, welche durch die ruhmreichen Erfindungen von *Legendre, Abel* und *Jacobi* zu einem der wichtigsten Zweige der Mathematik erhoben worden ist.

Sind zwei veränderliche Zahlen v und w, deren hyperbolische Sinus x und y sein mögen, so beschaffen, dafs ihre Summe $v+w=u$, deren hyperbolischer Sinus z sein mag, eine unveränderliche Gröfse ist, so wird der arithmetische Zusammenhang zwischen den beiden veränderlichen Gröfsen x und y durch eine rationale und symmetrische Gleichung des zweiten Grades ausgedrückt, welche die *charakteristische Gleichung der hyperbolischen Sinus* genannt werden mag. Da nämlich $w=u-v$ ist, so ist nach Theil I. §. 10. $\mathfrak{Sin}\,w = \mathfrak{Sin}\,u\;\mathfrak{Cos}\,v - \mathfrak{Cos}\,u\;\mathfrak{Sin}\,v$, oder $y=z\sqrt{(1+x^2)}-x\sqrt{(1+z^2)}$, also $(y+x\sqrt{(1+z^2)})^2=z^2(1+x^2)$, und

diese Gleichung reducirt sich auf

$$x^2 + 2xy\sqrt{(1+z^2)} + y^2 = z^2,$$

welche die charakteristische Gleichung der hyperbolischen Sinus ist; sie ist rational und vom zweiten Grade in Ansehung der beiden veränderlichen Gröſsen x und y, auch ist sie symmetrisch, weil sie nicht geändert wird, wenn man darin x und y mit einander vertauscht.

Für die cyklischen Sinus $x = \sin v$ und $y = \sin w$ erhält man in ähnlicher Weise die Gleichung

$$x^2 + 2xy\sqrt{(1-z^2)} + y^2 = z^2,$$

welche sich aber aus der vorigen herleiten läſst, indem man xi für x, yi für y und zi für z setzt, und unter i, wie im Nachfolgenden immer $\sqrt{-1}$ versteht.

Was so eben in Ansehung der Sinus gezeigt worden ist, läſst sich auch leicht als richtig nachweisen in Ansehung der Cosinus, der Tangenten und Cotangenten; daher besteht der allgemeine Character der Potenzial-Functionen darin, *daſs der arithmetische Zusammenhang unter zwei gleichnamigen Functionen, deren Argumente oder Arcus eine unveränderliche Summe ausmachen, durch eine symmetrische und rationale Gleichung des zweiten Grades ausgedrückt werden kann.*

Zusatz. Setzt man in einer solchen Gleichung $m+nx$ für x und $m+ny$ für y, und ordnet man dieselbe wieder nach den Potenzen von x und y, so bleibt sie vom zweiten Grade, auch ist sie dann wieder symmetrisch in Ansehung der neuen Gröſsen x und y, und hat die Form

$$A(x^2+y^2) + 2B.xy + 2C(x+y) + D = 0.$$

§. 2.

Das vorige allgemeine Theorem kann auch umgekehrt werden und heiſst dann also: *Wird der arithmetische Zusammenhang unter zwei gleichnamigen Functionen durch eine symmetrische Gleichung des zweiten Grades ausgedrückt, so sind diese entweder Potenzial-Functionen, deren veränderliche Arcus eine unveränderliche Summe ausmachen, oder sie sind arithmetische Formen des ersten Grades, welche aus solchen gleichnamigen Potenzial-Functionen, deren Arcus eine unveränderliche Summe ausmachen, in gleicher Weise gebildet sind.*

Nehmen wir z. B. die Gleichung

$$x^2 + 2xy\sqrt{(1+z^2)} + y^2 = z^2,$$

welche in Ansehung der beiden veränderlichen Gröfsen x und y symmetrisch und vom zweiten Grade ist, und differenziiren wir dieselbe, wodurch wir, weil z unveränderlich sein soll, erhalten

$$(y + x\sqrt{(1+z^2)}).\partial y + (x + y\sqrt{(1+z^2)}).\partial x = 0,$$

oder

$$\frac{\partial y}{x+y\sqrt{(1+z^2)}} + \frac{\partial x}{y+x\sqrt{(1+z^2)}} = 0,$$

so kann diese Differenzial-Gleichung leicht als eine separirte dargestellt werden; lösen wir nämlich die vorgelegte Gleichung nach x und y auf, wodurch wir

$$y = z\sqrt{(1+x^2)} - x\sqrt{(1+z^2)}, \qquad x = z\sqrt{(1+y^2)} - y\sqrt{(1+z^2)},$$

oder auch $y + x\sqrt{(1+z^2)} = z\sqrt{(1+x^2)}$ und $x + y\sqrt{(1+z^2)} = z\sqrt{(1+y^2)}$ erhalten, und substituiren wir diese Ausdrücke in der vorigen Differenzial-Gleichung, so verwandelt sie sich in

$$\frac{\partial y}{z\sqrt{(1+y^2)}} + \frac{\partial x}{z\sqrt{(1+x^2)}} = 0, \quad \text{oder} \quad \frac{\partial y}{\sqrt{(1+y^2)}} + \frac{\partial x}{\sqrt{(1+x^2)}} = 0,$$

und nach Theil I. §. 18. ist das Integral dieser Gleichung

$$\text{Arc Sin}(y) + \text{Arc Sin}(x) = \text{const.}$$

Wir fügen noch ein Beispiel hinzu, indem wir die symmetrische Gleichung

$$x + y - z.xy = z$$

behandeln, welche wegen des Productes $x.y$ der beiden veränderlichen Gröfsen x und y als eine Gleichung des zweiten Grades anzusehen ist. Geben wir jener Gleichung zuerst die Form

$$z = \frac{x+y}{1+xy},$$

so erhalten wir durch Differenziiren auf der Stelle $0 = \partial y(1-x^2) + \partial x(1-y^2)$, oder

$$\frac{\partial y}{1-y^2} + \frac{\partial x}{1-x^2} = 0,$$

und das Integral dieser Gleichung ist $\text{Arc Tang}(y) + \text{Arc Tang}(x) = \text{const.}$

Zusatz. Die allgemeinste Gleichung

$$\alpha(x^2+y^2) + 2\beta xy + 2\gamma(x+y) + \delta = 0$$

verwandelt sich, wenn $x = m + nx'$ und $y = m + ny'$ subsituirt wird, in eine ähnliche Gleichung

$$\alpha'(x'^2 + y'^2) + 2\beta' x' y + 2\gamma'(x' + y') + \delta' = 0,$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird

$$\alpha' = \alpha n^2, \quad \beta' = \beta n^2, \quad \gamma' = n(m\alpha + m\beta + \gamma), \quad \delta' = \delta + 4m\gamma + 2\beta m^2 + 2\alpha m^2;$$

wird nun $m = -\frac{\gamma}{\alpha+\beta}$ genommen, wodurch $\gamma' = 0$ und $\delta' = \delta - \frac{2\gamma^2}{\alpha+\beta}$ wird, so hat man die einfachere characteristische Gleichung

$$\alpha'(x'^2 + y'^2) + 2\beta' x' y' + \delta' = 0$$

für die beiden veränderlichen Gröfsen x' und y'. Behandelt man diese Gleichung wie vorhin, so findet man die separirte Differenzial-Gleichung

$$\frac{\partial y'}{\sqrt{[(\beta'^2 - \alpha'^2)y'^2 - \alpha'\delta']}} + \frac{\partial x'}{\sqrt{[(\beta'^2 - \alpha'^2)x'^2 - \alpha'\delta']}} = 0.$$

Wird nun n so bestimmt, dafs $\frac{\alpha'\delta'}{\beta'^2 - \alpha'^2} = \pm 1$ wird, wodurch man erhält

$$n = \sqrt{\frac{\pm\alpha\left(\delta - \frac{2\gamma^2}{\alpha+\beta}\right)}{\beta^2 - \alpha^2}},$$

so erhält die vorige Differenzial-Gleichung eine von den drei Formen:

$$\frac{\partial y}{\sqrt{(1-y'^2)}} + \frac{\partial x'}{\sqrt{(1-x'^2)}} = 0, \qquad \frac{\partial y'}{\sqrt{(1+y'^2)}} + \frac{\partial x'}{\sqrt{(1+x'^2)}} = 0,$$

$$\frac{\partial y'}{\sqrt{(y'^2-1)}} + \frac{\partial x'}{\sqrt{(x'^2-1)}} = 0,$$

und das Integral ist also entweder $\arcsin(y') + \arcsin(x') = \text{const.}$, oder $\text{ArcSin}(y') + \text{ArcSin}(x') = \text{const.}$ oder $\text{ArcCos}(y') + \text{ArcCos}(x') = \text{const.}$ Hierbei wird vorausgesetzt, dafs α nicht $= 0$ sei; ist $\alpha = 0$, so ist die Nachweisung noch einfacher.

Erster Abschnitt.

Allgemeiner Charakter der Modular-Functionen.

§. 3.

Der allgemeine Charakter der Modular-Functionen besteht darin, dafs der arithmetische Zusammenhang unter zwei gleichnamigen solchen Functionen, deren Argumente eine unveränderliche Summe ausmachen, durch eine rationale und symmetrische Gleichung des vierten Grades ausgedrückt wird, die aber in Ansehung der einzelnen Functionen selbst nur vom zweiten Grade ist.

Die allgemeinste Gleichung des vierten Grades zwischen den Gröfsen x und y hat die Form:

$$A + Bx + B'y + Cxy + Dx^2 + D'y^2 + Ex^2y + E'xy^2 + Fx^2y^2 + Gx^3 + G'y^3 + Hx^3y + H'xy^3 + Ix^4 + I'y^4 = 0;$$

sie enthält die Potenzen x^3, y^3, x^4 und y^4, welche der Annahme gemäfs

in ihr nicht vorkommen sollen; lassen wir aber die Glieder weg, welche diese Potenzen enthalten, so zieht sich die Gleichung zusammen auf:

$$A + Bx + B'y + Cxy + Dx^2 + D'y^2 + Ex^2y + E'xy^2 + Fx^2y^2 = 0,$$

welche nur noch in Hinsicht auf das Glied $F.x^2y^2$ vom vierten Grade ist. Soll diese Gleichung unverändert bleiben, wenn darin x mit y vertauscht wird, so mufs $B' = B$, $D' = D$ und $E' = E$ sein und es kann daher die Gleichung also dargestellt werden:

$$A + B(x+y) + Cxy + D(x^2+y^2) + Exy(x+y) + Fx^2y^2 = 0.$$

Die gefundene Gleichung hat noch eine überflüssige Allgemeinheit; sie pafst nicht nur auf allgemeine Modular-Functionen selbst, sondern auch auf arithmetische Ausdrücke, welche aus gleichnamigen Modular-Functionen der Argumente v und w von unveränderlicher Summe $u = v + w$ in gleicher Weise gebildet sind.

In der charakteristischen Gleichung der hyperbolischen oder auch cyklischen Sinus wird kein Glied geändert, wenn man darin $-x$ für x und gleichzeitig $-y$ für y setzt; wollen wir daher solche Functionen finden, welche, wie die genannten Potenzial-Functionen einen gleich grofsen aber entgegengesetzten Werth erhalten, wenn statt ihres Arguments ein gleich grofses entgegengesetztes genommen wird, so nehmen wir an, dafs die Gröfsen A, B, C, D, E, F sich ebenfalls nicht ändern, wenn darin $-x$ für x, $-y$ für y und $-z$ für z gesetzt wird; da sich aber die Gleichung

$$A + B(x+y) + Cxy + D(x^2+y^2) + Exy(x+y) + Fx^2y^2 = 0,$$

durch die angezeigte Aenderung verwandelt in

$$A - B(x+y) + Cxy + D(x^2+y^2) - Exy(x+y) + Fx^2y \;= 0,$$

so mufs $B = 0$ und $E = 0$ sein, wenn die beiden Gleichungen übereinstimmen sollen, und wir haben also die einfachere Gleichung:

$$A + C.xy + D(x^2+y^2) + Fx^2y^2 = 0,$$

welche auf solche drei gleichnamige Modular-Functionen $x = \varphi(v)$, $y = \varphi(w)$ und $z = \varphi(v+w) = \varphi(u)$ pafst, welche mit den cyklischen oder hyperbolischen Sinus Aehnlichkeit haben, nämlich mit ihrem Argumente zugleich verschwinden, und einen gleich grofsen negativen Werth erhalten, wenn statt ihres Arguments ein gleich grofses negatives genommen wird.

Da für $v = 0$ der Gleichung $v + w = u$ gemäfs $w = u$, also $x = 0$ und $y = z$ wird, so können wir die Form der vorigen Gleichung sogleich

noch näher bestimmen, indem wir darin $x = 0$ und $y = z$ (oder $y = 0$ und $x = z$) setzen, wodurch $A = -Dz^2$ gefunden wird. Wird dieser Werth substituirt, die Gleichung dann durch D dividirt, so erhält sie die Form

$$y^2 + 2mxy + x^2 + nx^2y^2 = z^2.$$

Das Glied nx^2y^2 ist das einzige in dieser Gleichung, welches wegen des Productes x^2y^2 von der vierten Dimension ist, und die Gleichung selbst ist also nur in Hinsicht darauf vom vierten Grade; fehlte dieses Glied und wäre also $n = 0$, so wäre die Gleichung $y^2 + 2mxy + x^2 = z^2$ die charakteristische Gleichung der cyklischen oder hyperbolischen Sinus, wenn m entweder $= \sqrt{(1 - z^2)}$ oder $m = \sqrt{(1 + z^2)}$ wäre, und für andere Werthe von m ließe sich nun ein constanter Factor r finden, dergestalt, daß rx, ry und rz cyklische oder hyperbolische Functionen wären.

Zusatz. Die allgemeine Gleichung $A' + B'(x' + y') + C'.x'y' + D'(x'^2 + y'^2) + E'x'y'(x' + y') + F'.x'^2y'^2 = 0$ läßt sich durch die Substitutionen

$$x' = \frac{p + qx}{1 + rx} \text{ und } y' = \frac{p + qy}{1 + ry},$$

oder auch schon durch die Substitutionen $x' = p + qx$ und $y' = p + qy$ in eine ähnliche Gleichung

$$A + B(x + y) + Cxy + D(x^2 + y^2) + Exy(x + y) + Fx^2y^2 = 0$$

umformen, und die drei Constanten p, q, r im ersten oder die beiden Constanten p und q im zweiten Falle lassen sich dann so bestimmen, daß $B = 0$ und $E = 0$ wird, wodurch die Gleichung die vorhin erwähnte einfachere Form erhält.

§. 4.

Wird die gefundene Gleichung $x^2 + 2mxy + y^2 + nx^2y^2 = z^2$, in welcher $x = \varphi(v)$, $y = \varphi(w)$, $z = \varphi(u)$ und $u = v + w$ ist, differenziirt, indem man u und also auch z als unveränderlich ansieht; so erhält man die Gleichung

$$\frac{\partial x}{y + mx + nyx^2} + \frac{\partial y}{x + my + nxy^2} = 0.$$

Um in dieser Gleichung die veränderlichen Größen zu trennen, löst man die ursprüngliche Gleichung nach x und y auf; hierdurch erhält man ohne alle Zweideutigkeit

$$y = \frac{-mx + \sqrt{[z^2 + (m^2 - 1 + nz^2)x^2 - nx^4]}}{1 + nx^2}$$

und

$$x = \frac{-my + \sqrt{[z^2 + (m^2 - 1 + nz^2)y^2 - ny^4]}}{1 + ny^2},$$

weil für $x=0$ mufs $y=+z$ und für $y=0$ mufs $x=+z$ werden. Die in diesen Formeln enthaltenen Wurzelausdrücke sind also:

$$\sqrt{(z^2+(m^2-1+nz^2)x^2-nx^4)} = y+mx+nx^2y$$

und

$$\sqrt{(z^2+(m^2-1+nz^2)y^2-ny^4)} = x+my+nxy^2,$$

und werden sie in der obigen Differenzial-Gleichung substituirt, so verwandelt sie sich in die separirte

$$\frac{\partial x}{\sqrt{[z^2+(m^2-1+nz^2)x^2-nx^4]}}+\frac{\partial y}{\sqrt{[z^2+(m^2-1+nz^2)y^2-ny^4]}}=0.$$

Die biquadratische Form

$$z^2+(m^2-1+nz^2)x^2-nx^4 \quad \text{oder} \quad z^2\left(1+\frac{m^2-1+nz^2}{z^2}x^2-\frac{n}{z^2}\cdot x^4\right)$$

kann leicht in zwei quadratische Factoren (reelle oder imaginäre) zerfällt werden; setzt man aber

$$z^2+(m^2-1+nz^2)x^2-nx^4 = z^2(1+px^2)(1+qx^2),$$

so ist auch

$$z^2+(m^2-1+nz^2)y^2-ny^4 = z^2(1+py^2)(1+qy^2),$$

und die Differenzial-Gleichung verwandelt sich in

$$\frac{\partial x}{\sqrt{[(1+px^2)(1+qx^2)]}}+\frac{\partial y}{\sqrt{[(1+py^2)(1+qy^2)]}}=0.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit einem noch näher zu bestimmenden constanten Factor g, und setzt man

$$1.\quad \begin{cases} v=\int_0 \dfrac{g\,\partial x}{\sqrt{[(1+px^2)(1+qx^2)]}}, \\ w=\int_0 \dfrac{g\,\partial y}{\sqrt{[(1+py^2)(1+qy^2)]}}, \\ u=\int_0 \dfrac{g\,\partial z}{\sqrt{[(1+pz^2)(1+qz^2)]}}, \end{cases}$$

so ist die Differenzial-Gleichung $\partial v+\partial w=0$ und ihr Integral

$$2.\quad v+w = \text{const.},$$

die Summe u der Argumente v und w ist also unveränderlich.

Aus der Zerfällung der biquadratischen Formen geht aber hervor, dafs

$$p+q=\frac{m^2-1+nz^2}{z^2} \quad \text{und} \quad p.q=-\frac{n}{z^2}$$

ist, und diese Gleichungen dienen zur Berechnung von p und q, wenn m und n gegeben sind; man findet aber aus ihnen rückwärts

$$n=-pqz^2 \quad \text{und} \quad m=\sqrt{[(1+pz^2)(1+qz^2)]},$$

und hiernach sind die beiden Constanten m und n durch zwei neue p und

q ersetzt, welche einer beliebigen Bestimmung fähig sind; es darf nur keine derselben $=0$ gesetzt werden, weil sonst $n=0$ wäre, und man also auf die cyklischen oder hyperbolischen Sinus zurückkommen würde; ferner dürfen auch p und q sich nicht gleich sein, weil die Differenzial-Gleichung dann die einfache Gestalt

$$\frac{\partial x}{1+px^2}+\frac{\partial y}{1+py^2}=0$$

bekommen würde, deren Integral entweder $\operatorname{arc\,tang}(x\sqrt{p})+\operatorname{arc\,tang}(y\sqrt{p})=\text{const.}$, oder $\operatorname{ArcTang}(x\sqrt{-p})+\operatorname{ArcTang}(y\sqrt{-p})=\text{const.}$ sein würde, je nachdem p positiv oder negativ wäre.

Durch die gefundenen Werthe von m und n verwandelt sich die charakteristische Gleichung in

$$3.\quad x^2+2xy\sqrt{[(1+pz^2)(1+qz^2)]}+y^2=z^2(1+pqx^2y^2),$$

und ihre Auflösungen nach x und y sind nun

$$4.\quad \begin{cases} x=\dfrac{z\sqrt{[(1+py^2)(1+qy^2)]}-y\sqrt{[(1+pz^2)(1+qz^2)]}}{1-pqy^2z^2}, \\ y=\dfrac{z\sqrt{[(1+px^2)(1+qx^2)]}-x\sqrt{[(1+pz^2)(1+qz^2)]}}{1-pqx^2z^2}. \end{cases}$$

Der Factor g, welcher in den Integralen (1.) vorkommt, kommt in den Gleichungen (3.) und (4.) nicht vor; die Ursache hiervon ist, daſs in der Gleichung $v+w=u$ die Verhältnisse ihrer drei Glieder zu einander nicht geändert werden, wenn man diese Gleichung mit einem constanten Factor multiplicirt, oder sie dadurch dividirt.

Könnte man die angezeigten Integrationen vollführen, so würde v als eine Function von x, w als eine Function von y und u als eine Function von z dargestellt werden; durch Umkehrung dieser Gleichungen würde man dann zu den gesuchten Ausdrücken

$$x=\varphi(v),\quad y=\varphi(w)\quad \text{und}\quad z=\varphi(u)$$

gelangen: diese Functionen werden aber wie die cyklischen und hyperbolischen Sinus (und Tangenten) so beschaffen sein, daſs ist

$$\varphi(0)=0\quad \text{und}\quad \varphi(-v)=-\varphi(+v).$$

§. 5.

Durch die Formeln (4.) im §. 4. ist der Zusammenhang zwischen den drei gleichnamigen Functionen x, y, z dergestalt ausgedrückt, daſs man x aus y und z, wie auch y aus x und z berechnen kann, da die beiden Constanten p und q als gegeben betrachtet werden. Es entsteht

nun die Frage, wie umgekehrt die Function z aus x und y berechnet werden könne. Schafft man in den Gleichungen (4.) die Nenner weg, und multiplicirt man dann die erste Gleichung mit x, die zweite aber mit y, so erhält man, wenn die eine Gleichung von der anderen subtrahirt wird, die Formel

$$z = \frac{y^2 - x^2}{y\sqrt{[(1+px^2)(1+qx^2)]} - x\sqrt{[(1+py^2)(1+qy^2)]}},$$

in welcher wir aber den Nenner noch rational machen wollen, indem wir die beiden Glieder des Bruches mit $y\sqrt{[(1+px^2)(1+qx^2)]}+x\sqrt{[(1+py^2)(1+qy^2)]}$ multipliciren; der neue Nenner wird dann $y^2(1+px^2)(1+qx^2) - x^2(1+py^2)(1+qy^2)$, oder nach einer leichten Reduction $(y^2-x^2)(1-pqx^2y^2)$; daher haben wir

$$5.\quad z = \frac{y\sqrt{[(1+px^2)(1+qx^2)]}+x\sqrt{[(1+py^2)(1+qy^2)]}}{1-pqx^2y^2}.$$

Aus den Formeln (4.) und (5.) leiten wir noch andere her. Man findet

$$1+px^2 = \frac{(1+pz^2)(1+py^2)-2pyz\sqrt{[(1+pz^2)(1+py^2)(1+qz^2)(1+qy^2)]}+p^2y^2z^2(1+qz^2)(1+qy^2)}{(1-pqz^2y^2)^2},$$

und dieser Bruch ist ein vollkommenes Quadrat; zieht man die Wurzel aus, so erhält man

$$6.\quad \sqrt{(1+px^2)} = \frac{\sqrt{[(1+pz^2)(1+py^2)}-pyz\sqrt{[(1+qz^2)(1+qy^2)]}}{1-pqz^2y^2}.$$

Das Ausziehen der Quadratwurzel bringt zwar eine Zweideutigkeit mit sich, aber diese kann leicht gehoben werden; da nämlich für $y=0$ muſs $x=z$ werden, so erhellet die Richtigkeit der angegebenen Formel. Eben so findet man noch

$$7.\quad \sqrt{(1+qx^2)} = \frac{\sqrt{[(1+qz^2)(1+qy^2)]}-qyz\sqrt{[(1+pz^2)(1+py^2)]}}{1-pqz^2y^2},$$

$$8.\quad \sqrt{(1+py^2)} = \frac{\sqrt{[(1+pz^2)(1+px^2)]}-pxz\sqrt{[(1+qz^2)(1+qx^2)]}}{1-pqz^2x^2},$$

$$9.\quad \sqrt{(1+qy^2)} = \frac{\sqrt{[(1+qz^2)(1+qx^2)]}-qxz\sqrt{[(1+pz^2)(1+px^2)]}}{1-pqz^2x^2},$$

$$10.\quad \sqrt{(1+pz^2)} = \frac{\sqrt{[(1+px^2)(1+py^2)]}+pxy\sqrt{[(1+qx^2)(1+qy^2)]}}{1-pqx^2y^2},$$

$$11.\quad \sqrt{(1+qz^2)} = \frac{\sqrt{[(1+qx^2)(1+qy^2)]}+qxy\sqrt{[(1+px^2)(1+py^2)]}}{1-pqx^2y^2}.$$

Aus den vorstehenden Formeln leiten wir noch einige andere her, nämlich

$$12.\quad \sqrt{(1+qx^2)}+qyz\sqrt{(1+px^2)} = \sqrt{[(1+qz^2)(1+qy^2)]},$$
$$13.\quad \sqrt{(1+px^2)}+pyz\sqrt{(1+qx^2)} = \sqrt{[(1+pz^2)(1+py^2)]},$$
$$14.\quad \sqrt{(1+qy^2)}+qxz\sqrt{(1+py^2)} = \sqrt{[(1+qz^2)(1+qx^2)]},$$
$$15.\quad \sqrt{(1+py^2)}+pxz\sqrt{(1+qy^2)} = \sqrt{[(1+pz^2)(1+px^2)]},$$
$$16.\quad \sqrt{(1+qz^2)}-qxy\sqrt{(1+pz^2)} = \sqrt{[(1+qx^2)(1+qy^2)]},$$
$$17.\quad \sqrt{(1+pz^2)}-pxy\sqrt{(1+qz^2)} = \sqrt{[(1+px^2)(1+py^2)]}.$$

Multiplicirt man die Gleichung (12.) mit $\sqrt{(1+px^2)}$ und (13.) mit $\sqrt{(1+qx^2)}$, so erhält man durch das Subtrahiren der einen Gleichung von der anderen noch

$$18.\quad \sqrt{[(1+qz^2)(1+qy^2)(1+px^2)]}-\sqrt{[(1+pz^2)(1+py^2)(1+qx^2)]}=(q-p).yz,$$

und eben so

$$19.\quad \sqrt{[(1+qz^2)(1+qx^2)(1+py^2)]}-\sqrt{[(1+pz^2)(1+px^2)(1+qy^2)]}=(q-p).xz,$$
$$20.\quad \sqrt{[(1+qx^2)(1+qy^2)(1+pz^2)]}-\sqrt{[(1+px^2)(1+py^2)(1+qz^2)]}=(p-q).xy.$$

In ähnlicher Weise erhält man auch noch die folgende merkwürdige Relation

$$21.\quad p\sqrt{[(1+qx^2)(1+qy^2)(1+qz^2)]}-q\sqrt{[(1+px^2)(1+py^2)(1+pz^2)]}=p-q.$$

Die Menge dieser Gleichungen liefse sich leicht noch ansehnlich vermehren; wir werden aber weiter unten die noch fehlenden Relationen auf eine bequemere Weise herleiten.

§. 6.

Cyklische Modular-Functionen überhaupt.

Der durch die Formeln (3.) bis (21.) ausgedrückte Zusammenhang unter den drei Functionen x, y, z der Argumente v, w, u, welche durch die Bedingung $v+w=u$ mit einander verbunden sind, ist von ziemlich einfacher Beschaffenheit; weit verwickelter ist aber der Zusammenhang zwischen einer solchen Function und ihrem Argumente, und also die Natur der Function selbst, welche durch die Integral-Formel

$$u=\int_0 \frac{g\,\partial z}{\sqrt{[(1+pz^2)(1+qz^2)]}}$$

ausgedrückt wird. Dieser Zusammenhang zwischen z und u hängt wesentlich von den beiden unbestimmten Constanten p und q ab, welche nur der Einschränkung unterworfen wurden, dafs sie ungleich sein sollen und keine derselben $=0$ sei. Die Gröfsen p und q können übrigens reell und imaginär sein und im letzten Falle ist $p=\alpha-\beta i$, wenn $q=\alpha+\beta i$ ist (und unter i verstanden wird $\sqrt{-1}$), weil das Product $(1+pz^2)(1+qz^2)$ selbst reell sein soll.

Nehmen wir vorläufig an, dafs p und q beide reell sein sollen, so müssen noch, insofern diese Zahlen positiv oder auch negativ sein können, vier verschiedene Fälle unterschieden werden; wir unterscheiden aber, um der allzugrofsen Vielförmigkeit zu begegnen, demungeachtet vorläufig nur zwei Fälle, nämlich die beiden, in welchen p und q entweder beide negativ oder beide positiv sind, weil wir die beiden noch übrigen Fälle auf die vorhin genannten später zurückzuführen gesonnen sind.

Nehmen wir zuerst an, dafs p und q beide negativ und $p > q$ sei, so haben wir die Formel

$$u = \int_0 \frac{g \cdot \partial z}{\sqrt{[(1-pz^2)(1-qz^2)]}},$$

wenn wir $-p$ und $-q$ für p und q setzen. Führen wir eine neue veränderliche Gröfse t ein, welche durch die Gleichung $t = z\sqrt{p}$ bestimmt ist, so ist für $z = 0$ auch $t = 0$; ferner ist $\partial z = \frac{\partial t}{\sqrt{p}}$, und also

$$u = \int_0 \frac{\frac{g}{\sqrt{p}} \cdot \partial t}{\sqrt{\left[(1-t^2)\left(1-\frac{q}{p}t^2\right)\right]}}.$$

Diese Formel wird am einfachsten, wenn $g = \sqrt{p}$ genommen wird; aufserdem ist der Bruch $\frac{q}{p}$ positiv und < 1; setzen wir daher $\frac{q}{p} = k^2$, so haben wir die Formel

$$u = \int_0 \frac{\partial t}{\sqrt{[(1-t^2)(1-k^2t^2)]}},$$

in welcher nur noch eine einzige Constante k vorkommt, welche zwischen den Grenzen 0 und $+1$ enthalten ist und welche wir den *Modul* nennen. Dieselbe Formel finden wir, wenn wir in der ursprünglichen setzen $g = 1$, $z = t$, $p = -1$ und $q = -k^2$. Wäre $k = 0$, so wäre $u = \int_0 \frac{\partial t}{\sqrt{(1-t^2)}} = \text{arc}\sin(t)$, und also $t = \sin u$; wäre aber $k = 1$, so wäre $u = \int_0 \frac{\partial t}{1-t^2} = \text{Arc Tang}(t)$, und also $t = \text{Tang}\, u$ oder auch $t = \sin l u$ nach Theil I. §. 37.; hieraus schliefst man, *dafs, wenn der Modul* k *zwischen den Grenzen* 0 *und* 1 *enthalten ist, die Function* t *zwischen den Grenzen sin* u *und sin* l u *und also überhaupt zwischen zwei cyklischen Sinus enthalten sei.*

Aus diesem Grunde nennen wir, wenn der Zusammenhang zwischen t und u durch die Gleichung $u = \int_0 \frac{\partial t}{\sqrt{(1-t^2)} \cdot \sqrt{(1-k^2t^2)}}$ ausgedrückt ist,

t *den cyklischen Modular-Sinus* des Argumentes u für den Modul k, $\sqrt{(1-t^2)}$ *den cyklischen Modular-Cosinus* und $\frac{t}{\sqrt{(1-t^2)}}$ die *cyklische Modular-Tangente* des Argumentes u für den Modul k. Zu diesen drei cyklischen Modular-Functionen kommt noch eine vierte, nämlich $\sqrt{(1-k^2t^2)}$, welche wir die *cyklische Differente* des Argumentes u für den Modul k nennen, weil sich in ihrem Vorhandensein die cyklischen Modular-Functionen von den gewöhnlichen cyklischen Functionen am auffallendsten unterscheiden. Die Bezeichnung stellen wir also fest:

$$t = \operatorname{sn} u, \quad \sqrt{(1-t^2)} = \operatorname{cn} u, \quad \frac{t}{\sqrt{(1-t^2)}} = \operatorname{tn} u, \quad \sqrt{(1-k^2t^2)} = \operatorname{dn} u.$$

Die vier cyklischen Modular-Functionen $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{tn} u$, $\operatorname{dn} u$ sind nicht bloſs Functionen des Argumentes u, sondern auch Functionen des Moduls k, welcher zwischen den Grenzen Null und Eins enthalten ist, und daher als der cyklische Sinus eines Arcus θ gedacht werden kann; setzen wir aber

$$k = \sin\theta, \quad k' = \cos\theta, \quad \frac{k}{k'} = \operatorname{tang}\theta,$$

so ist $k^2 + k'^2 = 1$, und der Winkel θ heiſst der Winkel oder der Arcus des Moduls. Da auch k' zwischen den Grenzen Null und Eins enthalten ist, so kann auch k' als ein Modul cyklischer Modular-Functionen vorgestellt werden; vertauschen wir aber k mit k', so vertauschen wir $\operatorname{sn} u$ mit $\operatorname{sn}' u$, $\operatorname{cn} u$ mit $\operatorname{cn}' u$, $\operatorname{tn} u$ mit $\operatorname{tn}' u$ und $\operatorname{dn} u$ mit $\operatorname{dn}' u$. Die durch die Gleichung $k^2 + k'^2 = 1$ mit einander verbundenen Modul nennen wir den einen den conjugirten des andern; ist θ der Arcus des Moduls k, so ist $\frac{\pi}{2} - \theta$ der Arcus des conjugirten Moduls k'.

§. 7.

Der Zusammenhang zwischen den vier auf dasselbe Argument u und auf denselben Modul k bezogenen Functionen $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{tn} u$, $\operatorname{dn} u$ wird ausgedrückt durch die Formeln

$$\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1, \qquad \operatorname{tn} u = \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u},$$

$$\operatorname{cn} u = \sqrt{(1-\operatorname{sn}^2 u)}, \qquad 1 + \operatorname{tn}^2 u = \frac{1}{\operatorname{cn}^2 u},$$

$$\operatorname{sn} u = \sqrt{(1-\operatorname{cn}^2 u)}, \qquad \frac{1+\operatorname{tn}^2 u}{\operatorname{tn}^2 u} = \frac{1}{\operatorname{sn}^2 u},$$

$$\mathrm{dn}\, u = \sqrt{(1-k^2\mathrm{sn}^2 u)} = \sqrt{(k'^2+k^2\mathrm{cn}^2 u)} = \sqrt{(\mathrm{cn}^2 u + k'^2\mathrm{sn}^2 u)},$$

$$\mathrm{dn}\, u = \sqrt{\frac{1+k'^2\,\mathrm{tn}^2 u}{1+\mathrm{tn}^2 u}},$$

$$\mathrm{tn}\, u = \sqrt{\frac{1-\mathrm{dn}^2 u}{\mathrm{dn}^2 u - k'^2}}.$$

Dem §. 4. gemäfs ist

$$\mathrm{sn}(-u) = -\mathrm{sn}\, u,$$

also

$$\mathrm{cn}(-u) = \mathrm{cn}\, u, \quad \mathrm{tn}(-u) = -\mathrm{tn}\, u, \quad \mathrm{dn}(-u) = \mathrm{dn}\, u.$$

Wird das Argument $u=0$ gesetzt, so ist

$$\mathrm{sn}\,0 = 0, \quad \mathrm{cn}\,0 = 1, \quad \mathrm{tn}\,0 = 0, \quad \mathrm{dn}\,0 = 1.$$

Nach §. 6. ist $\mathrm{sn}\, u$ zwischen den Grenzen $\sin u$ und $\sin lu$ enthalten, und da $lu < u$, also auch $\sin lu < \sin u$ ist, so ist immer

$\sin u > \mathrm{sn}\, u > \sin lu$, also $\cos u < \mathrm{cn}\, u < \cos lu$, $\mathrm{tang}\, u > \mathrm{tn}\, u > \mathrm{tang}\, lu$. Wird also das Argument u nicht verändert, der Modul k dagegen vergröfsert, so verkleinert sich $\mathrm{sn}\, u$ und $\mathrm{tn}\, u$, aber $\mathrm{cn}\, u$ vergröfsert sich, wie auch $\mathrm{dn}\, u$.

§. 8.

Erste Differenziale der cyklischen Modular-Functionen.

Wenn wir in der Formel $\partial u = \frac{\partial t}{\sqrt{(1-t^2)}\sqrt{(1-k^2t^2)}}$ für t den Werth $\mathrm{sn}\, u$ an die Stelle setzen, so haben wir $\partial u = \frac{\partial\,\mathrm{sn}\, u}{\mathrm{cn}\, u\;\mathrm{dn}\, u}$, oder auch

$$1. \quad \partial\,\mathrm{sn}\, u = \mathrm{cn}\, u\,\mathrm{dn}\, u.\partial u.$$

Differenziiren wir die Gleichung $\mathrm{sn}^2 u + \mathrm{cn}^2 u = 1$, so entsteht $\mathrm{sn}\, u\,\partial\,\mathrm{sn}\, u + \mathrm{cn}\, u\,\partial\,\mathrm{cn}\, u = 0$, und wird für $\partial\,\mathrm{sn}\, u$ der vorher gefundene Werth substituirt, so entsteht sofort die Formel

$$2. \quad \partial\,\mathrm{cn}\, u = -\mathrm{sn}\, u\;\mathrm{dn}\, u.\partial u.$$

Da $\mathrm{tn}\, u = \frac{\mathrm{sn}\, u}{\mathrm{cn}\, u}$ ist, so ist $\partial\,\mathrm{tn}\, u = \frac{\mathrm{dn}\, u\,(\mathrm{cn}^2 u + \mathrm{sn}^2 u).\partial u}{\mathrm{cn}^2 u}$, oder auch

$$3. \quad \partial\,\mathrm{tn}\, u = \frac{\mathrm{dn}\, u}{\mathrm{cn}^2 u}.\partial u.$$

Aus $\mathrm{dn}^2 u = 1 - k^2\mathrm{sn}^2 u$ folgt $\mathrm{dn}\, u.\partial\,\mathrm{dn}\, u = -k^2\mathrm{sn}\, u.\partial\,\mathrm{sn}\, u$ und also

$$4. \quad \partial\,\mathrm{dn}\, u = -k^2\mathrm{sn}\, u\;\mathrm{cn}\, u.\partial u$$

Bei einer vorzunehmenden Umkehrung der Relation zwischen einer cyklischen Modular-Function und ihrem Argumente dient die folgende Bezeichnung:

Ist $t = \text{sn}\,u$, so ist umgekehrt $u = \arg\text{sn}(t)$.
Ist $t = \text{cn}\,u$, so ist umgekehrt $u = \arg\text{cn}(t)$.
Ist $t = \text{tn}\,u$, so ist umgekehrt $u = \arg\text{tn}(t)$.
Ist $t = \text{dn}\,u$, so ist umgekehrt $u = \arg\text{dn}(t)$.

Wenden wir diese Bezeichnung an, und kehren wir die vorhin erhaltenen Differenzial-Formeln um, so haben wir:

$$5. \quad \arg\text{sn}(t) = \int_0 \frac{\partial t}{\sqrt{(1-t^2)}.\sqrt{(1-k^2t^2)}} = \int_0 \frac{\partial t}{\sqrt{[1-(1+k^2)t^2+k^2t^4]}},$$

$$6. \quad \arg\text{cn}(t) = \int_1 \frac{-\partial t}{\sqrt{(1-t^2)}.\sqrt{(k'^2+k^2t^2)}} = \int_1 \frac{-\partial t}{\sqrt{[k'^2+(k^2-k'^2)t^2-k^2t^4]}},$$

$$7. \quad \arg\text{tn}(t) = \int_0 \frac{\partial t}{\sqrt{(1+t^2)}.\sqrt{(1+k'^2t^2)}} = \int_0 \frac{\partial t}{\sqrt{[1+(1+k'^2)t^2+k'^2t^4]}},$$

$$8. \quad \arg\text{dn}(t) = \int_1 \frac{-\partial t}{\sqrt{(t^2-k'^2)}.\sqrt{(1-t^2)}} = \int_1 \frac{-\partial t}{\sqrt{[-k'^2+(1+k'^2)t^2-t^4)}},$$

§. 9.

Die Amplitude der cyklischen Modular-Functionen.

Obgleich die cyklischen Modular-Functionen verschieden sind von den cyklischen Potenzial-Functionen, so können sie dennoch leicht auf diese zurückgeführt werden in Anwendung einer vermittelnden Function; da nämlich $\text{sn}\,u$ zwischen den Grenzen $\sin u$ und $\sin lu$ enthalten ist, so können wir $\text{sn}\,u = \sin\varphi$ setzen, woraus folgt $\text{cn}\,u = \cos\varphi$ und $\text{tn}\,u = \text{tang}\,\varphi$. Den durch diese einfachen Gleichungen bestimmten Arcus φ nennen wir die *Amplitude des Argumentes* u *für den Modul* k, oder in Zeichen

$$\varphi = \text{am}\,u \quad \text{und umgekehrt} \quad u = \arg\text{am}(\varphi).$$

Hiernach ist also

$$1. \quad \begin{cases} \text{sn}\,u = \sin\text{am}\,u, & \text{tn}\,u = \text{tang}\,\text{am}\,u, \\ \text{cn}\,u = \cos\text{am}\,u, & \text{dn}\,u = \sqrt{(1-k^2\sin^2\text{am}\,u)}. \end{cases}$$

Weil bekanntlich $\varphi = \frac{1}{i}\log\sqrt{\left(\frac{1+i\,\text{tang}\,\varphi}{1-i\,\text{tang}\,\varphi}\right)}$ ist, so ist also auch

$$2. \quad \text{am}\,u = \frac{1}{i}\log\sqrt{\left(\frac{1+i\,\text{tn}\,u}{1-i\,\text{tn}\,u}\right)}.$$

Da nach Theil I. §. 38. ist $\mathfrak{L}\varphi = \mathfrak{Arc\,Tang}(\sin\varphi) = \log\sqrt{\left(\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}\right)}$ $= \log\frac{\cos\varphi}{1-\sin\varphi} = \log\frac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi} = \log\frac{1+\text{tang}\,\frac{1}{2}\varphi}{1-\text{tang}\,\frac{1}{2}\varphi} = \log\text{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\varphi\right)$, so ist auch

$$3. \quad \mathfrak{L}\,\text{am}\,u = \mathfrak{Arc\,Tang}(\text{sn}\,u) = \log\sqrt{\left(\frac{1+\text{sn}\,u}{1-\text{sn}\,u}\right)} = \log\frac{\text{cn}\,u}{1-\text{sn}\,u} = \log\frac{1+\text{sn}\,u}{\text{cn}\,u}$$
$$= \log\text{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\text{am}\,u\right).$$

Die Formel $\tang\frac{1}{2}\varphi = \sqrt{\left(\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}\right)}$ verwandelt sich in

$$4.\quad \tang\tfrac{1}{2}\,\mathrm{am}\,u = \sqrt{\left(\frac{1-\mathrm{cn}\,u}{1+\mathrm{cn}\,u}\right)} = \frac{1-\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{sn}\,u} = \frac{\mathrm{sn}\,u}{1+\mathrm{cn}\,u}.$$

Die Formel $u = \int_0 \frac{\partial t}{\sqrt{(1-t^2)}\sqrt{(1-k^2t^2)}}$ verwandelt sich, wenn $t = \sin\varphi$ gesetzt wird, also $\partial t = \cos\varphi.\partial\varphi$, in

$$5.\quad \arg\mathrm{am}(\varphi) = \int_0 \frac{\partial\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}} = \int_0 \frac{\partial\varphi}{\sqrt{(\cos^2\varphi + k'^2\sin^2\varphi)}}$$
$$= \int_0 \frac{\partial\varphi}{\sqrt{(k'^2 + k^2\cos^2\varphi)}}.$$

Da $\sin^2\varphi = \frac{1-\cos 2\varphi}{2}$ ist, so ist $\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)} = \sqrt{\left(\frac{2-k^2+k^2\cos 2\varphi}{2}\right)}$. Setzt man nun

$$k = \frac{2\sqrt{\lambda}}{1+\lambda},\quad \text{also}\quad k^2 = \frac{4\lambda}{(1+\lambda)^2}\quad \text{und}\quad 2-k^2 = \frac{2(1+\lambda^2)}{(1+\lambda)^2},$$

so ist $\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)} = \frac{\sqrt{(1+2\lambda\cos 2\varphi+\lambda^2)}}{1+\lambda}$, und also auch

$$6.\quad \arg\mathrm{am}(\varphi) = \int_0 \frac{(1+\lambda).\partial\varphi}{\sqrt{(1+2\lambda\cos 2\varphi+\lambda^2)}} = \int_0 \frac{(1+\lambda).\partial\varphi}{\sqrt{[(1+\lambda e^{2\varphi i})(1+\lambda e^{-2\varphi i})]}}.$$

Die in dieser Formel vorkommende Constante λ hängt den Formeln

$$k = \frac{2\sqrt{\lambda}}{1+\lambda},\quad k' = \frac{1-\lambda}{1+\lambda},\quad \lambda = \frac{1-k'}{1+k'},\quad \sqrt{(1-\lambda^2)} = \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}$$

gemäfs von dem Modul k ab. Es ist auch $\lambda = \left(\frac{\sqrt{(1+k)}-\sqrt{(1-k)}}{\sqrt{(1+k)}+\sqrt{(1-k)}}\right)^2$.

Differenziirt man die Gleichung $\sin\mathrm{am}\,u = \mathrm{sn}\,u$, so entsteht $\cos\mathrm{am}\,u.\partial\,\mathrm{am}\,u = \mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u\,\partial u$, und da $\cos\mathrm{am}\,u = \mathrm{cn}\,u$ ist, so hat man:

$$7.\quad \partial\,\mathrm{am}\,u = \mathrm{dn}\,u.\partial u.$$

Da $\sin\mathrm{am}\,u$ zwischen den Grenzen $\sin u$ und $\sin lu$ enthalten ist, so ist auch $\mathrm{am}\,u$ zwischen den Grenzen u und lu enthalten, und da nach Theil I. §. 48. ist $lu < u$, so ist also

$$8.\quad u > \mathrm{am}\,u > lu.$$

Läfst man also das Argument u ungeändert und vergröfsert man den Modul k, so nähert sich $\mathrm{am}\,u$ der Grenze lu und wird also kleiner.

Setzt man in der Formel (5.) zuerst $k=0$, so hat man $\arg\mathrm{am}(\varphi) = \int_0 \partial\varphi = \varphi$; setzt man aber $k=1$, so hat man $\arg\mathrm{am}(\varphi) = \int_0 \frac{\partial\varphi}{\cos\varphi} = \mathfrak{L}\varphi$, nach Theil I. §. 46.; wenn also k zwischen den Grenzen 0 und 1 enthalten ist, so ist $\arg\mathrm{am}(\varphi)$ zwischen den Grenzen φ und $\mathfrak{L}\varphi$ enthal-

ten, und weil $\mathfrak{L}\phi > \phi$ nach Theil I. §. 48. ist, so ist also

$$9. \quad \phi < \arg \operatorname{am}(\phi) < \mathfrak{L}\phi.$$

Läſst man also die Amplitude ungeändert und vergröſsert man den Modul k, so nähert sich $\arg \operatorname{am}(\phi)$ der Grenze $\mathfrak{L}\phi$, und wird also ebenfalls gröſser.

§. 10.

Die beiden conjugirten Modular-Quadranten.

Der Modular-Sinus $\operatorname{sn} u$ wächst mit dem Argumente u zugleich von Null an, aber nur bis zu einer gewissen Grenze; er ist dann $=1$, und wird das Argument u noch vergröſsert, so verkleinert sich sein Modular-Sinus wieder. Der kleinste Werth des Argumentes u, dessen Modular-Sinus $=1$ ist, heiſse der dem Modul k zugehörige *Modular-Quadrant*, und werde durch K bezeichnet. Es ist also

$$\operatorname{sn} K = 1, \quad \operatorname{cn} K = 0, \quad \operatorname{tn} K = \tfrac{1}{0}, \quad \operatorname{dn} K = \sqrt{(1-k^2)} = k' \quad \text{und}$$

$$\operatorname{am} K = \frac{\pi}{2}, \quad \text{oder} \quad \arg \operatorname{am}\left(\frac{\pi}{2}\right) = K.$$

Hiernach ist also

$$K = \int_0^1 \frac{\partial t}{\sqrt{(1-t^2)}\sqrt{(1-k^2 t^2)}}, \quad \text{oder} \quad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial \varphi}{\sqrt{(1-k^2 \sin^2 \varphi)}}.$$

Der Modular-Quadrant ist also eine Function des Moduls, und hängt von keiner zweiten Gröſse ab. Da nach §. 9. ist $\phi < \arg \operatorname{am}(\phi) < \mathfrak{L}\phi$, so ist also auch, wenn $\phi = \frac{\pi}{2}$ gesetzt wird,

$$\frac{\pi}{2} < K < \mathfrak{L}\frac{\pi}{2}.$$

Es ist bekanntlich $\mathfrak{L}\frac{\pi}{2}$ unendlich, der Modular-Quadrant K wächst also ohne Ende mit seinem Modul k, und ist unendlich groſs, wenn der Modul $k=1$ ist; der kleinste Werth des Modular-Quadranten ist nicht Null, sondern $\frac{\pi}{2}$, oder der cyklische Quadrant; hiernach ist also immer $\frac{\pi}{2K}$ ein ächter Bruch, welcher beim Wachsen des Moduls k von Eins an ohne Ende abnimmt und $=0$ ist, wenn $k=1$ wird.

Zum conjugirten Modul k' gehört auch ein Modular-Quadrant K', welcher eben so von k' abhängt, wie K vom Modul k, und die beiden Quadranten K und K' nennen wir *conjugirte* Quadranten. Der Quadrant K' ist gröſser als K, wenn der Modul k' gröſser als k ist. Es ist überhaupt, wenn wir wieder $\frac{k}{k'} = \operatorname{tang}\theta$ setzen,

$$\frac{K}{K'} = 0 \quad \text{für} \quad \frac{k}{k'} = 0, \quad \text{oder} \quad \theta = 0,$$
$$\frac{K}{K'} < 1 \quad \text{für} \quad \frac{k}{k'} < 1, \quad \text{oder} \quad \theta < 45^0,$$
$$\frac{K}{K'} = 1 \quad \text{für} \quad \frac{k}{k'} = 1, \quad \text{oder} \quad \theta = 45^0,$$
$$\frac{K}{K'} > 1 \quad \text{für} \quad \frac{k}{k'} > 1, \quad \text{oder} \quad \theta > 45^0,$$
$$\frac{K}{K'} = \frac{1}{0} \quad \text{für} \quad \frac{k}{k'} = \frac{1}{0}, \quad \text{oder} \quad \theta = 90^0.$$

Setzen wir $\frac{\pi}{2K} = \eta$ und $\frac{\pi}{2K'} = \eta'$, so ist $\frac{\pi}{2} = \eta K = \eta' K'$; die Gröfsen η und η' nennen wir die beiden *einfachen Quadranten-Verhältnisse*, und da $\frac{K}{K'} = \frac{\eta'}{\eta}$ ist, so nennen wir $\frac{K}{K'}$ das dem Modul k zugehörige *zusammengesetzte Quadranten-Verhältnifs.*

§. 11.

Ausdrücke für die cyklischen Modular-Functionen eines Binoms.

Nach §. 6. hat man in den Formeln des §. 4. und §. 5. nur $p = -1$ und $q = -k^2$ zu setzen, wenn x, y, z Modular-Sinus dreier Argumente a, b, $a+b$ vorstellen sollen, wovon die beiden ersten so grofs sind, als das dritte allein. Hiernach erhalten wir also die Formeln

$$1. \quad \begin{cases} \operatorname{sn}(a+b) = \dfrac{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} b \operatorname{dn} b + \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 b}, \\ \operatorname{sn}(a-b) = \dfrac{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} b \operatorname{dn} b - \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 b}, \end{cases}$$

wovon die zweite auch sogleich aus der ersten hergeleitet werden kann, indem man nur $-b$ für b setzt. Für die Modular-Cosinus erhält man eben so

$$2. \quad \begin{cases} \operatorname{cn}(a+b) = \dfrac{\operatorname{cn} a \operatorname{cn} b - \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{dn} a \operatorname{dn} b}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 b}, \\ \operatorname{cn}(a-b) = \dfrac{\operatorname{cn} a \operatorname{cn} b + \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{dn} a \operatorname{dn} b}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 b}. \end{cases}$$

Man kann jene und diese Formeln auch also darstellen

$$\operatorname{sn}(a \pm b) = \frac{\operatorname{cn} a \operatorname{cn} b (\operatorname{tn} a \operatorname{dn} b \pm \operatorname{tn} b \operatorname{dn} a)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 b},$$
$$\operatorname{cn}(a \pm b) = \frac{\operatorname{cn} a \operatorname{cn} b (1 \mp \operatorname{tn} a \operatorname{dn} b \operatorname{tn} b \operatorname{dn} a)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 b},$$

und erhält hieraus durch Division:

$$3. \quad \begin{cases} \operatorname{tn}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tn} a \operatorname{dn} b + \operatorname{tn} b \operatorname{dn} a}{1 - \operatorname{tn} a \operatorname{dn} b \,.\, \operatorname{tn} b \operatorname{dn} a}, \\[2ex] \operatorname{tn}(a-b) = \dfrac{\operatorname{tn} a \operatorname{dn} b - \operatorname{tn} b \operatorname{dn} a}{1 + \operatorname{tn} a \operatorname{dn} b \,.\, \operatorname{tn} b \operatorname{dn} a}. \end{cases}$$

Für die Differenten hat man die Formeln

$$4. \quad \begin{cases} \operatorname{dn}(a+b) = \dfrac{\operatorname{dn} a \operatorname{dn} b - k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a \operatorname{cn} b}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 b}, \\[2ex] \operatorname{dn}(a-b) = \dfrac{\operatorname{dn} a \operatorname{dn} b + k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a \operatorname{cn} b}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 b}. \end{cases}$$

Auf ähnliche Art oder auch durch Zusammensetzung aus den vorstehenden erhält man

$$5. \quad \begin{cases} \operatorname{sn}(a+b) = \dfrac{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} b + \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a \operatorname{dn}(a+b)}{\operatorname{dn} b} = \dfrac{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} b \operatorname{dn}(a+b) + \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a}{\operatorname{dn} a}, \\[2ex] \operatorname{sn}(a-b) = \dfrac{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} b - \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a \operatorname{dn}(a-b)}{\operatorname{dn} b} = \dfrac{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} b \operatorname{dn}(a-b) - \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a}{\operatorname{dn} a}; \end{cases}$$

$$6. \quad \begin{cases} \operatorname{sn}(a+b) = \dfrac{\operatorname{sn} a \operatorname{dn} b + \operatorname{sn} b \operatorname{dn} a \operatorname{cn}(a+b)}{\operatorname{cn} b} = \dfrac{\operatorname{sn} a \operatorname{dn} b \operatorname{cn}(a+b) + \operatorname{sn} b \operatorname{dn} a}{\operatorname{cn} a}, \\[2ex] \operatorname{sn}(a-b) = \dfrac{\operatorname{sn} a \operatorname{dn} a - \operatorname{sn} b \operatorname{dn} a \operatorname{cn}(a-b)}{\operatorname{cn} b} = \dfrac{\operatorname{sn} a \operatorname{dn} b \operatorname{cn}(a-b) - \operatorname{sn} b \operatorname{dn} a}{\operatorname{cn} a}; \end{cases}$$

$$7. \quad \begin{cases} \operatorname{cn}(a+b) = \operatorname{cn} a \operatorname{cn} b - \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{dn}(a+b), \\ \operatorname{cn}(a-b) = \operatorname{cn} a \operatorname{cn} b + \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{dn}(a-b); \end{cases}$$

$$8. \quad \begin{cases} \operatorname{dn}(a+b) = \operatorname{dn} a \operatorname{dn} b - k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{cn}(a+b), \\ \operatorname{dn}(a-b) = \operatorname{dn} a \operatorname{dn} b + k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{cn}(a-b); \end{cases}$$

$$9. \quad \begin{cases} \operatorname{dn}(a+b) = \dfrac{\operatorname{dn} a - k^2 \operatorname{cn} a \operatorname{sn} b \operatorname{sn}(a+b)}{\operatorname{dn} b} = \dfrac{\operatorname{dn} b - k^2 \operatorname{cn} b \operatorname{sn} a \operatorname{sn}(a+b)}{\operatorname{dn} a}, \\[2ex] \operatorname{dn}(a-b) = \dfrac{\operatorname{dn} a + k^2 \operatorname{cn} a \operatorname{sn} b \operatorname{sn}(a-b)}{\operatorname{dn} b} = \dfrac{\operatorname{dn} b - k^2 \operatorname{cn} b \operatorname{sn} a \operatorname{sn}(a-b)}{\operatorname{dn} a}; \end{cases}$$

$$10. \quad \begin{cases} \operatorname{cn}(a+b) = \dfrac{\operatorname{cn} a - \operatorname{dn} a \operatorname{sn} b \operatorname{sn}(a+b)}{\operatorname{cn} b} = \dfrac{\operatorname{cn} b - \operatorname{dn} b \operatorname{sn} a \operatorname{sn}(a+b)}{\operatorname{cn} a}, \\[2ex] \operatorname{cn}(a-b) = \dfrac{\operatorname{cn} a + \operatorname{dn} a \operatorname{sn} b \operatorname{sn}(a-b)}{\operatorname{cn} b} = \dfrac{\operatorname{cn} b - \operatorname{dn} b \operatorname{sn} a \operatorname{sn}(a-b)}{\operatorname{cn} a}. \end{cases}$$

Zu diesen Formeln fügen wir noch

$$11. \quad \begin{cases} \operatorname{cn} a \operatorname{cn} b \operatorname{dn}(a+b) - \operatorname{dn} a \operatorname{dn} b \operatorname{cn}(a+b) = k'^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b, \\ \operatorname{dn} a \operatorname{dn} b \operatorname{cn}(a-b) - \operatorname{cn} a \operatorname{cn} b \operatorname{dn}(a-b) = k'^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b. \end{cases}$$

$$12. \quad \begin{cases} \operatorname{dn} a \operatorname{dn} b \operatorname{dn}(a+b) - k^2 \operatorname{cn} a \operatorname{cn} b \operatorname{cn}(a+b) = k'^2, \\ \operatorname{dn} a \operatorname{dn} b \operatorname{dn}(a-b) - k^2 \operatorname{cn} a \operatorname{cn} b \operatorname{cn}(a-b) = k'^2. \end{cases}$$

Die Formeln (1.) bis (4.) können und müssen auch noch in anderen Formen dargestellt werden, welche weiter unten werden hergeleitet werden.

§. 12.

Ausdruck für die cyklische Amplitude eines Binoms.

Setzt man in den Formeln (3.) $\operatorname{tn} a \operatorname{dn} b = \operatorname{tang} \alpha$ und $\operatorname{tn} b \operatorname{dn} a = \operatorname{tang} \beta$, so erhält man $\operatorname{tn}(a+b) = \frac{\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\beta}{1 - \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\beta}$, oder $\operatorname{tn}(a+b) = \operatorname{tang}(\alpha+\beta)$, und da $\operatorname{tn}(a+b) = \operatorname{tang} \operatorname{am}(a+b)$ ist, so ist also $\operatorname{tang} \operatorname{am}(a+b) = \operatorname{tang}(\alpha+\beta)$ oder einfacher $\operatorname{am}(a+b) = \alpha+\beta$. Eben so findet man $\operatorname{am}(a-b) = \alpha - \beta$, und da $\alpha = \operatorname{arc\,tang}(\operatorname{tn} a \operatorname{dn} b)$, ferner $\beta = \operatorname{arc\,tang}(\operatorname{tn} b \operatorname{dn} a)$ ist, so hat man die Formeln

$$13. \quad \begin{cases} \operatorname{am}(a+b) = \operatorname{arc\,tang}(\operatorname{tn} a \operatorname{dn} b) + \operatorname{arc\,tang}(\operatorname{tn} b \operatorname{dn} a) \text{ und} \\ \operatorname{am}(a-b) = \operatorname{arc\,tang}(\operatorname{tn} a \operatorname{dn} b) - \operatorname{arc\,tang}(\operatorname{tn} b \operatorname{dn} a) \end{cases}$$

Da $\frac{\operatorname{am}(a+b) + \operatorname{am}(a-b)}{2} = \alpha$ und $\frac{\operatorname{am}(a+b) - \operatorname{am}(a-b)}{2} = \beta$ ist, so hat man noch

$$14. \quad \begin{cases} \operatorname{tn} a \operatorname{dn} b = \operatorname{tang}\left[\frac{\operatorname{am}(a+b) + \operatorname{am}(a-b)}{2}\right] \text{ und} \\ \operatorname{tn} b \operatorname{dn} a = \operatorname{tang}\left[\frac{\operatorname{am}(a+b) - \operatorname{am}(a-b)}{2}\right]. \end{cases}$$

Setzt man $b = a$, so erhält man noch die specielle Formel

$$\operatorname{tn} a \operatorname{dn} a = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \operatorname{am} 2a.$$

Aus der Formel $\operatorname{tang}\alpha = \operatorname{tn} a \operatorname{dn} b = \frac{\operatorname{sn} a \operatorname{dn} b}{\operatorname{cn} a}$ folgt $\sin\alpha = \frac{\operatorname{sn} a \operatorname{dn} b}{\sqrt{(\operatorname{cn}^2 a + \operatorname{sn}^2 a \operatorname{dn}^2 b)}}$ und $\cos\alpha = \frac{\operatorname{cn} a}{\sqrt{(\operatorname{cn}^2 a + \operatorname{sn}^2 a \operatorname{dn}^2 b)}}$; da aber $\operatorname{cn}^2 a = 1 - \operatorname{sn}^2 a$ und $\operatorname{dn}^2 b = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 b$ ist, so reducirt sich der Ausdruck $\operatorname{cn}^2 a + \operatorname{sn}^2 a \operatorname{dn}^2 b$ auf $1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 b$ und es ist also

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{sn} a \operatorname{dn} b}{\sqrt{(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 b)}}, \qquad \cos\alpha = \frac{\operatorname{cn} a}{\sqrt{(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 b)}}.$$

Ganz eben so, oder durch bloſse Vertauschung der Buchstaben a und b erhält man

$$\sin\beta = \frac{\operatorname{sn} b \operatorname{dn} a}{\sqrt{(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 b)}}, \qquad \cos\beta = \frac{\operatorname{cn} b}{\sqrt{(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 b)}}.$$

Die zweite der Formeln (13.) giebt, wenn $b = a$ gesetzt wird,

$$\operatorname{am} 0 = 0.$$

Ferner erhält man $\operatorname{am}(a-b) = -\operatorname{am}(b-a)$, oder, wenn man $a - b = u$ setzt,

$$\operatorname{am}(-u) = -\operatorname{am} u.$$

§. 13.

Die cyklischen Modular-Functionen und die Amplitude des Complements. Zweite Art von Formeln für die Functionen eines Binoms.

Setzt man in den Formeln für $\operatorname{sn}(a-b)$, $\operatorname{cn}(a-b)$, $\operatorname{tn}(a-b)$ und $\operatorname{dn}(a-b)$ des §. 11. das Argument $a=K$ und $b=u$, so erhält man, weil nun $\operatorname{sn}a=1$, $\operatorname{cn}a=0$ und $\operatorname{dn}a=k'$ ist, auf der Stelle die Ausdrücke

$$15.\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(K-u)=\dfrac{\operatorname{cn}u}{\operatorname{dn}u}, & \operatorname{tn}(K-u)=\dfrac{1}{k'\operatorname{tn}u}, \\ \operatorname{cn}(K-u)=\dfrac{k'\operatorname{sn}u}{\operatorname{dn}u}, & \operatorname{dn}(K-u)=\dfrac{k'}{\operatorname{dn}u}, \end{cases}$$

welche so häufig zur Anwendung kommen, daſs sie sich fast von selbst dem Gedächtnisse einprägen werden. Die Formel für $\operatorname{am}(a-b)$ im §. 12. giebt, da $\operatorname{arc\,tang}(\operatorname{tn}a\operatorname{dn}b)$ nun $\frac{\pi}{2}$ ist,

$$16.\quad \begin{cases} \operatorname{am}(K-u)=\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tang}(k'\operatorname{tn}u), \quad \text{oder} \\ \operatorname{am}(K-u)=\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,sin}\left(\dfrac{k'\operatorname{sn}u}{\operatorname{dn}u}\right) \quad \text{oder} \\ \operatorname{am}(K-u)=\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,cos}\left(\dfrac{\operatorname{cn}u}{\operatorname{dn}u}\right). \end{cases}$$

Das Argument $K-u$ nennen wir das *Complement* des Arcus u, und wegen des häufigen Gebrauches der Functionen des Complementes führen wir die folgende abkürzende Bezeichnung ein:

$$\begin{aligned} \operatorname{amc}u &= \operatorname{am}(K-u), \\ \operatorname{snc}u &= \sin\operatorname{amc}u = \operatorname{sn}(K-u), \\ \operatorname{cnc}u &= \cos\operatorname{amc}u = \operatorname{cn}(K-u), \\ \operatorname{tnc}u &= \operatorname{tang}\operatorname{amc}u = \operatorname{tn}(K-u), \\ \operatorname{dnc}u &= \operatorname{dn}(K-u). \end{aligned}$$

Da nun auch u das Complement von $K-u$ ist, so ist

$$17.\quad \begin{cases} \operatorname{snc}u=\dfrac{\operatorname{cn}u}{\operatorname{dn}u}, & \operatorname{sn}u=\dfrac{\operatorname{cnc}u}{\operatorname{dnc}u}, & \text{folglich} \quad \operatorname{snc}(-u)=\operatorname{snc}u, \\ \operatorname{cnc}u=\dfrac{k'\operatorname{sn}u}{\operatorname{dn}u}, & \operatorname{cn}u=\dfrac{k'\operatorname{snc}u}{\operatorname{dnc}u}, & \text{folglich} \quad \operatorname{cnc}(-u)=-\operatorname{cnc}u, \\ \operatorname{tnc}u=\dfrac{1}{k'\operatorname{tn}u}, & \operatorname{tn}u=\dfrac{1}{k'\operatorname{tnc}u}, & \text{folglich} \quad \operatorname{tnc}(-u)=-\operatorname{tnc}u, \\ \operatorname{dnc}u=\dfrac{k'}{\operatorname{dn}u}, & \operatorname{dn}u=\dfrac{k'}{\operatorname{dnc}u}, & \text{folglich} \quad \operatorname{dnc}(-u)=\operatorname{dnc}u, \end{cases}$$

woraus wir noch zusammensetzen $\operatorname{tnc}u\operatorname{dnc}u=\frac{1}{\operatorname{tn}u\operatorname{dn}u}$. Wir machen von den vorstehenden Formeln schon jetzt Gebrauch. Setzt man in der Formel

$\mathrm{sn}(a-b)=\frac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,b\,\mathrm{dn}\,b-\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b}$ für a an die Stelle $K-a$, so verwandelt sich $a-b$ in $K-(a+b)$, und es ist also zunächst $\mathrm{snc}(a+b)$ $=\frac{\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{cn}\,b\,\mathrm{dn}\,b-\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cnc}\,a\,\mathrm{dnc}\,a}{1-k^2\,\mathrm{snc}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b}$. Der Zähler dieses Bruches ist einerlei mit $\frac{\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cn}\,b\,\mathrm{dn}\,b}{\mathrm{dn}\,a}-\frac{k'^2\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{sn}\,a}{\mathrm{dn}^2 a}$, und der Nenner ist einerlei mit $\frac{\mathrm{dn}^2 a-k^2\,\mathrm{cn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b}{\mathrm{dn}^2 a}$ $=\frac{\mathrm{dn}^2 a\,\mathrm{dn}^2 b+k^2 k'^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b}{\mathrm{dn}^2 a}$, folglich ist

$$18.\quad \begin{cases} \mathrm{snc}(a+b)=\dfrac{\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{cn}\,b\,\mathrm{dn}\,b-k'^2\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{sn}\,a}{\mathrm{dn}^2 a\,\mathrm{dn}^2 b+k^2 k'^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b}, \\ \mathrm{snc}(a-b)=\dfrac{\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{cn}\,b\,\mathrm{dn}\,b+k'^2\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{sn}\,a}{\mathrm{dn}^2 a\,\mathrm{dn}^2 b+k^2 k'^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b}. \end{cases}$$

Für die Cosinus hat man die Formel $\mathrm{cnc}(a+b)=\frac{\mathrm{cnc}\,a\,\mathrm{cn}\,b+\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{dnc}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,b}{1-k^2\,\mathrm{snc}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b}$; der Zähler dieses Bruches reducirt sich auf $\frac{k'(\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{cn}\,b+\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,b)}{\mathrm{dn}^2 a}$, folglich ist

$$19.\quad \begin{cases} \mathrm{cnc}(a+b)=k'.\dfrac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{cn}\,b+\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,b\,\mathrm{cn}\,a}{\mathrm{dn}^2 a\,\mathrm{dn}^2 b+k^2 k'^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b} \quad \text{und} \\ \mathrm{cnc}(a-b)=k'.\dfrac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{cn}\,b-\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,b\,\mathrm{cn}\,a}{\mathrm{dn}^2 a\,\mathrm{dn}^2 b+k^2 k'^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b}. \end{cases}$$

Aus diesen und den vorigen Formeln erhält man durch Division

$$20.\quad \begin{cases} \mathrm{tn}\,c(a+b)=\dfrac{\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{cn}\,b\,\mathrm{dn}\,b-k'^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b}{k'(\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{cn}\,b+\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,b\,\mathrm{cn}\,a)}, \\ \mathrm{tn}\,c(a-b)=\dfrac{\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{cn}\,b\,\mathrm{dn}\,b+k'^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b}{k'(\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{cn}\,b-\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,b\,\mathrm{cn}\,a)}. \end{cases}$$

Für die Differenten haben wir zunächst

$$\mathrm{dnc}(a+b)=\frac{\mathrm{dnc}\,a\,\mathrm{dn}\,b+k^2\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{cnc}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cn}\,b}{1-k^2\,\mathrm{snc}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b},$$

und da sich der Zähler reducirt auf $\frac{k'(\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,b+k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cn}\,b)}{\mathrm{dn}^2 a}$, so erhält man

$$21.\quad \begin{cases} \mathrm{dnc}(a+b)=\dfrac{k'(\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,b+k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cn}\,b)}{\mathrm{dn}^2 a\,\mathrm{dn}^2 b+k^2 k'^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b}, \\ \mathrm{dnc}(a-b)=\dfrac{k'(\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,b-k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cn}\,b)}{\mathrm{dn}^2 a\,\mathrm{dn}^2 b+k^2 k'^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b}. \end{cases}$$

Da $\mathrm{sn}\,u=\frac{\mathrm{cnc}\,u}{\mathrm{dnc}\,u}$ ist, so erhalten wir noch, indem wir $a+b$ für u setzen und die gefundenen Ausdrücke substituiren,

$$22.\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(a+b) = \dfrac{\operatorname{sn} a \operatorname{dn} a \operatorname{cn} b + \operatorname{sn} b \operatorname{dn} b \operatorname{cn} a}{\operatorname{dn} a \operatorname{dn} b + k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a \operatorname{cn} b} = \dfrac{\operatorname{sn} a \operatorname{snc} b + \operatorname{sn} b \operatorname{snc} a}{1 + k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{snc} a \operatorname{snc} b}, \\ \operatorname{sn}(a-b) = \dfrac{\operatorname{sn} a \operatorname{dn} a \operatorname{cn} b - \operatorname{sn} b \operatorname{dn} b \operatorname{cn} a}{\operatorname{dn} a \operatorname{dn} b - k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a \operatorname{cn} b} = \dfrac{\operatorname{sn} a \operatorname{snc} b - \operatorname{sn} b \operatorname{snc} a}{1 - k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{snc} a \operatorname{snc} b}, \end{cases}$$

Da $\operatorname{cn}(a+b) = \dfrac{k' \operatorname{snc}(a+b)}{\operatorname{dnc}(a+b)}$ ist, so erhalten wir

$$23.\quad \begin{cases} \operatorname{cn}(a+b) = \dfrac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{cn} b \operatorname{dn} b - k'^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b}{\operatorname{dn} a \operatorname{dn} b + k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{sn} b \operatorname{cn} b} = \dfrac{\operatorname{cn} a \operatorname{cn} b - \operatorname{cnc} a \operatorname{cnc} b}{1 + \frac{k^2}{k'^2} \operatorname{cn} a \operatorname{cn} b \operatorname{cnc} a \operatorname{cnc} b}, \\ \operatorname{cn}(a-b) = \dfrac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{cn} b \operatorname{dn} b + k'^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b}{\operatorname{dn} a \operatorname{dn} b - k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{sn} b \operatorname{cn} b} = \dfrac{\operatorname{cn} a \operatorname{cn} b + \operatorname{cnc} a \operatorname{cnc} b}{1 - \frac{k^2}{k'^2} \operatorname{cn} a \operatorname{cn} b \operatorname{cnc} a \operatorname{cnc} b}. \end{cases}$$

Weiter ist für die Tangenten

$$24.\quad \begin{cases} \operatorname{tn}(a+b) = \dfrac{\operatorname{sn} a \operatorname{dn} a \operatorname{cn} b + \operatorname{sn} b \operatorname{dn} b \operatorname{cn} a}{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{cn} b \operatorname{dn} b - k'^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b} = \dfrac{\operatorname{tn} a \operatorname{dn} a + \operatorname{tn} b \operatorname{dn} b}{\operatorname{dn} a \operatorname{dn} b - k'^2 \operatorname{tn} a \operatorname{tn} b}, \\ \operatorname{tn}(a-b) = \dfrac{\operatorname{sn} a \operatorname{dn} a \operatorname{cn} b - \operatorname{sn} b \operatorname{dn} b \operatorname{cn} a}{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{cn} b \operatorname{dn} b + k'^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b} = \dfrac{\operatorname{tn} a \operatorname{dn} a - \operatorname{tn} b \operatorname{dn} b}{\operatorname{dn} a \operatorname{dn} b + k'^2 \operatorname{tn} a \operatorname{tn} b}. \end{cases}$$

Die Formeln (21.) können endlich auch also dargestellt werden:

$$25.\quad \begin{cases} \operatorname{dn}(a+b) = \dfrac{\operatorname{dn}^2 a \operatorname{dn}^2 b + k^2 k'^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 b}{\operatorname{dn} a \operatorname{dn} b + k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a \operatorname{cn} b}, \\ \operatorname{dn}(a-b) = \dfrac{\operatorname{dn}^2 a \operatorname{dn}^2 b + k^2 k'^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 b}{\operatorname{dn} a \operatorname{dn} b - k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a \operatorname{cn} b}. \end{cases}$$

Dafs die Formeln (22.)—(25.) mit den Formeln (1.)—(4.) übereinstimmen, davon kann man sich auch leicht durch ihre wirkliche Umformung überzeugen.

§. 14.

Die Formeln (17.) können, wenn man darin $\frac{K}{2} - u$ für u setzt, auch also dargesellt werden:

$$\operatorname{sn}\left(\frac{K}{2} + u\right) = \frac{\operatorname{cn}\left(\frac{K}{2} - u\right)}{\operatorname{dn}\left(\frac{K}{2} - u\right)}, \qquad \operatorname{tn}\left(\frac{K}{2} + u\right) = \frac{1}{k' \operatorname{tn}\left(\frac{K}{2} - u\right)},$$

$$\operatorname{cn}\left(\frac{K}{2} + u\right) = \frac{k' \operatorname{sn}\left(\frac{K}{2} - u\right)}{\operatorname{dn}\left(\frac{K}{2} - u\right)}, \qquad \operatorname{dn}\left(\frac{K}{2} + u\right) = \frac{k'}{\operatorname{dn}\left(\frac{K}{2} - u\right)}.$$

Ist also ein Argument gröfser als $\frac{K}{2}$ und kleiner als K, so können die Functionen jenes Argumentes den vorstehenden Formeln gemäfs, leicht aus den Functionen eines Argumentes berechnet werden, welches

um eben soviel kleiner ist als $\frac{K}{2}$, wie das gegebene Argument gröſser ist als $\frac{K}{2}$. Wir werden bald sehen, daſs überhaupt, wenn die Functionen aller Argumente, welche nicht gröſser als $\frac{K}{2}$ sind, für einen gegebenen Modul k bereits berechnet worden sind, daraus die Functionen beliebig groſser Argumente für denselben Modul k sehr leicht hergeleitet werden können, und es also eigentlich nur auf die Berechnung der Werthe der Modular-Functionen solcher Argumente ankommt, welche nicht gröſser sind, als die Hälfte des dem Modul zugehörigen Modular-Quadranten.

Setzt man in den beiden letzten Formeln $u=0$, so erhält man $tn^2\frac{K}{2}=\frac{1}{k'}$ und $dn^2\frac{K}{2}=k'$, und hieraus folgt

$$26.\quad\begin{cases}\operatorname{sn}\frac{K}{2}=\sqrt{\frac{1}{1+k'}}=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1+k}{2}\right)}+\sqrt{\left(\frac{1-k}{2}\right)}}=\frac{\sqrt{\left(\frac{1+k}{2}\right)}-\sqrt{\left(\frac{1-k}{2}\right)}}{k},\\ \operatorname{cn}\frac{K}{2}=\sqrt{\frac{k'}{1+k'}},\\ \operatorname{tn}\frac{K}{2}=\sqrt{\frac{1}{k'}},\\ \operatorname{dn}\frac{K}{2}=\sqrt{k'}.\end{cases}$$

§. 15.

Die Amplituden und Modular-Functionen eines reellen Argumentes überhaupt zurückgeführt auf solche, deren Argument nicht $>\frac{K}{2}$ ist.

Setzt man in den Formeln (16.) für u an die Stelle $-u$, so erhält man:

$$\operatorname{am}(K+u)=\frac{\pi}{2}+\operatorname{arc\,tang}(k'\operatorname{tn}u),$$

oder

$$\operatorname{am}(K+u)=\frac{\pi}{2}+\arcsin\left(\frac{k'\operatorname{sn}u}{\operatorname{dn}u}\right),$$

$$\operatorname{am}(K+u)=\frac{\pi}{2}+\arccos\left(\frac{\operatorname{cn}u}{\operatorname{dn}u}\right),$$

Addirt man diese Formeln zu den Formeln (16.), so erhält man

$$27.\quad \operatorname{am}(K+u)+\operatorname{am}(K-u)=\pi,\ \text{ oder }\ \operatorname{am}(K+u)=\pi-\operatorname{am}(K-u).$$

Setzt man hierin $K-u$ für u, so entsteht

$$\operatorname{am}(2K-u)=\pi-\operatorname{am}u;$$

wird hierin $-u$ für u gesetzt, so erhält man

$$\mathrm{am}(2K+u) = \pi + \mathrm{am}\,u;$$

so oft also das Argument u um $2K$ vergröfsert wird, eben so oft vergröfsert sich auch $\mathrm{am}\,u$ um π; daher ist überhaupt, wenn m eine ganze Zahl bedeutet,

$$28. \quad \mathrm{am}(u+2mK) = m\pi + \mathrm{am}\,u.$$

Setzt man in dieser Formel noch $u \pm K$ für u, so verwandelt sie sich in

$$29. \quad \begin{cases} \mathrm{am}\,[u+(2m\pm1)K] = (2m\pm1)\frac{\pi}{2} + \mathrm{arc\,tang}\,(k'\,\mathrm{tn}\,u) \quad \text{und} \\ \mathrm{am}\,[(2m\pm1)K-u] = (2m\pm1)\frac{\pi}{2} - \mathrm{arc\,tang}\,(k'\,\mathrm{tn}\,u). \end{cases}$$

Der Gleichung (28.) gemäfs ist auch $\sin\mathrm{am}(u+2mK) = \sin(m\pi+\mathrm{am}\,u)$ $= (-1)^m \sin\mathrm{am}\,u$, oder auch

$$30. \quad \mathrm{sn}(u+2mK) = (-1)^m.\mathrm{sn}\,u.$$

Ferner ist $\cos\mathrm{am}(u+2mK) = \cos(m\pi+\mathrm{am}\,u) = (-1)^m \cos\mathrm{am}\,u$, oder auch

$$31. \quad \mathrm{cn}(u+2mK) = (-1)^m.\mathrm{cn}\,u.$$

Dividirt man (30.) durch (31.), so erhält man

$$32. \quad \mathrm{tn}(u+2mK) = \mathrm{tn}\,u.$$

Differenziirt man endlich die Formel (28.) und wendet man dabei die Formel (7.) des §. 9. an, so erhält man auf der Stelle:

$$33. \quad \mathrm{dn}(u+2mK) = \mathrm{dn}\,u.$$

Die Differente eines reellen Argumentes ist überhaupt immer positiv, sie nimmt beim Wachsen des Argumentes anfangs ab von Eins bis k' und dann wieder zu von k' bis Eins, und dieses Abwechseln im Ab- und Zunehmen geht ohne Ende fort. Zu den Formeln (30.)—(33.) führen auch die schon oben gefundenen Formeln

$$\mathrm{sn}(K+u) = \mathrm{sn}(K-u), \qquad \mathrm{dn}(K+u) = \mathrm{dn}(K-u),$$
$$\mathrm{cn}(K+u) = -\mathrm{cn}(K-u), \qquad \mathrm{tn}(K+u) = -\mathrm{tn}(K-u).$$

Setzt man hierin $K-u$ für u, so werden sie

$$\mathrm{sn}(2K-u) = \mathrm{sn}\,u, \quad \mathrm{cn}(2K-u) = -\mathrm{cn}\,u, \quad \mathrm{dn}(2K-u) = \mathrm{dn}\,u,$$
$$\mathrm{tn}(2K-u) = -\mathrm{tn}\,u,$$

und wird hierin noch $-u$ für u gesetzt, so erhält man

$$\mathrm{sn}(2K+u) = -\mathrm{sn}\,u, \quad \mathrm{cn}(2K+u) = -\mathrm{cn}\,u, \quad \mathrm{tn}(2K+u) = \mathrm{tn}\,u,$$
$$\mathrm{dn}(2K+u) = \mathrm{dn}\,u.$$

Hieraus schliefst man aber ohne Weiteres die Formeln (30.)—(33.). Es ist also auch

$$34.\begin{cases} \mathrm{sn}(2K)=0, & \mathrm{cn}(2K)=-1, \quad \mathrm{tn}(2K)=0, \quad \mathrm{dn}(2K)=1,\\ \mathrm{sn}(3K)=-1, & \mathrm{cn}(3K)=0, \quad \mathrm{tn}(3K)=\tfrac{1}{0}, \quad \mathrm{dn}(3K)=k',\\ \mathrm{sn}(4K)=0, & \mathrm{cn}(4K)=+1, \quad \mathrm{tn}(4K)=0, \quad \mathrm{dn}(4K)=1,\\ \mathrm{sn}(2mK)=0, & \mathrm{cn}(2mK)=(-1)^m, \quad \mathrm{tn}(2mK)=0, \quad \mathrm{dn}(2mK)=1,\\ \mathrm{sn}((2m+1)K)=(-1)^m, & \mathrm{cn}((2m+1)K)=0, \quad \mathrm{tn}((2m+1)K)=\tfrac{1}{0},\\ & \mathrm{dn}((2m+1)K)=k'. \end{cases}$$

Setzt man in den Formeln (30.) — (33.) noch $K-u$ für u, so erhält man

$$35.\begin{cases} \mathrm{sn}((2m+1)K-u)=(-1)^m.\mathrm{snc}\,u; & \mathrm{sn}((2m+1)K+u)=(-1)^m.\mathrm{snc}\,u,\\ \mathrm{cn}((2m+1)K-u)=(-1)^m.\mathrm{cnc}\,u; & \mathrm{cn}((2m+1)K+u)=(-1)^{m+1}.\mathrm{cnc}\,u,\\ \mathrm{tn}((2m+1)K-u)=\mathrm{tnc}\,u; & \mathrm{tn}((2m+1)K+u)=-\mathrm{tnc}\,u,\\ \mathrm{dn}((2m+1)K-u)=\mathrm{dnc}\,u; & \mathrm{dn}((2m+1)K+u)=\mathrm{dnc}\,u. \end{cases}$$

Wenn man in den Formeln (30.) — (33.) setzt $2m$ für m, so hat man

$$\mathrm{sn}(u+4mK) = \mathrm{sn}\,u, \qquad \mathrm{tn}(u+4mK) = \mathrm{tn}\,u,$$
$$\mathrm{cn}(u+4mK) = \mathrm{cn}\,u, \qquad \mathrm{dn}(u+4mK) = \mathrm{dn}\,u.$$

So oft sich also das gemeinschaftliche Argument u der vier cyklischen Modular-Functionen um $4K$ vergröfsert, eben so oft kehren auch gleichzeitig dieselben Werthe dieser Functionen wieder; daher sind die cyklischen Modular-Functionen *periodisch*, wie es auch die cyklischen Potenzial-Functionen sind; der *Umfang* einer jeden solchen reellen Periode ist $4K$, und aus diesem Grunde ist K ein Modular-Quadrant genannt worden.

Zusatz. Dividirt man ein Argument u durch K und multiplicirt man wieder mit $\frac{\pi}{2}$, so hat, wenn $\frac{\pi u}{2K}=\eta u$, wie im §. 10. gesetzt wird,

$\mathrm{sn}\,u$ einerlei Vorzeichen mit $\sin\eta u$,
$\mathrm{cn}\,u$ einerlei Vorzeichen mit $\cos\eta u$,
$\mathrm{tn}\,u$ einerlei Vorzeichen mit $\mathrm{tang}\,\eta u$,
$\mathrm{dn}\,u$ einerlei Vorzeichen mit $\sqrt{(1-k^2\sin^2\eta u)}$,

aufserdem nehmen auch die hier einander gegenüber gestellten Functionen gleichzeitig zu und gleichzeitig ab, und wenn u einen von den Werthen $0, K, 2K, 3K, 4K, 5K$ etc. hat, so haben die einander gegenüber gestellten Functionen gleiche Werthe. Es ist also

$\mathrm{sn}\,u$ gleichartig mit $\sin\eta u$,
$\mathrm{cn}\,u$ gleichartig mit $\cos\eta u$,
$\mathrm{tn}\,u$ gleichartig mit $\mathrm{tang}\,\eta u$,
$\mathrm{dn}\,u$ gleichartig mit $\sqrt{(1-k^2\sin^2\eta u)}$,

wenn man hier unter Gleichartigkeit versteht die Uebereinstimmung nicht

nur in den Vorzeichen, sondern auch in den Werthen, wenn u irgend ein Vielfaches von K ist.

§. 16.

Die hyperbolischen Modular-Functionen überhaupt.

Setzen wir in den Integralen (1.) des §. 4. $p=+1$, $q=+k^2$, $g=1$, so haben wir die Grundformeln für die hyperbolischen Modular-Functionen. Ein solches Integral ist dann

$$u=\int_0 \frac{\partial t}{\sqrt{(1+t^2)}.\sqrt{(1+k^2t^2)}},$$

und in ihm ist wieder k zwischen den Grenzen Null und Eins enthalten. Wäre $k=0$, so wäre $u=\int_0 \frac{\partial t}{\sqrt{(1+t^2)}}=\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Sin}\,(t)$, und also rückwärts $t=\mathfrak{Sin}\,u$; wäre aber $k=1$, so wäre $u=\int_0 \frac{\partial t}{1+t^2}=\text{arc tang}\,(t)$, und also rückwärts $t=\text{tang}\,u$ oder auch $t=\mathfrak{Sin}\,\mathfrak{L}u$; ist demnach k zwischen den Grenzen Null und Eins enthalten, so ist t zwischen den Grenzen $\mathfrak{Sin}\,u$ und $\mathfrak{Sin}\,\mathfrak{L}u$ und also überhaupt zwischen zwei hyperbolischen Sinus enthalten. Aus dem so eben angeführten Grunde nennen wir t den *hyperbolischen Modular-Sinus* des Argumentes u für den Modul k, $\sqrt{(1+t^2)}$ den *hyperbolischen Modular-Cosinus*, $\frac{t}{\sqrt{(1+t^2)}}$ die *hyperbolische Modular-Tangente* und $\sqrt{(1+k^2t^2)}$ die *hyperbolische Differente* des Argumentes u für den Modul k.

Die folgende Bezeichnung werde angewandt:

$$t=\mathfrak{Sn}\,u,\quad \sqrt{(1+t^2)}=\mathfrak{Cn}\,u,\quad \frac{t}{\sqrt{(1+t^2)}}=\mathfrak{Tn}\,u,\quad \sqrt{(1+k^2t^2)}=\mathfrak{Dn}\,u.$$

Den Zusammenhang unter diesen vier hyperbolischen Modular-Functionen, welche auf dasselbe Argument u und denselben Modul k bezogen sind, drücken aus die Formeln:

$$\mathfrak{Cn}^2u-\mathfrak{Sn}^2u=1,\qquad \mathfrak{Tn}\,u=\frac{\mathfrak{Sn}\,u}{\mathfrak{Cn}\,u},$$

$$\mathfrak{Cn}\,u=\sqrt{(1+\mathfrak{Sn}^2u)},\qquad 1-\mathfrak{Tn}^2u=\frac{1}{\mathfrak{Cn}^2u},$$

$$\mathfrak{Sn}\,u=\sqrt{(\mathfrak{Cn}^2u-1)},\qquad \frac{1-\mathfrak{Tn}^2u}{\mathfrak{Tn}^2u}=\frac{1}{\mathfrak{Sn}^2u},$$

$$\mathfrak{Dn}\,u=\sqrt{(1+k^2\,\mathfrak{Sn}^2u)}=\sqrt{(k'^2+k^2\,\mathfrak{Cn}^2u)}=\sqrt{(\mathfrak{Cn}^2u-k'^2\,\mathfrak{Sn}^2u)},$$

$$\mathfrak{Dn}\,u=\sqrt{\frac{1-k'^2\,\mathfrak{Tn}^2u}{1-\mathfrak{Tn}^2u}},$$

$$\mathfrak{Tn}\,u=\sqrt{\frac{\mathfrak{Dn}^2u-1}{\mathfrak{Dn}^2u-k'^2}}.$$

Nach §. 4. ist ferner

$$\mathfrak{Sn}(-u) = -\mathfrak{Sn}\,u, \quad \text{also} \quad \mathfrak{Cn}(-u) = \mathfrak{Cn}\,u, \quad \mathfrak{Tn}(-u) = -\mathfrak{Tn}\,u \quad \text{und}$$
$$\mathfrak{Dn}(-u) = \mathfrak{Dn}\,u;$$

wird das Argument $u = 0$ gesetzt, so ist

$$\mathfrak{Sn}\,0 = 0, \quad \mathfrak{Cn}\,0 = 1, \quad \mathfrak{Tn}\,0 = 0, \quad \mathfrak{Dn}\,0 = 1.$$

Nach dem Obigen ist $\mathfrak{Sn}\,u$ zwischen den Grenzen $\mathfrak{Sin}\,u$ und $\mathfrak{Sin}\,\mathfrak{L}u$ enthalten, und da $\mathfrak{L}u > u$, also auch $\mathfrak{Sin}\,\mathfrak{L}u > \mathfrak{Sin}\,u$ ist, so ist also

$$\mathfrak{Sin}\,u < \mathfrak{Sn}\,u < \mathfrak{Sin}\,\mathfrak{L}u,$$

folglich

$$\mathfrak{Cos}\,u < \mathfrak{Cn}\,u < \mathfrak{Cos}\,\mathfrak{L}u, \qquad \mathfrak{Tang}\,u < \mathfrak{Tn}\,u < \mathfrak{Tang}\,\mathfrak{L}u.$$

Bleibt also das Argument u ungeändert und vergröfsert man den Modul k, so vergröfsern sich alle vier hyperbolische Modular-Functionen.

§. 17.

Erste Differenziale der hyperbolischen Modular-Functionen.

Wenn man in der Formel $\partial u = \frac{\partial t}{\sqrt{(1+t^2)}\sqrt{(1+k^2 t^2)}}$ für t den Werth $\mathfrak{Sn}\,u$ substituirt, so hat man $\partial u = \frac{\partial\,\mathfrak{Sn}\,u}{\mathfrak{Cn}\,u\,\mathfrak{Dn}\,u}$, und also rückwärts

$$1. \quad \partial\,\mathfrak{Sn}\,u = \mathfrak{Cn}\,u . \mathfrak{Dn}\,u . \partial u.$$

Differenziirt man die Gleichung $\mathfrak{Cn}^2 u - \mathfrak{Sn}^2 u = 1$, so erhält man $\mathfrak{Cn}\,u . \partial\,\mathfrak{Cn}\,u = \mathfrak{Sn}\,u . \partial\,\mathfrak{Sn}\,u$ und also

$$2. \quad \partial\,\mathfrak{Cn}\,u = \mathfrak{Sn}\,u . \mathfrak{Dn}\,u . \partial u.$$

Differenziirt man den Bruch $\mathfrak{Tn}\,u = \frac{\mathfrak{Sn}\,u}{\mathfrak{Cn}\,u}$, und substituirt man die vorhin gefundenen Werthe, so erhält man

$$3. \quad \partial\,\mathfrak{Tn}\,u = \frac{\mathfrak{Dn}\,u}{\mathfrak{Cn}^2\,u} . \partial u.$$

Aus der Gleichung $\mathfrak{Dn}^2 u = 1 + k^2\,\mathfrak{Sn}^2 u$ folgt $\mathfrak{Dn}\,u . \partial\,\mathfrak{Dn}\,u = k^2\,\mathfrak{Sn}\,u . \partial\,\mathfrak{Sn}\,u$, und also

$$4. \quad \partial\,\mathfrak{Dn}\,u = k^2\,\mathfrak{Sn}\,u\,\mathfrak{Cn}\,u . \partial u.$$

Wird der Zusammenhang zwischen einer Modular-Function und ihrem Argumente umgekehrt, so dient folgende Bezeichnung:

Ist $t = \mathfrak{Sn}\,u$, so ist $u = \mathfrak{Arg}\,\mathfrak{Sn}(t)$.
Ist $t = \mathfrak{Cn}\,u$, so ist $u = \mathfrak{Arg}\,\mathfrak{Cn}(t)$.
Ist $t = \mathfrak{Tn}\,u$, so ist $u = \mathfrak{Arg}\,\mathfrak{Tn}(t)$.
Ist $t = \mathfrak{Dn}\,u$, so ist $u = \mathfrak{Arg}\,\mathfrak{Dn}(t)$.

Hiernach können die vorigen Formeln auch also dargestellt werden:

5. $\mathfrak{Arg}\,\mathfrak{Sn}(t) = \int_0 \frac{\partial t}{\sqrt{(1+t^2)}.\sqrt{(1+k^2 t^2)}} = \int_0 \frac{\partial t}{\sqrt{[1+(1+k^2)t^2+k^2 t^4]}}$,

6. $\mathfrak{Arg}\,\mathfrak{Cn}(t) = \int_1 \frac{\partial t}{\sqrt{(t^2-1)}.\sqrt{(k'^2+k^2 t^2)}} = \int_1 \frac{\partial t}{\sqrt{[-k'^2+(k'^2-k^2)t^2+k^2 t^4]}}$,

7. $\mathfrak{Arg}\,\mathfrak{Tn}(t) = \int_0 \frac{\partial t}{\sqrt{(1-t^2)}.\sqrt{(1-k'^2 t^2)}} = \int_0 \frac{\partial t}{\sqrt{[1-(1+k'^2)t^2+k'^2 t^4]}}$,

8. $\mathfrak{Arg}\,\mathfrak{Dn}(t) = \int_1 \frac{\partial t}{\sqrt{(t^2-1)}.\sqrt{(t^2-k'^2)}} = \int_1 \frac{\partial t}{\sqrt{[k'^2-(1+k'^2)t^2+t^4]}}$.

§. 18.

Die Amplitude der hyperbolischen Modular-Functionen.

Die hyperbolischen Modular-Functionen können in Anwendung einer vermittelnden Function auf hyperbolische Potenzial-Functionen zurückgeführt werden. Da nämlich $\mathfrak{Sn}\,u$ zwischen den Grenzen $\mathfrak{Sin}\,u$ und $\mathfrak{Sin}\,\mathfrak{L}u$ enthalten ist, so können wir setzen $\mathfrak{Sn}\,u = \mathfrak{Sin}\,\psi$, dann ist aber $\mathfrak{Cn}\,u = \mathfrak{Cos}\,\psi$, $\mathfrak{Tn}\,u = \mathfrak{Tang}\,\psi$. Der Arcus ψ heiſst die *Amplitude* (hyperbolische) des Argumentes u für den Modul k; in Zeichen ist $\psi = \mathfrak{Am}\,u$, und umgekehrt $u = \mathfrak{Arg}\,\mathfrak{Am}(\psi)$. Hiernach ist also

$$1.\quad \begin{cases} \mathfrak{Sn}\,u = \mathfrak{Sin}\,\mathfrak{Am}\,u, & \mathfrak{Tn}\,u = \mathfrak{Tang}\,\mathfrak{Am}\,u, \\ \mathfrak{Cn}\,u = \mathfrak{Cos}\,\mathfrak{Am}\,u, & \mathfrak{Dn}\,u = \sqrt{(1+k^2\,\mathfrak{Sin}^2\,\mathfrak{Am}\,u)}. \end{cases}$$

Weil nach Theil I. §. 5. $\psi = \log\sqrt{\frac{1+\mathfrak{Tang}\,\psi}{1-\mathfrak{Tang}\,\psi}} = \log(\mathfrak{Cos}\,\psi + \mathfrak{Sin}\,\psi) = \log\frac{1}{\mathfrak{Cos}\,\psi - \mathfrak{Sin}\,\psi}$ ist, so ist

$$2.\quad \mathfrak{Am}\,u = \log\sqrt{\frac{1+\mathfrak{Tn}\,u}{1-\mathfrak{Tn}\,u}} = \log(\mathfrak{Cn}\,u + \mathfrak{Sn}\,u) = \log\frac{1}{\mathfrak{Cn}\,u - \mathfrak{Sn}\,u}.$$

Weil $\mathfrak{Sin}\,\psi = \text{tang}\,l\psi$, also $l\psi = \text{arc tang}(\mathfrak{Sin}\,\psi) = \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{1+i\,\mathfrak{Sin}\,\psi}{1-i\,\mathfrak{Sin}\,\psi}}$ nach Theil I. §. 37. ist, so ist also auch

$$3.\quad l\,\mathfrak{Am}\,u = \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{1+i\,\mathfrak{Sn}\,u}{1-i\,\mathfrak{Sn}\,u}}.$$

Da $\mathfrak{Tang}\,\frac{1}{2}\psi = \sqrt{\frac{\mathfrak{Cos}\,\psi - 1}{\mathfrak{Cos}\,\psi + 1}}$ ist, so ist auch

$$4.\quad \mathfrak{Tang}\,\tfrac{1}{2}\,\mathfrak{Am}\,u = \sqrt{\frac{\mathfrak{Cn}\,u - 1}{\mathfrak{Cn}\,u + 1}} = \frac{\mathfrak{Cn}\,u - 1}{\mathfrak{Sn}\,u} = \frac{\mathfrak{Sn}\,u}{\mathfrak{Cn}\,u + 1}.$$

Setzt man in der Formel $u = \int_0 \frac{\partial t}{\sqrt{(1+t^2)}\sqrt{(1+k^2 t^2)}}$ wirklich $t = \mathfrak{Sin}\,\psi$, so ist $\partial t = \mathfrak{Cos}\,\psi.\partial\psi$, und also

$$5.\quad \mathfrak{Arg}\,\mathfrak{Am}(\psi) =$$

$$\int_0 \frac{\partial\psi}{\sqrt{(1+k^2\,\mathfrak{Sin}^2\,\psi)}} = \int_0 \frac{\partial\psi}{\sqrt{(k'^2+k^2\,\mathfrak{Cos}^2\,\psi)}} = \int_0 \frac{\partial\psi}{\sqrt{(\mathfrak{Cos}^2\,\psi - k'^2\,\mathfrak{Sin}^2\,\psi)}}.$$

Wenn man, wie in §. 9., setzt

$$k = \frac{2\sqrt{\lambda}}{1+\lambda}, \quad k' = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}, \quad \lambda = \frac{1-k'}{1+k'} = \left(\frac{\sqrt{(1+k)} - \sqrt{(1-k)}}{\sqrt{(1+k)} + \sqrt{(1-k)}}\right)^2,$$

so findet man auch den Ausdruck

$$6. \quad \mathfrak{Arg}\,\mathfrak{Am}(\psi) = \int_0 \frac{(1+\lambda)\,\partial\psi}{\sqrt{(1+2\lambda\,\mathfrak{Cos}\,2\psi+\lambda^2)}} = \int_0 \frac{(1+\lambda)\,\partial\psi}{\sqrt{[(1+\lambda.e^{2\psi})(1+\lambda.e^{-2\psi})]}}.$$

Da $\mathfrak{Sn}(-u) = \mathfrak{Sin}\,\mathfrak{Am}(-u) = -\mathfrak{Sn}\,u$ ist, so ist $\mathfrak{Sn}\,u = \mathfrak{Sin}(-\mathfrak{Am}(-u))$ $= \mathfrak{Sin}\,\mathfrak{Am}\,u$, und also $\mathfrak{Am}\,u = -\mathfrak{Am}(-u)$ oder $\mathfrak{Am}(-u) = -\mathfrak{Am}\,u$; ferner ist

$$\mathfrak{Am}\,0 = 0.$$

Da $\mathfrak{Sn}\,u$ oder $\mathfrak{Sin}\,\mathfrak{Am}\,u$ zwischen den Grenzen $\mathfrak{Sin}\,u$ und $\mathfrak{Sin}\,\mathfrak{L}\,u$ enthalten ist, so ist also $\mathfrak{Am}\,u$ zwischen u und $\mathfrak{L}\,u$ enthalten, und da $\mathfrak{L}\,u > u$ ist, so ist

$$7. \quad u < \mathfrak{Am}\,u < \mathfrak{L}\,u;$$

vergröſsert man also den Modul k, während das Argument u unverändert bleibt, so nähert sich $\mathfrak{Am}\,u$ der Grenze $\mathfrak{L}\,u$, d. h. es wird auch $\mathfrak{Am}\,u$ gröſser.

Setzt man in der Formel (5.) zuerst $k = 0$, so hat man $\mathfrak{Arg}\,\mathfrak{Am}(\psi)$ $= \int_0 \partial\psi = \psi$; setzt man aber $k = 1$, so hat man $\mathfrak{Arg}\,\mathfrak{Am}(\psi) = \int_0 \frac{\partial\psi}{\mathfrak{Cos}\,\psi}$ $= l\psi$; ist also k zwischen den Grenzen Null und Eins enthalten, so ist $\mathfrak{Arg}\,\mathfrak{Am}(\psi)$ zwischen den Grenzen ψ und $l\psi$ enthalten, und da $l\psi < \psi$ ist, so ist

$$8. \quad \psi > \mathfrak{Arg}\,\mathfrak{Am}(\psi) > l\psi;$$

wird also der Modul vergröſsert, während die Amplitude ψ unverändert bleibt, so verkleinert sich $\mathfrak{Arg}\,\mathfrak{Am}(\psi)$.

Differenziirt man die Gleichung $\mathfrak{Sn}\,u = \mathfrak{Sin}\,\mathfrak{Am}\,u$, so erhält man $\mathfrak{Cos}\,\mathfrak{Am}\,u.\partial\,\mathfrak{Am}\,u = \mathfrak{Cn}\,u.\mathfrak{Dn}\,u.\partial u$, und da $\mathfrak{Cos}\,\mathfrak{Am}\,u = \mathfrak{Cn}\,u$ ist, so ist

$$9. \quad \partial\,\mathfrak{Am}\,u = \mathfrak{Dn}\,u.\partial u.$$

§. 19.

Ausdrücke für die hyperbolischen Modular-Functionen eines Binoms.

Setzt man auch in den Formeln des §. 4. und §. 5. jetzt $p = +1$ und $q = k^2$, ferner $x = \mathfrak{Sn}\,a$ und $y = \mathfrak{Sn}\,b$, so ist $z = \mathfrak{Sn}(a+b)$, und also

$$1. \quad \begin{cases} \mathfrak{Sn}(a+b) = \dfrac{\mathfrak{Sn}\,a\,\mathfrak{Cn}\,b\,\mathfrak{Dn}\,b + \mathfrak{Sn}\,b\,\mathfrak{Cn}\,a\,\mathfrak{Dn}\,a}{1-k^2\,\mathfrak{Sn}^2 a\,\mathfrak{Sn}^2 b}, \\ \mathfrak{Sn}(a-b) = \dfrac{\mathfrak{Sn}\,a\,\mathfrak{Cn}\,b\,\mathfrak{Dn}\,b - \mathfrak{Sn}\,b\,\mathfrak{Cn}\,a\,\mathfrak{Dn}\,a}{1-k^2\,\mathfrak{Sn}^2 a\,\mathfrak{Sn}^2 b}. \end{cases}$$

Für die Cosinus erhält man die Formeln

$$2.\quad \begin{cases} \mathfrak{Cn}(a+b) = \dfrac{\mathfrak{Cn}\,a\,\mathfrak{Cn}\,b + \mathfrak{Sn}\,a\,\mathfrak{Sn}\,b\,\mathfrak{Dn}\,a\,\mathfrak{Dn}\,b}{1-k^2\,\mathfrak{Sn}^2\,a\,\mathfrak{Sn}^2\,b}, \\ \mathfrak{Cn}(a-b) = \dfrac{\mathfrak{Cn}\,a\,\mathfrak{Cn}\,b - \mathfrak{Sn}\,a\,\mathfrak{Sn}\,b\,\mathfrak{Dn}\,a\,\mathfrak{Dn}\,b}{1-k^2\,\mathfrak{Sn}^2\,a\,\mathfrak{Sn}^2\,b}. \end{cases}$$

Werden die Formeln (1.) durch (2.) dividirt, so erhält man

$$3.\quad \begin{cases} \mathfrak{Tn}(a+b) = \dfrac{\mathfrak{Tn}\,a\,\mathfrak{Dn}\,b + \mathfrak{Tn}\,b\,\mathfrak{Dn}\,a}{1+\mathfrak{Tn}\,a\,\mathfrak{Tn}\,b\,\mathfrak{Dn}\,a\,\mathfrak{Dn}\,b}, \\ \mathfrak{Tn}(a-b) = \dfrac{\mathfrak{Tn}\,a\,\mathfrak{Dn}\,b - \mathfrak{Tn}\,b\,\mathfrak{Dn}\,a}{1-\mathfrak{Tn}\,a\,\mathfrak{Tn}\,b\,\mathfrak{Dn}\,a\,\mathfrak{Dn}\,b}. \end{cases}$$

Die allgemeinen Formeln für die Differenten sind

$$4.\quad \begin{cases} \mathfrak{Dn}(a+b) = \dfrac{\mathfrak{Dn}\,a\,\mathfrak{Dn}\,b + k^2\,\mathfrak{Sn}\,a\,\mathfrak{Sn}\,b\,\mathfrak{Cn}\,a\,\mathfrak{Cn}\,b}{1-k^2\,\mathfrak{Sn}^2\,a\,\mathfrak{Sn}^2\,b}, \\ \mathfrak{Dn}(a-b) = \dfrac{\mathfrak{Dn}\,a\,\mathfrak{Dn}\,b - k^2\,\mathfrak{Sn}\,a\,\mathfrak{Sn}\,b\,\mathfrak{Cn}\,a\,\mathfrak{Cn}\,b}{1-k^2\,\mathfrak{Sn}^2\,a\,\mathfrak{Sn}^2\,b}. \end{cases}$$

Setzt man $\mathfrak{Tang}\,\alpha = \mathfrak{Tn}\,a\,\mathfrak{Dn}\,b$ und $\mathfrak{Tang}\,\beta = \mathfrak{Tn}\,b\,\mathfrak{Dn}\,a$, so ist $\mathfrak{Tn}(a+b)$ $= \dfrac{\mathfrak{Tang}\,\alpha + \mathfrak{Tang}\,\beta}{1+\mathfrak{Tang}\,\alpha\,.\,\mathfrak{Tang}\,\beta}$, und also $\mathfrak{Tang}\,\mathfrak{Am}\,(a+b) = \mathfrak{Tang}\,(\alpha+\beta)$, oder $\mathfrak{Am}(a+b) = \alpha+\beta$. Ganz eben so findet man $\mathfrak{Am}(a-b) = \alpha-\beta$, und es ist also

$$5.\quad \begin{cases} \mathfrak{Am}(a+b) = \mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}(\mathfrak{Tn}\,a\,\mathfrak{Dn}\,b) + \mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}(\mathfrak{Tn}\,b\,\mathfrak{Dn}\,a), \\ \mathfrak{Am}(a-b) = \mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}(\mathfrak{Tn}\,a\,\mathfrak{Dn}\,b) - \mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}(\mathfrak{Tn}\,b\,\mathfrak{Dn}\,a). \end{cases}$$

Es können diese beiden Formeln auch also dargestellt werden:

$$6.\quad \begin{cases} \mathfrak{Tang}\left(\dfrac{\mathfrak{Am}(a+b)+\mathfrak{Am}(a-b)}{2}\right) = \mathfrak{Tn}\,a\,\mathfrak{Dn}\,b, \\ \mathfrak{Tang}\left(\dfrac{\mathfrak{Am}(a+b)-\mathfrak{Am}(a-b)}{2}\right) = \mathfrak{Tn}\,b\,\mathfrak{Dn}\,a. \end{cases}$$

Setzt man $b = a$, so erhält man die specielle Formel

$$\mathfrak{Tang}\,\tfrac{1}{2}\,\mathfrak{Am}\,2a = \mathfrak{Tn}\,a\,\mathfrak{Dn}\,a.$$

Diese Relationen mögen hier hinreichen; wir werden bald sehen, daſs man die noch fehlenden auch sehr leicht aus den analogen Formeln herleiten kann, welche für die cyklischen Modular-Functionen gelten.

§. 20.

Imaginäre Relationen zwischen den cyklischen und hyperbolischen Modular-Functionen.

Es sei $z = \text{sn}\,u$ oder $u = \int_0 \dfrac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)}\sqrt{(1-k^2 z^2)}}$, dann ist $ui = \int_0 \dfrac{i\,\partial z}{\sqrt{(1-z^2)}\sqrt{(1-k^2 z^2)}}$; wird nun $iz = t$, also $i\,\partial z = \partial t$ gesetzt, so ist $-z^2 = t^2$, und da für $z = 0$ auch $t = 0$ ist, so ist

$$ui = \int_0 \frac{\partial t}{\sqrt{(1+t^2)}\sqrt{(1+k^2 t^2)}}, \text{ oder } t = \mathfrak{Sn}(ui),$$

und da $t = iz = i.\mathrm{sn}\, u$ ist, so ist

$$1. \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{Sn}(ui) = i.\mathrm{sn}\, u, \text{ hieraus folgt} \\ \mathfrak{Cn}(ui) = \mathrm{cn}\, u, \quad \mathfrak{Tn}(ui) = i.\mathrm{tn}\, u, \quad \mathfrak{Dn}(ui) = \mathrm{dn}\, u. \end{array} \right.$$

Diesen Formeln gemäfs können die hyperbolischen Modular-Functionen des imaginären Argumentes ui sehr leicht auf cyklische Modular-Functionen des reellen Argumentes u, ohne den Modul zu verändern, zurückgeführt werden.

Setzt man in der Gleichung $\mathfrak{Sn}(ui) = i\,\mathrm{sn}\, u$ für u an die Stelle ui, so hat man, da $i^2 = -1$ ist, $\mathfrak{Sn}(-u) = i\,\mathrm{sn}(ui)$, also $-\mathfrak{Sn}\, u = i\,\mathrm{sn}(ui)$, oder

$$2. \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{sn}(ui) = i.\mathfrak{Sn}\, u, \text{ und also} \\ \mathrm{cn}(ui) = \mathfrak{Cn}\, u, \quad \mathrm{tn}(ui) = i.\mathfrak{Tn}\, u, \quad \mathrm{dn}(ui) = \mathfrak{Dn}\, u. \end{array} \right.$$

Die cyklischen Modular-Functionen werden also eben so auf die hyperbolischen, wie umgekehrt diese auf jene zurückgeführt, wenn das Argument imaginär ist, und die Form ui hat.

Da $\mathfrak{Sn}(ui) = \mathfrak{Sin}\,\mathfrak{Am}(ui)$ ist, so ist $\mathfrak{Sin}\,\mathfrak{Am}(ui) = i \sin \mathrm{am}\, u = \mathfrak{Sin}(i\,\mathrm{am}\, u)$ und also

$$3. \quad \mathfrak{Am}(ui) = i.\mathrm{am}\, u; \text{ eben so findet man } \mathrm{am}(ui) = i.\mathfrak{Am}\, u.$$

Setzt man jedes Glied der Gleichung $\mathfrak{Sn}(ui) = i.\mathrm{sn}\, u = ti$, so ist $ui = \mathfrak{Arg}\,\mathfrak{Sn}(ti)$ und $u = \arg \mathrm{sn}(t)$, daher ist

$$4. \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{Arg}\,\mathfrak{Sn}(ti) = i.\arg \mathrm{sn}(t); \text{ eben so findet man} \\ \mathfrak{Arg}\,\mathfrak{Cn}(t) = i.\arg \mathrm{cn}(t), \text{ wenn } t < 1; \text{ ferner} \\ \mathfrak{Arg}\,\mathfrak{Tn}(ti) = i.\arg \mathrm{tn}(t), \\ \mathfrak{Arg}\,\mathfrak{Dn}(t) = i.\arg \mathrm{dn}(t), \text{ wenn } t < 1 \text{ ist} \\ \mathfrak{Arg}\,\mathfrak{Am}(ti) = i.\arg \mathrm{am}(t). \end{array} \right.$$

In ähnlicher Weise findet man auch umgekehrt

$$5. \quad \left\{ \begin{array}{l} \arg \mathrm{sn}(ti) = i.\mathfrak{Arg}\,\mathfrak{Sn}(t), \\ \arg \mathrm{cn}(t) = i.\mathfrak{Arg}\,\mathfrak{Cn}(t) \text{ für } t > 1, \\ \arg \mathrm{tn}(ti) = i.\mathfrak{Arg}\,\mathfrak{Tn}(t), \\ \arg \mathrm{dn}(t) = i.\mathfrak{Arg}\,\mathfrak{Dn}(t) \text{ für } t > 1, \\ \arg \mathrm{am}(ti) = i.\mathfrak{Arg}\,\mathfrak{Am}(t). \end{array} \right.$$

§. 21.

Hyperbolische Modular-Functionen der Argumente von der Form $u+niK$ und $a\pm bi$.

Nach §. 20. ist $\mathfrak{S}\mathrm{n}(iK)=i\,\mathrm{sn}\,K$, und da $\mathrm{sn}\,K=1$ ist, so ist

$$1.\quad \begin{cases}\mathfrak{S}\mathrm{n}(iK)=i, & \mathfrak{T}\mathrm{n}(iK)=\dfrac{1}{0},\\ \mathfrak{C}\mathrm{n}(iK)=0, & \mathfrak{D}\mathrm{n}(iK)=k'.\end{cases}$$

Setzt man nun in den Formeln des §. 19. für $\mathfrak{S}\mathrm{n}(a\pm b)$, $\mathfrak{C}\mathrm{n}(a\pm b)$, $\mathfrak{T}\mathrm{n}(a\pm b)$ und $\mathfrak{D}\mathrm{n}(a\pm b)$ jetzt $a=iK$ und $b=u$, so hat man

$$2.\quad \begin{cases}\mathfrak{S}\mathrm{n}(iK-u)=\dfrac{i\,\mathfrak{C}\mathrm{n}\,u}{\mathfrak{D}\mathrm{n}\,u}, & \mathfrak{S}\mathrm{n}(iK+u)=\dfrac{i\,\mathfrak{C}\mathrm{n}\,u}{\mathfrak{D}\mathrm{n}\,u},\\ \mathfrak{C}\mathrm{n}(iK-u)=\dfrac{k'.\mathfrak{S}\mathrm{n}\,u}{i.\mathfrak{D}\mathrm{n}\,u}, & \mathfrak{C}\mathrm{n}(iK+u)=\dfrac{ik'.\mathfrak{S}\mathrm{n}\,u}{\mathfrak{D}\mathrm{n}\,u},\\ \mathfrak{T}\mathrm{n}(iK-u)=-\dfrac{1}{k'\,\mathfrak{T}\mathrm{n}\,u}, & \mathfrak{T}\mathrm{n}(iK+u)=\dfrac{1}{k'\,\mathfrak{T}\mathrm{n}\,u},\\ \mathfrak{D}\mathrm{n}(iK-u)=\dfrac{k'}{\mathfrak{D}\mathrm{n}\,u}, & \mathfrak{D}\mathrm{n}(iK+u)=\dfrac{k'}{\mathfrak{D}\mathrm{n}\,u}.\end{cases}$$

Multiplicirt man die Gleichung $\mathrm{sn}(u+2mK)=(-1)^m\,\mathrm{sn}\,u$ mit i, so erhält man $\mathfrak{S}\mathrm{n}(ui+2miK)=(-1)^m.\mathfrak{S}\mathrm{n}(ui)$, und wird hierin $\frac{u}{i}$ für u gesetzt, so entsteht

$$3.\quad \mathfrak{S}\mathrm{n}(u+2miK)=(-1)^m.\mathfrak{S}\mathrm{n}\,u.$$

Da $\mathrm{cn}(u+2mK)=(-1)^m\,\mathrm{cn}\,u$, ferner $\mathfrak{C}\mathrm{n}(ui+2miK)=\mathrm{cn}(u+2mK)$ und $\mathfrak{C}\mathrm{n}(ui)=\mathrm{cn}\,u$ ist, so ist also $\mathfrak{C}\mathrm{n}(ui+2miK)=(-1)^m.\mathfrak{C}\mathrm{n}(ui)$, und diese Formel verwandelt sich, wenn $\frac{u}{i}$ für u gesetzt wird, in

$$4.\quad \mathfrak{C}\mathrm{n}(u+2miK)=(-1)^m.\mathfrak{C}\mathrm{n}\,u.$$

Ferner erhält man für die Tangenten

$$5.\quad \mathfrak{T}\mathrm{n}(u+2miK)=\mathfrak{T}\mathrm{n}\,u,$$

und für die Differenten hat man

$$6.\quad \mathfrak{D}\mathrm{n}(u+2miK)=\mathfrak{D}\mathrm{n}\,u.$$

Da diesen Formeln gemäfs $\mathfrak{S}\mathrm{n}(u+4miK)=\mathfrak{S}\mathrm{n}\,u$, $\mathfrak{C}\mathrm{n}(u+4miK)=\mathfrak{C}\mathrm{n}\,u$, $\mathfrak{T}\mathrm{n}(u+4miK)=\mathfrak{T}\mathrm{n}\,u$ und $\mathfrak{D}\mathrm{n}(u+4miK)=\mathfrak{D}\mathrm{n}\,u$ ist, so sind die hyperbolischen Modular-Functionen periodisch, *der Umfang einer jeden Periode ist imaginär* und $=4iK$.

Multiplicirt man die Gleichung $\mathrm{am}(K+u)=\frac{\pi}{2}+\mathrm{arc\,tang}\,(k'\,\mathrm{tn}\,u)$ mit i, so erhält man sofort $\mathfrak{A}\mathrm{m}(iK+ui)=\frac{\pi i}{2}+\mathfrak{A}\mathrm{rc}\,\mathfrak{T}\mathrm{ang}\,(k'\,\mathfrak{T}\mathrm{n}(ui))$ und also auch

$$7.\quad \begin{cases} \mathfrak{Am}(iK+u) = \dfrac{\pi i}{2} + \mathfrak{Arc\,Tang}(k'\mathfrak{Tn}\,u), \text{ wie auch} \\ \mathfrak{Am}(iK-u) = \dfrac{\pi i}{2} - \mathfrak{Arc\,Tang}(k'\mathfrak{Tn}\,u), \\ \mathfrak{Am}(u-iK) = -\dfrac{\pi i}{2} + \mathfrak{Arc\,Tang}(k'\mathfrak{Tn}\,u). \end{cases}$$

Hieraus folgt

$$8.\quad \begin{cases} \mathfrak{Am}(iK+u) + \mathfrak{Am}(iK-u) = \pi i \text{ und} \\ \mathfrak{Am}(u+iK) + \mathfrak{Am}(u-iK) = 2.\mathfrak{Arc\,Tang}(k'\mathfrak{Tn}\,u). \end{cases}$$

Aus der Formel (28.) des §. 15. erhält man sofort

$$9.\quad \mathfrak{Am}(u+2miK) = m\pi i + \mathfrak{Am}\,u.$$

Setzt man in den Formeln des §. 11. nur ai für a und bi für b, so erhält man ohne Weiteres die Formeln des §. 19.; läſst man aber a reell, und setzt man bloſs bi für b, so erhält man

$$10.\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(a+bi) = \dfrac{\operatorname{sn} a\,\mathfrak{Cn}\,b\,\mathfrak{Dn}\,b + i\,\mathfrak{Sn}\,b\,.\operatorname{cn} a\operatorname{dn} a}{1+k^2\operatorname{sn}^2 a\,\mathfrak{Sn}^2 b}, \\ \operatorname{sn}(a-bi) = \dfrac{\operatorname{sn} a\,\mathfrak{Cn}\,b\,\mathfrak{Dn}\,b - i\,\mathfrak{Sn}\,b\,.\operatorname{cn} a\operatorname{dn} a}{1+k^2\operatorname{sn}^2 a\,\mathfrak{Sn}^2 b}; \end{cases}$$

$$11.\quad \begin{cases} \operatorname{cn}(a+bi) = \dfrac{\operatorname{cn} a\,\mathfrak{Cn}\,b - i.\operatorname{sn} a\operatorname{dn} a\,\mathfrak{Sn}\,b\,\mathfrak{Dn}\,b}{1+k^2\operatorname{sn}^2 a\,\mathfrak{Sn}^2 b}, \\ \operatorname{cn}(a-bi) = \dfrac{\operatorname{cn} a\,\mathfrak{Cn}\,b + i.\operatorname{sn} a\operatorname{dn} a\,\mathfrak{Sn}\,b\,\mathfrak{Dn}\,b}{1+k^2\operatorname{sn}^2 a\,\mathfrak{Sn}^2 b}; \end{cases}$$

$$12.\quad \begin{cases} \operatorname{dn}(a+bi) = \dfrac{\operatorname{dn} a\,\mathfrak{Dn}\,b - ik^2\operatorname{sn} a\operatorname{cn} a\,\mathfrak{Sn}\,b\,\mathfrak{Cn}\,b}{1+k^2\operatorname{sn}^2 a\,\mathfrak{Sn}^2 b}, \\ \operatorname{dn}(a-bi) = \dfrac{\operatorname{dn} a\,\mathfrak{Dn}\,b + ik^2\operatorname{sn} a\operatorname{cn} a\,\mathfrak{Sn}\,b\,\mathfrak{Cn}\,b}{1+k^2\operatorname{sn}^2 a\,\mathfrak{Sn}^2 b}. \end{cases}$$

Für die Amplituden hat man die Formeln

$$13.\quad \begin{cases} \operatorname{am}(a+bi) = \operatorname{arc\,tang}(\operatorname{tn} a\,\mathfrak{Dn}\,b) + i\,\mathfrak{Arc\,Tng}(\mathfrak{Tn}\,b\,.\operatorname{dn} a), \\ \operatorname{am}(a-bi) = \operatorname{arc\,tang}(\operatorname{tn} a\,\mathfrak{Dn}\,b) - i\,\mathfrak{Arc\,Tng}(\mathfrak{Tn}\,b\,.\operatorname{dn} a), \end{cases}$$

und da überhaupt $\mathfrak{Arc\,Tang}(t) = \mathfrak{L}\operatorname{arc\,sin}(t)$ ist, so können diese beiden Formeln auch also dargestellt werden:

$$\operatorname{am}(a+bi) = \operatorname{arc\,tang}(\operatorname{tn} a\,\mathfrak{Dn}\,b) + i\,\mathfrak{L}\operatorname{arc\,sin}(\mathfrak{Tn}\,b\operatorname{dn} a),$$
$$\operatorname{am}(a-bi) = \operatorname{arc\,tang}(\operatorname{tn} a\,\mathfrak{Dn}\,b) - i\,\mathfrak{L}\operatorname{arc\,sin}(\mathfrak{Tn}\,b\operatorname{dn} a).$$

Zweiter Abschnitt.

§. 22.

Einfache Relationen unter den cyklischen und hyperbolischen Modular-Functionen in reellen Formen.

So wie die cyklischen und hyperbolischen Potenzial-Functionen ohne alle imaginären Ausdrücke auf einander zurückgeführt werden können, so können auch die cyklischen und hyperbolischen Modular-Functionen mit gänzlicher Vermeidung imaginärer Formen auf einander zurückgeführt werden; und wie sich bei jener Zurückführung (Theil I. §. 37.) eine Reciprocität zu erkennen gab, so stellt sich auch bei dieser eine nicht minder einfache Reciprocität ein.

Nach §. 8. ist $\arg \operatorname{tn}(t) = \int_0 \frac{\partial t}{\sqrt{(1+t^2)}\sqrt{(1+k'^2 t^2)}}$, und wird in dieser Gleichung der Modul k mit dem conjugirten k' vertauscht, so ist:

$$\arg \operatorname{tn}'(t) = \int_0 \frac{\partial t}{\sqrt{(1+t^2)}\sqrt{(1+k^2 t^2)}},$$

und da nach §. 17. auch

$$\mathfrak{Arg}\,\mathfrak{Sn}(t) = \int_0 \frac{\partial t}{\sqrt{(1+t^2)}\sqrt{(1+k^2 t^2)}}$$

ist, so ist also $\arg \operatorname{tn}'(t) = \mathfrak{Arg}\,\mathfrak{Sn}(t)$. Setzt man jedes dieser beiden gleichen Argumente $= u$, so ist $t = tn' u$ und auch $t = \mathfrak{Sn}\, u$, folglich haben wir die einfache Relation:

$$\mathfrak{Sn}\, u = \operatorname{tn}' u,$$

wodurch der hyperbolische Sinus des Argumentes u für einen Modul k auf die cyklische Tangente desselben Argumentes mit dem conjugirten Modul k' zurückgeführt wird. Aus dieser Gleichung folgt $\sqrt{(1+\mathfrak{Sn}^2 u)} = \sqrt{(1+\operatorname{tn}'^2 u)}$, oder auch

$$\mathfrak{Cn}\, u = \frac{1}{\operatorname{cn}' u}.$$

Wird hierdurch die vorige Gleichung dividirt, so erhält man $\mathfrak{Tn}\, u = \operatorname{sn}'. u$. Endlich ist $\sqrt{(1+k^2\,\mathfrak{Sn}^2 u)} = \sqrt{(1+k^2 \operatorname{tn}'^2 u)}$, oder auch

$$\mathfrak{Dn}\, u = \frac{\operatorname{dn}' u}{\operatorname{cn}' u} = \frac{1}{\operatorname{snc}' u}.$$

Sollen sich die hyperbolischen Functionen $\mathfrak{Sn}\, u$, $\mathfrak{Cn}\, u$, $\mathfrak{Dn}\, u$, $\mathfrak{Tn}\, u$ und $\mathfrak{Am}\, u$ nicht mehr auf den Modul k, sondern auf den conjugirten Modul k' beziehen, so ändern wir ihre Bezeichnung auf ähnliche Art, wie bei den cyklischen Functionen, ab in $\mathfrak{Sn}' u$, $\mathfrak{Cn}' u$, $\mathfrak{Dn}' u$, $\mathfrak{Tn}' u$ und $\mathfrak{Am}' u$. Machen

wir von dieser Bezeichnung Gebrauch, und vertauschen wir in den vorhin entwickelten vier Formeln die beiden conjugirten Modul k und k' mit einander, so erhalten wir auf der Stelle noch vier neue Formeln, und wenn wir dieselben den vorigen in folgender Weise gegenüberstellen:

$$1.\quad \begin{cases} \mathfrak{S}\mathrm{n}\,u = \mathrm{tn}'u & \text{und} \quad \mathrm{sn}\,u = \mathfrak{T}\mathrm{n}'u, \\ \mathfrak{C}\mathrm{n}\,u = \dfrac{1}{\mathrm{cn}'u} & \text{und} \quad \mathrm{cn}\,u = \dfrac{1}{\mathfrak{C}\mathrm{n}'u}, \\ \mathfrak{T}\mathrm{n}\,u = \mathrm{sn}'u & \text{und} \quad \mathrm{tn}\,u = \mathfrak{S}\mathrm{n}'u, \\ \mathfrak{D}\mathrm{n}\,u = \dfrac{\mathrm{dn}'u}{\mathrm{cn}'u} & \text{und} \quad \mathrm{dn}\,u = \dfrac{\mathfrak{D}\mathrm{n}'u}{\mathfrak{C}\mathrm{n}'u}, \end{cases}$$

so sehen wir, dafs die hyperbolischen Modular-Functionen durch diese Formeln ohne alle imaginäre Formeln gerade eben so auf die cyklischen Modular-Functionen zurückgeführt werden, wie umgekehrt diese auf jene. Auch wird man die Aehnlichkeit nicht übersehen, welche zwischen diesen Formeln und denjenigen Statt findet, wodurch (in Theil I. §. 37.) die hyperbolischen Potenzial-Functionen auf die cyklischen, und umgekehrt, in reellen Formen zurückgeführt werden.

Aus den vorigen Formeln folgt noch

$$\sqrt{\frac{\mathfrak{C}\mathrm{n}\,u-1}{\mathfrak{C}\mathrm{n}\,u+1}} = \sqrt{\frac{1-\mathrm{cn}'u}{1+\mathrm{cn}'u}} \quad \text{und} \quad \sqrt{\frac{1-\mathrm{cn}\,u}{1+\mathrm{cn}\,u}} = \sqrt{\frac{\mathfrak{C}\mathrm{n}'u-1}{\mathfrak{C}\mathrm{n}'u+1}},$$

oder, was einerlei damit ist

$$2.\quad \mathfrak{T}\mathrm{ang}\tfrac{1}{2}\mathfrak{A}\mathrm{m}\,u = \mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\mathrm{am}'u \quad \text{und} \quad \mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\mathrm{am}\,u = \mathfrak{T}\mathrm{ang}\tfrac{1}{2}\mathfrak{A}\mathrm{m}'u.$$

Diese Formeln lassen sich auch kurz also herleiten. Aus den Formeln (1.) folgt

$$\mathfrak{T}\mathrm{n}\,u\,\mathfrak{D}\mathrm{n}\,u = \mathrm{tn}'u\,\mathrm{dn}'u \quad \text{und} \quad \mathrm{tn}\,u\,\mathrm{dn}\,u = \mathfrak{T}\mathrm{n}'u\,\mathfrak{D}\mathrm{n}'u,$$

und da nach §. 12. ist $\mathrm{tn}\,u\,\mathrm{dn}\,u = \mathrm{tang}\frac{1}{2}\mathrm{am}\,2u$, also $\mathrm{tn}'u\,\mathrm{dn}'u = \mathrm{tang}\frac{1}{2}\mathrm{am}'2u$, ferner nach §. 19. ist $\mathfrak{T}\mathrm{n}\,u\,\mathfrak{D}\mathrm{n}\,u = \mathfrak{T}\mathrm{ang}\frac{1}{2}\mathfrak{A}\mathrm{m}\,2u$, also $\mathfrak{T}\mathrm{n}'u\,\mathfrak{D}\mathrm{n}'u = \mathfrak{T}\mathrm{ang}\frac{1}{2}\mathfrak{A}\mathrm{m}'2u$, so ist

$$\mathfrak{T}\mathrm{ang}\tfrac{1}{2}\mathfrak{A}\mathrm{m}\,2u = \mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\mathrm{am}'2u \quad \text{und} \quad \mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\mathrm{am}\,2u = \mathfrak{T}\mathrm{ang}\tfrac{1}{2}\mathfrak{A}\mathrm{m}'2u,$$

und diese Formeln fallen mit (2.) zusammen, wenn man darin nur noch $\frac{u}{2}$ für u setzt. Auch unter den cyklischen und hyperbolischen Amplituden desselben Arguments giebt es sehr einfache Relationen, wodurch sie auf einander zurückgeführt werden. Setzt man für den Augenblick $\mathrm{am}'u = \varphi'$, dann ist $\mathrm{tn}'u = \mathrm{tang}\,\mathrm{am}'u = \mathrm{tang}\,\varphi' = \mathfrak{S}\mathrm{in}\,\mathfrak{L}\varphi'$ und da auch $\mathfrak{S}\mathrm{n}\,u = \mathrm{tn}'u$ ist, so ist also $\mathfrak{S}\mathrm{in}\,\mathfrak{A}\mathrm{m}\,u = \mathfrak{S}\mathrm{in}\,\mathfrak{L}\varphi'$, oder einfacher $\mathfrak{A}\mathrm{m}\,u = \mathfrak{L}\varphi'$, und folglich

$$3.\quad \mathfrak{A}\mathrm{m}\,u = \mathfrak{L}\,\mathrm{am}'u, \quad \text{eben so findet man} \quad \mathrm{am}\,u = l\,\mathfrak{A}\mathrm{m}'u.$$

Vertauscht man noch die beiden conjugirten Modul, so hat man

$$\mathfrak{Am}'u = \mathfrak{L}\,\mathrm{am}\,u \quad \text{und} \quad \mathrm{am}'u = l\,\mathfrak{Am}\,u.$$

Anmerkung. Setzt man den Modul $k = 0$, so wird $\mathrm{am}\,u = u$, also ist $\mathfrak{L}u = \mathfrak{Am}\,u$ für den Modul $= 1$ und $lu = \mathrm{am}\,u$ für den Modul $= 1$.

§. 23.

Wir machen von diesen letzten Formeln sogleich Gebrauch. Vertauscht man in den Formeln (5.) des §. 19. die beiden conjugirten Modul, so sind sie

$$\mathfrak{Am}'(a \pm b) = \mathfrak{Arc\,Tang}(\mathfrak{Tn}'a\,\mathfrak{Dn}'b) \pm \mathfrak{Arc\,Tang}(\mathfrak{Tn}'b\,\mathfrak{Dn}'a).$$

Es ist aber $\mathfrak{Tn}'a . \mathfrak{Dn}'b = \mathrm{sn}\,a . \frac{\mathrm{dn}\,b}{\mathrm{cn}\,b} = \frac{\mathrm{sn}\,a}{\mathrm{snc}\,b}$ und $\mathfrak{Tn}'b . \mathfrak{Dn}'a = \frac{\mathrm{sn}\,b}{\mathrm{snc}\,a}$, $\mathfrak{Am}'(a \pm b) = \mathfrak{L}\,\mathrm{am}\,(a \pm b)$, und $\mathfrak{Arc\,Tang}(t) = \mathfrak{L}\,\mathrm{arc\,sin}\,(t)$, folglich haben wir

$$1. \quad \begin{cases} \mathfrak{L}\,\mathrm{am}\,(a+b) = \mathfrak{L}\,\mathrm{arc\,sin}\left(\frac{\mathrm{sn}\,a}{\mathrm{snc}\,b}\right) + \mathfrak{L}\,\mathrm{arc\,sin}\left(\frac{\mathrm{sn}\,b}{\mathrm{snc}\,a}\right), \\ \mathfrak{L}\,\mathrm{am}\,(a-b) = \mathfrak{L}\,\mathrm{arc\,sin}\left(\frac{\mathrm{sn}\,a}{\mathrm{snc}\,b}\right) - \mathfrak{L}\,\mathrm{arc\,sin}\left(\frac{\mathrm{sn}\,b}{\mathrm{snc}\,a}\right). \end{cases}$$

Damit der erste Theil dieser Formel reell sei, mufs $\frac{\mathrm{sn}\,a}{\mathrm{snc}\,b}$ als cyklischer Sinus nicht > 1, und auch nicht $= 1$ sein, weil $\mathfrak{L}\,\mathrm{arc\,sin}\,(1) = \mathfrak{L}\frac{\pi}{2}$ unendlich ist; setzen wir aber $\mathrm{snc}\,b > \mathrm{sn}\,a$, so mufs $K - b > a$ und also sein

$$a + b < K.$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so ist auch $K - a > b$, also $\mathrm{snc}\,a > \mathrm{sn}\,b$, folglich $\frac{\mathrm{sn}\,b}{\mathrm{snc}\,a} < 1$, und also auch der zweite Theil der Formeln (1.) reell. Beide Formeln (1.) sind also reell, wenn $a + b < K$ ist. Setzt man in den Formeln (1.) noch $K - a$ für a, so verwandelt sich $a + b$ in $K - (a - b)$ und $a - b$ in $K - (a + b)$, und es ist also auch

$$2. \quad \begin{cases} \mathfrak{L}\,\mathrm{amc}\,(a+b) = \mathfrak{L}\,\mathrm{arc\,sin}\left(\frac{\mathrm{snc}\,a}{\mathrm{snc}\,b}\right) - \mathfrak{L}\,\mathrm{arc\,sin}\left(\frac{\mathrm{sn}\,b}{\mathrm{sn}\,a}\right), \\ \mathfrak{L}\,\mathrm{amc}\,(a-b) = \mathfrak{L}\,\mathrm{arc\,sin}\left(\frac{\mathrm{snc}\,a}{\mathrm{snc}\,b}\right) + \mathfrak{L}\,\mathrm{arc\,sin}\left(\frac{\mathrm{sn}\,b}{\mathrm{sn}\,a}\right). \end{cases}$$

Diese Formeln sind reell, wenn $a > b$, und keines dieser Argumente $> K$ ist.

Die Anwendung der Formeln (1.) unter der Voraussetzung, dafs $a + b > K$ sei, setzt die Kenntnifs des Verhaltens der Function $\mathfrak{L}\varphi$ unter der Voraussetzung, dafs $\varphi > \frac{\pi}{2}$ ist, voraus. Stellt man die Formeln (1.) wieder in der Gestalt

$$\mathfrak{L}\,\mathrm{am}(a\pm b) = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,b}{\mathrm{cn}\,b}\right) \pm \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{cn}\,a}\right)$$

dar, und setzt man ai für a, wie auch bi für b, so hat man nach §. 20. (und Theil I. §. 48. Zusatz) auf der Stelle die neuen Formeln

$$3.\quad \begin{cases} l\,\mathfrak{Am}(a+b) = \mathrm{arc\,tang}\left(\dfrac{\mathfrak{Sn}\,a\,\mathfrak{Dn}\,b}{\mathfrak{Cn}\,b}\right) + \mathrm{arc\,tang}\left(\dfrac{\mathfrak{Sn}\,b\,\mathfrak{Dn}\,a}{\mathfrak{Cn}\,a}\right), \\ l\,\mathfrak{Am}(a-b) = \mathrm{arc\,tang}\left(\dfrac{\mathfrak{Sn}\,a\,\mathfrak{Dn}\,b}{\mathfrak{Cn}\,b}\right) - \mathrm{arc\,tang}\left(\dfrac{\mathfrak{Sn}\,b\,\mathfrak{Dn}\,a}{\mathfrak{Cn}\,a}\right). \end{cases}$$

Setzt man in den Formeln (1.) bloſs bi für b, so werden sie

$$4.\quad \begin{cases} \mathfrak{L}\,\mathrm{am}(a+bi) = \mathfrak{L}\,\mathrm{arc\,sin}\left(\dfrac{\mathrm{sn}\,a\,\mathfrak{Dn}\,b}{\mathfrak{Cn}\,b}\right) + i\,\mathrm{arc\,tang}\left(\dfrac{\mathfrak{Sn}\,b}{\mathrm{snc}\,a}\right), \\ \mathfrak{L}\,\mathrm{am}(a-bi) = \mathfrak{L}\,\mathrm{arc\,sin}\left(\dfrac{\mathrm{sn}\,a\,\mathfrak{Dn}\,b}{\mathfrak{Cn}\,b}\right) - i\,\mathrm{arc\,tang}\left(\dfrac{\mathfrak{Sn}\,b}{\mathrm{snc}\,a}\right), \end{cases}$$

und verwandeln sich also, wenn man die cyklischen Functionen statt der hyperbolischen einführt, in

$$5.\quad \begin{cases} \mathfrak{L}\,\mathrm{am}(a+bi) = \mathfrak{L}\,\mathrm{arc\,sin}(\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}'b) + i.\,\mathrm{arc\,tang}\left(\dfrac{\mathrm{tn}'b}{\mathrm{snc}\,a}\right), \\ \mathfrak{L}\,\mathrm{am}(a-bi) = \mathfrak{L}\,\mathrm{arc\,sin}(\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}'b) - i.\,\mathrm{arc\,tang}\left(\dfrac{\mathrm{tn}'b}{\mathrm{snc}\,a}\right). \end{cases}$$

Zusatz. Setzt man in den Formeln (1.), (3.) und (4.) den Modul $k=0$, so wird $\mathrm{am}(a+b) = \mathfrak{Am}(a+b) = a+b$, $\mathrm{sn}\,a$ verwandelt sich nun in $\sin a$, $\mathrm{sn}\,b$ in $\sin b$, $\mathrm{snc}\,a$ in $\cos a$, $\mathrm{snc}\,b$ in $\cos b$, $\mathfrak{Sn}\,a$ in $\mathfrak{Sin}\,a$, $\mathfrak{Cn}\,b$ in $\mathfrak{Cos}\,b$, $\mathfrak{Dn}\,b$ in 1 und $\mathfrak{Dn}\,a$ in 1, daher hat man nun

$$6.\quad \begin{cases} \mathfrak{L}(a+b) = \mathfrak{L}\,\mathrm{arc\,sin}\left(\dfrac{\sin a}{\cos b}\right) + \mathfrak{L}\,\mathrm{arc\,sin}\left(\dfrac{\sin b}{\cos a}\right), \\ \mathfrak{L}(a-b) = \mathfrak{L}\,\mathrm{arc\,sin}\left(\dfrac{\sin a}{\cos b}\right) - \mathfrak{L}\,\mathrm{arc\,sin}\left(\dfrac{\sin b}{\cos a}\right); \end{cases}$$

$$7.\quad \begin{cases} l(a+b) = \mathrm{arc\,tang}\left(\dfrac{\mathfrak{Sin}\,a}{\mathfrak{Cos}\,b}\right) + \mathrm{arc\,tang}\left(\dfrac{\mathfrak{Sin}\,b}{\mathfrak{Cos}\,a}\right), \\ l(a-b) = \mathrm{arc\,tang}\left(\dfrac{\mathfrak{Sin}\,a}{\mathfrak{Cos}\,b}\right) - \mathrm{arc\,tang}\left(\dfrac{\mathfrak{Sin}\,b}{\mathfrak{Cos}\,a}\right); \end{cases}$$

$$8.\quad \begin{cases} \mathfrak{L}(a+bi) = \mathfrak{L}\,\mathrm{arc\,sin}\left(\dfrac{\sin a}{\mathfrak{Cos}\,b}\right) + i\,\mathrm{arc\,tang}\left(\dfrac{\mathfrak{Sin}\,b}{\cos a}\right), \\ \mathfrak{L}(a-bi) = \mathfrak{L}\,\mathrm{arc\,sin}\left(\dfrac{\sin a}{\mathfrak{Cos}\,b}\right) - i\,\mathrm{arc\,tang}\left(\dfrac{\mathfrak{Sin}\,b}{\cos a}\right); \end{cases}$$

$$9.\quad \begin{cases} l(a+bi) = \mathrm{arc\,tang}\left(\dfrac{\mathfrak{Sin}\,a}{\cos b}\right) + i\,\mathfrak{L}\,\mathrm{arc\,sin}\left(\dfrac{\sin b}{\mathfrak{Cos}\,a}\right), \\ l(a-bi) = \mathrm{arc\,tang}\left(\dfrac{\mathfrak{Sin}\,a}{\cos b}\right) - i\,\mathfrak{L}\,\mathrm{arc\,sin}\left(\dfrac{\sin b}{\mathfrak{Cos}\,a}\right). \end{cases}$$

Diese im ersten Theile übergangenen Formeln, welche wir hier nachtragen muſsten, lassen sich auch leicht auf eine ganz elementare Weise herleiten.

§. 24.

Die Werthe von $\mathfrak{Am}(u \pm 2mK')$ und $\mathrm{am}(u \pm 2miK')$.

Der uneingeschränkte Gebrauch, welchen wir in der Theorie der Modular-Functionen von den schon im ersten Theile behandelten vermittelnden Functionen $\mathfrak{L}\varphi$ und $l\varphi$ zu machen haben, erfordert eine nachträgliche Betrachtung des Verhaltens der Function $\mathfrak{L}\varphi$ für den Fall, in welchem $\varphi > \frac{\pi}{2}$ und also $\mathfrak{L}\varphi$ imaginär wird.

Da $\cos(\varphi \pm m\pi) = (-1)^m \cos\varphi$ ist, so ist auch

$$\frac{\partial\varphi}{\cos(\varphi \pm m\pi)} = (-1)^m \cdot \frac{\partial\varphi}{\cos\varphi}.$$

Das Integral dieser Gleichung ist nach Theil I. §. 46.

$$\mathfrak{L}(\varphi \pm m\pi) = (-1)^m \mathfrak{L}\varphi + a;$$

wenn man mit a die unbekannte Constante bezeichnet, welche bei der Integration hinzukommt. Setzt man $\varphi = 0$, so hat man

$$a = \mathfrak{L}(\pm m\pi) = \pm\mathfrak{L}(m\pi).$$

Da nun also $\quad \mathfrak{Sin}\,a = \pm\,\mathfrak{Sin}\,\mathfrak{L}(m\pi) = \pm \operatorname{tang} m\pi = 0,$

$$\mathfrak{Cos}\,a = \mathfrak{Cos}\,\mathfrak{L}(m\pi) = \frac{1}{\cos m\pi} = (-1)^m$$

ist, so ist nach Theil I. §. 16. der Arcus $a = \pm m\pi i$, und also

$$1. \quad \mathfrak{L}(\varphi \pm m\pi) = (-1)^m . \mathfrak{L}\varphi \pm m\pi i.$$

Die in dieser Formel vorkommenden Vorzeichen $\pm$ können auch einzeln in $\mp$ abgeändert werden. Setzt man $m = 1$, so hat man

$$2. \quad \begin{cases} \mathfrak{L}(\pi + \varphi) = -\mathfrak{L}\varphi \pm \pi i \quad \text{und} \\ \mathfrak{L}(\pi - \varphi) = +\mathfrak{L}\varphi \pm \pi i. \end{cases}$$

Setzt man in dieser Formel $\frac{\pi}{2} - \varphi$ für φ, so erhält man

$$3. \quad \mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = \mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \pm \pi i.$$

Wir prüfen auch diese Formel, indem wir auf beiden Seiten die hyperbolischen Sinus und Cosinus nehmen; dann ist nach Theil I. §. 16.

$$\mathfrak{Sin}\,\mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\mathfrak{Sin}\,\mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right);$$

$$\mathfrak{Cos}\,\mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\mathfrak{Cos}\,\mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right).$$

Die erste dieser Gleichungen ist einerlei mit

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right),$$

und die zweite ist einerlei mit

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right);$$

aus der Richtigkeit dieser beiden Gleichungen folgt auch die der Gleichung (3.).

Multipliciren wir die Gleichung (1.) noch mit i, so erhalten wir $l(\varphi i \pm m\pi i) = (-1)^m . l(\varphi i) \pm m\pi$, und wird hier $\frac{\varphi}{i}$ für φ gesetzt, so entsteht

$$4. \quad l(\varphi \pm m\pi i) = (-1)^m . l\varphi \pm m\pi.$$

Setzt man hierin $m=1$, so hat man

$$5. \quad \begin{cases} l(\varphi+\pi i) = -l\varphi+\pi, \text{ und wenn man } \varphi-\frac{\pi i}{2} \text{ für } \varphi \text{ setzt} \\ l\left(\varphi+\frac{\pi i}{2}\right) = -l\left(\varphi-\frac{\pi i}{2}\right)+\pi, \text{ oder} \\ l\left(\frac{\pi i}{2}+\varphi\right) = \quad l\left(\frac{\pi i}{2}-\varphi\right)+\pi. \end{cases}$$

In den Gleichungen (1.) — (3.) kann noch auf der rechten Seite ein beliebiges Vielfaches von $2\pi i$, und in den Gleichungen (4.) und (5.) noch ein beliebiges Vielfaches von 2π auf der rechten Seite hinzugefügt werden.

Setzt man nun in der Gleichung (1.) den Arcus $\varphi = \text{am}'u$, so ist auch

$$\mathfrak{L}(\text{am}'u \pm m\pi) = (-1)^m \mathfrak{L}\,\text{am}'u \pm m\pi i,$$

Da aber $\text{am}'u \pm m\pi = \text{am}'(u \pm 2mK')$ nach §. 15. ist, so ist

$$\mathfrak{L}\,\text{am}'(u \pm 2mK') = (-1)^m \mathfrak{L}\,\text{am}'u \pm m\pi i,$$

und nach §. 22. Formel (3.) ist diese Gleichung einerlei mit

$$6. \quad \mathfrak{Am}(u \pm 2mK') = (-1)^m . \mathfrak{Am}\,u \pm m\pi i.$$

In dieser Gleichung darf auch $\pm$ mit $\mp$ zusammengestellt werden; multiplicirt man dieselbe mit i, so hat man $\text{am}(ui \pm 2miK') = (-1)^m . \text{am}(ui) \pm m\pi$, und setzt man hierin $\frac{u}{i}$ für u an die Stelle, so hat man

$$7. \quad \text{am}(u \pm 2miK') = (-1)^m . \text{am}\,u \pm m\pi.$$

§. 25.

Die cyklischen Modular-Functionen und Amplituden der Argumente von der Form $u+2mK+2niK'$.

Da nach §. 24. ist $\text{am}(u+2niK') = (-1)^n . \text{am}\,u \pm n\pi$, so erhält man, wenn $u+2mK$ für u gesetzt wird, $\text{am}(u+2mK+2niK') = (-1)^n \text{am}(u+2mK) \pm n\pi$, und da nach §. 15. ist $\text{am}(u+2mK) = m\pi + \text{am}\,u$,

so erhält man

$$\mathrm{am}(u+2mK+2niK') = (-1)^n.\,\mathrm{am}\,u+(m\pm n)\pi.$$

Setzt man umgekehrt in der Formel $\mathrm{am}(u+2mK) = \mathrm{am}\,u+m\pi$ für u an die Stelle $u+2niK'$, so hat man $\mathrm{am}(u+2mK+2niK') = \mathrm{am}(u+2niK')+m\pi$, und also, wie vorhin,

$$1. \quad \mathrm{am}(u+2mK+2niK') = (m\pm n)\pi+(-1)^n.\,\mathrm{am}\,u.$$

Nimmt man die cyklischen Sinus der beiden gleichen Ausdrücke, so erhält man mittelst der Formel $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$:

$$\sin\mathrm{am}(u+2mK+2niK') = (-1)^{m+n}.\sin((-1)^n.\,\mathrm{am}\,u) = (-1)^{m+2n}.\,\sin\mathrm{am}\,u,$$

und da $(-1)^{m+2n} = (-1)^m$ ist, so ist

$$2. \quad \mathrm{sn}(u+2mK+2niK') = (-1)^m.\,\mathrm{sn}\,u.$$

Nimmt man die cyklischen Cosinus, so hat man $\cos\mathrm{am}(u+2mK+2niK') = (-1)^{m+n}.\,\cos((-1)^n\,\mathrm{am}\,u) = (-1)^{m+n}.\,\cos\mathrm{am}\,u,$ und also

$$3. \quad \mathrm{cn}(u+2mK+2niK') = (-1)^{m+n}.\,\mathrm{cn}\,u.$$

Wird (2.) durch (3.) dividirt, so entsteht

$$4. \quad \mathrm{tn}(u+2mK+2niK') = (-1)^n.\,\mathrm{tn}\,u.$$

Differenziirt man die Gleichung (1.), so erhält man auf der Stelle

$$5. \quad \mathrm{dn}(u+2mK+2niK') = (-1)^n.\,\mathrm{dn}\,u.$$

Da

$$\mathrm{sn}(u+4mK+4niK') = \mathrm{sn}\,u,$$
$$\mathrm{cn}(u+4mK+4niK') = \mathrm{cn}\,u,$$
$$\mathrm{dn}(u+4mK+4niK') = \mathrm{dn}\,u,$$
$$\mathrm{tn}(u+4mK+4niK') = \mathrm{tn}\,u$$

ist, so sieht man, *dafs die cyklischen Modular-Functionen doppelt periodisch sind, reell und imaginär periodisch zugleich; der Umfang einer reellen Periode ist* 4K *und der Umfang einer imaginären Periode ist* 4iK′.

§. 26.

Die hyperbolischen Modular-Functionen und Amplituden der Argumente von der Form $u\pm mK'$.

Die hyperbolischen Modular-Sinus und Modular-Cosinus $\mathfrak{Sn}\,u$ und $\mathfrak{Cn}\,u$ sind vorzüglich darin von den gewöhnlichen hyperbolischen Sinus und Cosinus verschieden, dafs sie viel rascher wachsen, wenn das Argument u zunimmt, und schon unendlich grofs sind, ehe das Argument u unendlich grofs geworden ist; die Functionen $\mathfrak{Sin}\,u$ und $\mathfrak{Cos}\,u$ hingegen sind erst dann unendlich, wenn auch u unendlich grofs geworden ist. Setzen wir

$u = K'$, so ist, weil nach §. 22. überhaupt $\mathfrak{Sn}\,u = \mathrm{tn}'u$ ist, auch $\mathfrak{Sn}\,K' = \mathrm{tn}'K'$, und da $\mathrm{tn}\,K = \mathrm{tn}'K' = \frac{1}{0}$ ist, so ist auch

$$\mathfrak{Sn}\,K' = \tfrac{1}{0}.$$

Ferner ist $\mathfrak{Cn}\,K' = \frac{1}{\mathrm{cn}'K'}$, und also auch $\mathfrak{Cn}\,K' = \frac{1}{0}$. Da $\mathfrak{Tn}\,K' = \mathrm{sn}'K'$ ist, so ist $\mathfrak{Tn}\,K' = 1$; weil endlich $\mathfrak{Dn}\,K' = \frac{\mathrm{dn}'K'}{\mathrm{cn}'K'} = \frac{k'}{0}$ ist, so stellen wir also zusammen:

$$1. \quad \mathfrak{Sn}\,K' = \tfrac{1}{0}, \quad \mathfrak{Cn}\,K' = \tfrac{1}{0}, \quad \mathfrak{Tn}\,K' = 1, \quad \mathfrak{Dn}\,K' = \tfrac{1}{0}.$$

Da $\mathfrak{Sn}\,K' = \mathfrak{Sin}\,\mathfrak{Am}\,K' = \frac{1}{0}$ ist, so ist auch noch

$$2. \quad \mathfrak{Am}\,K' = \tfrac{1}{0}.$$

Ferner ist $\mathfrak{Sn}(K' - u) = \mathrm{tn}'(K' - u) = \frac{1}{k\,\mathrm{tn}'u}$, und da $\mathrm{tn}'u = \mathfrak{Sn}\,u$ ist, so ist

$$3. \quad \begin{cases} \mathfrak{Sn}(K' - u) = \dfrac{1}{k\,\mathfrak{Sn}\,u}, & \text{eben so findet man} \\ \mathfrak{Cn}(K' - u) = \dfrac{\mathfrak{Dn}\,u}{k\,\mathfrak{Sn}\,u}, \\ \mathfrak{Tn}(K' - u) = \dfrac{1}{\mathfrak{Dn}\,u}, \\ \mathfrak{Dn}(K' - u) = \dfrac{1}{\mathfrak{Tn}\,u}. \end{cases}$$

Uebrigens können auch die drei letzten Formeln eben so leicht aus der ersten hergeleitet werden.

Setzen wir der Kürze wegen $\mathfrak{Sn}(K' - u) = \mathfrak{Snc}\,u$, $\mathfrak{Cn}(K' - u) = \mathfrak{Cnc}\,u$, $\mathfrak{Tn}(K' - u) = \mathfrak{Tnc}\,u$, $\mathfrak{Dn}(K' - u) = \mathfrak{Dnc}\,u$ und $\mathfrak{Am}(K' - u) = \mathfrak{Amc}\,u$, so ist also

$$4. \quad \begin{cases} \mathfrak{Snc}\,u = \dfrac{1}{k\,\mathfrak{Sn}\,u}, & \mathfrak{Sn}\,u = \dfrac{1}{k\,\mathfrak{Snc}\,u}, \\ \mathfrak{Cnc}\,u = \dfrac{\mathfrak{Dn}\,u}{k\,\mathfrak{Sn}\,u}, & \mathfrak{Cn}\,u = \dfrac{\mathfrak{Dnc}\,u}{k\,\mathfrak{Snc}\,u}, \\ \mathfrak{Tnc}\,u = \dfrac{1}{\mathfrak{Dn}\,u}, & \mathfrak{Tn}\,u = \dfrac{1}{\mathfrak{Dnc}\,u}, \\ \mathfrak{Dnc}\,u = \dfrac{1}{\mathfrak{Tn}\,u}, & \mathfrak{Dn}\,u = \dfrac{1}{\mathfrak{Tnc}\,u}, \\ \mathfrak{Amc}\,u = \mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\left(\dfrac{1}{\mathfrak{Dn}\,u}\right). \end{cases}$$

Die Function $\mathfrak{Am}\,u$ ist also nur reell zwischen den Grenzen $u = 0$ und $u = K'$; wird $u > K'$, so ist $\mathfrak{Am}\,u$ imaginär. Da $\mathfrak{Dn}\,u = \frac{\mathrm{dn}'u}{\mathrm{cn}'u} = \frac{1}{\mathrm{snc}'u}$ ist, so ist auch

$$\mathfrak{Amc}\,u = \mathfrak{Arc\,Tang}\,(\mathrm{snc}'u) = \mathfrak{L}\,\mathrm{arc\,sin}\,(\mathrm{snc}'u),$$

und also

$$\mathfrak{Amc}\,u = \mathfrak{L}\,\mathrm{amc}'u,$$

was auch unmittelbar aus Formel (3.) des §. 22. folgt.

Setzt man in den Formeln (3.) $-u$ für u, so hat man

$$\mathfrak{Sn}(K'+u) = -\mathfrak{Sn}(K'-u), \qquad \mathfrak{Cn}(K'+u) = -\mathfrak{Cn}(K'-u),$$
$$\mathfrak{Tn}(K'+u) = \mathfrak{Tn}(K'-u), \qquad \mathfrak{Dn}(K'+u) = -\mathfrak{Dn}(K'-u).$$

Setzt man hierin $K'-u$ für u, so hat man

$$\mathfrak{Sn}(2K'-u) = -\mathfrak{Sn}\,u, \quad \mathfrak{Cn}(2K'-u) = -\mathfrak{Cn}\,u, \quad \mathfrak{Tn}(2K'-u) = \mathfrak{Tn}\,u,$$
$$\mathfrak{Dn}(2K'-u) = -\mathfrak{Dn}\,u,$$

und setzt man $-u$ für u, so hat man

$$\mathfrak{Sn}(2K'+u) = \mathfrak{Sn}\,u, \quad \mathfrak{Cn}(2K'+u) = -\mathfrak{Cn}\,u, \quad \mathfrak{Tn}(2K'+u) = -\mathfrak{Tn}\,u,$$
$$\mathfrak{Dn}(2K'+u) = -\mathfrak{Dn}\,u.$$

Hieraus schliefst man überhaupt

$$5.\quad \begin{cases} \mathfrak{Sn}(u+2mK') = \mathfrak{Sn}\,u, & \mathfrak{Cn}(u+2mK') = (-1)^m.\,\mathfrak{Cn}\,u, \\ \mathfrak{Tn}(u+2mK') = (-1)^m.\,\mathfrak{Tn}\,u, & \mathfrak{Dn}(u+2mK') = (-1)^m.\,\mathfrak{Dn}\,u. \end{cases}$$

Setzt man $2m$ für m, so verwandelt sich $(-1)^m$ in $+1$, woraus zu ersehen ist, dafs die hyperbolischen Modular-Functionen in einer zweiten Hinsicht periodisch sind; diese Perioden sind reell, und der Umfang einer jeden ist $=4K'$.

Verbindet man die Formeln (3.) — (6.) des §. 21. mit den vorstehenden, so erhält man die allgemeineren

$$6.\quad \begin{cases} \mathfrak{Sn}(u+2mK'+2niK) = (-1)^n\,\mathfrak{Sn}\,u, \\ \mathfrak{Cn}(u+2mK'+2niK) = (-1)^{m+n}.\,\mathfrak{Cn}\,u, \\ \mathfrak{Tn}(u+2mK'+2niK) = (-1)^m.\,\mathfrak{Tn}\,u, \\ \mathfrak{Dn}(u+2mK'+2niK) = (-1)^m.\,\mathfrak{Dn}\,u. \end{cases}$$

Eine weitere Ausführung scheint hier überflüssig zu sein.

§. 27.

Cyklische Functionen imaginärer Argumente zurückgeführt auf cyklische Functionen mit reellem Argumente.

Es ist $\mathrm{sn}(ui) = i.\,\mathfrak{Sn}\,u$, und da $\mathfrak{Sn}\,u = \mathrm{tn}'u$ ist, so ist

$$1.\quad \begin{cases} \mathrm{sn}(ui) = i\,\mathrm{tn}'u, \text{ eben so findet man} \\ \mathrm{cn}(ui) = \dfrac{1}{\mathrm{cn}'u}, \\ \mathrm{tn}(ui) = i\,\mathrm{sn}'u, \\ \mathrm{dn}(ui) = \dfrac{\mathrm{dn}'u}{\mathrm{cn}'u} = \dfrac{1}{\mathrm{snc}'u}. \end{cases}$$

Benutzt man die Formeln (17.) des §. 13., so setzt man aus den vorstehenden Formeln sogleich zusammen:

$$2.\quad \begin{cases} \operatorname{snc}(ui) = \dfrac{1}{\operatorname{dn}'u} = \dfrac{\operatorname{dnc}'u}{k}, \\ \operatorname{cnc}(ui) = \dfrac{ik'.\operatorname{sn}'u}{\operatorname{dn}'u} = \dfrac{ik'}{k}\operatorname{cnc}'u, \\ \operatorname{tnc}(ui) = \dfrac{1}{ik'.\operatorname{sn}'u} = \dfrac{1}{ik'}.\dfrac{\operatorname{dnc}'u}{\operatorname{cnc}'u}, \\ \operatorname{dnc}(ui) = \dfrac{k'\operatorname{cn}'u}{\operatorname{dn}'u} = k'.\operatorname{snc}'u. \end{cases}$$

Vertauscht man in diesen Formeln die beiden conjugirten Modul mit einander, so können sie auch also dargestellt werden:

$$3.\quad \begin{cases} \operatorname{sn}u = \dfrac{\operatorname{tn}'(ui)}{i}, \quad \operatorname{cn}u = \dfrac{1}{\operatorname{cn}'(ui)}, \\ \operatorname{tn}u = \dfrac{\operatorname{sn}'(ui)}{i}, \quad \operatorname{dn}u = \dfrac{\operatorname{dn}'(ui)}{\operatorname{cn}'(ui)} = \dfrac{1}{\operatorname{snc}'(ui)}, \end{cases}$$

und für die Functionen des Complementes erhält man

$$4.\quad \begin{cases} \operatorname{snc}u = \dfrac{1}{\operatorname{dn}'(ui)} = \dfrac{\operatorname{dnc}'(ui)}{k}, \quad \operatorname{cnc}u = \dfrac{k'}{ik}\operatorname{cnc}'(ui), \\ \operatorname{tnc}u = \dfrac{i}{k'\operatorname{sn}'(ui)}, \quad \operatorname{dnc}u = k'.\operatorname{snc}'(ui). \end{cases}$$

Zusatz. Es ist $\operatorname{am}u = \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{1+i\operatorname{tn}u}{1-i\operatorname{tn}u}}$, also $\frac{\pi}{2}-\operatorname{am}u = \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\operatorname{tn}u+i}{\operatorname{tn}u-i}}$; setzt man hierin $K-u$ für u, so verwandelt sich $\operatorname{tn}u$ in $\frac{1}{k'\operatorname{tn}u}$ und es ist also

$$\frac{\pi}{2}-\operatorname{amc}u = \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{1+ik'\operatorname{tn}u}{1-ik'\operatorname{tn}u}},$$ oder, weil $i\operatorname{tn}u = \operatorname{sn}'(ui)$ ist

$$5.\quad \frac{\pi}{2}-\operatorname{amc}u = \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{1+k'\operatorname{sn}'(ui)}{1-k'\operatorname{sn}'(ui)}},$$

und

$$6.\quad \operatorname{am}u = \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{1+\operatorname{sn}'(ui)}{1-\operatorname{sn}'(ui)}}.$$

Setzt man in der Formel für $\frac{\pi}{2}-\operatorname{amc}u$ noch ui statt u, so hat man

$$\frac{\pi}{2}-\operatorname{amc}(ui) = \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{1-k'\operatorname{sn}'u}{1+k'\operatorname{sn}'u}} = i\log\sqrt{\frac{1+k'\operatorname{sn}'u}{1-k'\operatorname{sn}'u}},$$

und also

$$\frac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{amc}(ui)}{i} = \log\sqrt{\frac{1+k'\operatorname{sn}'u}{1-k'\operatorname{sn}'u}},$$

oder

$$7.\quad \frac{\frac{\pi}{2}-\mathrm{amc}'(ui)}{i}=\log\sqrt{\frac{1+k\,\mathrm{sn}\,u}{1-k\,\mathrm{sn}\,u}}.$$

Es ist $\mathfrak{L}\,\mathrm{am}\,u=\log\sqrt{\frac{1+\mathrm{sn}\,u}{1-\mathrm{sn}\,u}}$; setzt man hierin $\frac{\pi}{2}-\mathrm{am}\,u$ für $\mathrm{am}\,u$, so hat man $\mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{am}\,u\right)=\log\sqrt{\frac{1+\mathrm{cn}\,u}{1-\mathrm{cn}\,u}}$; wird noch $K-u$ für u gesetzt, so entsteht $\mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{amc}\,u\right)=\log\sqrt{\frac{1+\mathrm{cnc}\,u}{1-\mathrm{cnc}\,u}}$, also auch

$$\mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{amc}(ui)\right)=\log\sqrt{\frac{1+\mathrm{cnc}(ui)}{1-\mathrm{cnc}(ui)}};$$

multiplicirt man diese Gleichung mit $-i$, so entsteht, wenn die beiden Modul k und k' vertauscht werden:

$$l\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\mathrm{amc}'(ui)}{i}\right)=\frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{1+\mathrm{cnc}'(ui)}{1-\mathrm{cnc}'(ui)}};$$

da aber $\mathrm{cnc}'(ui)=\frac{ik}{k'}\mathrm{cnc}\,u$ ist, so kann diese Formel auch also dargestellt werden

$$8.\quad l\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\mathrm{amc}'(ui)}{i}\right)=\frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{1+\frac{ik}{k'}\mathrm{cnc}\,u}{1-\frac{ik}{k'}\mathrm{cnc}\,u}}.$$

Die höhere Wichtigkeit der Formeln (7.) und (8.) wird bald nachher einleuchten.

Anmerkung. Nach Theil I. §. 38. ist $\mathfrak{L}\varphi=\log\mathrm{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\varphi\right)$, oder auch $\varphi=\log\mathrm{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}l\varphi\right)$; daher ist $e^{\varphi}=\mathrm{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}l\varphi\right)$ und $e^{-\varphi}=\mathrm{tang}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}l\varphi\right)$; also auch

$$\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}l\varphi=\mathrm{arc\,tang}(e^{\varphi}),\quad \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}l\varphi=\mathrm{arc\,tang}(e^{-\varphi}).$$

Werden diese beiden Gleichungen durch Addition und Subtraction mit einander verbunden, so erhält man

$$9.\quad \frac{\pi}{2}=\mathrm{arc\,tang}(e^{\varphi})+\mathrm{arc\,tang}(e^{-\varphi})\quad \text{und}$$

$$10.\quad l\varphi=\mathrm{arc\,tang}(e^{\varphi})-\mathrm{arc\,tang}(e^{-\varphi}).$$

Die Richtigkeit der ersten Gleichung erhellet von selbst, weil $e^{\varphi}.e^{-\varphi}=1$ ist. Entwickeln wir die Glieder auf der rechten Seite in Reihen, so ist

$$\text{arc tang}(e^{\varphi}) = e^{\varphi} - \frac{e^{3\varphi}}{3} + \frac{e^{5\varphi}}{5} - \frac{e^{7\varphi}}{7} + \frac{e^{9\varphi}}{9} - + \ldots.$$

$$\text{arc tang}(e^{-\varphi}) = e^{-\varphi} - \frac{e^{-3\varphi}}{3} + \frac{e^{-5\varphi}}{5} - \frac{e^{-7\varphi}}{7} + \frac{e^{-9\varphi}}{9} - + \ldots.$$

Hieraus erhält man durch Addition und Subtraction

$$\frac{\pi}{2} = 2\left(\mathfrak{Cos}\,\varphi - \frac{\mathfrak{Cos}\,3\varphi}{3} + \frac{\mathfrak{Cos}\,5\varphi}{5} - \frac{\mathfrak{Cos}\,7\varphi}{7} + \frac{\mathfrak{Cos}\,9\varphi}{9} - + \text{etc.}\right),$$

$$l\varphi = 2\left(\mathfrak{Sin}\,\varphi - \frac{\mathfrak{Sin}\,3\varphi}{3} + \frac{\mathfrak{Sin}\,5\varphi}{5} - \frac{\mathfrak{Sin}\,7\varphi}{7} + \frac{\mathfrak{Sin}\,9\varphi}{9} - + \text{etc.}\right),$$

oder, wenn man φi für φ setzt,

$$\frac{\pi}{2} = 2\left(\cos\varphi - \frac{\cos 3\varphi}{3} + \frac{\cos 5\varphi}{5} - \frac{\cos 7\varphi}{7} + \frac{\cos 9\varphi}{9} - + \text{etc.}\right),$$

$$\mathfrak{L}\varphi = 2\left(\sin\varphi - \frac{\sin 3\varphi}{3} + \frac{\sin 5\varphi}{5} - \frac{\sin 7\varphi}{7} + \frac{\sin 9\varphi}{9} - + \text{etc.}\right).$$

Setzt man in den Reihen für $\frac{\pi}{2}$ den beliebigen Arcus $\varphi = 0$, so erhält man die bekannte von Leibnitz gefundene Reihe. Die beiden Reihen für $l\varphi$ und $\mathfrak{L}\varphi$ wurden im ersten Theile, und zwar im Zusatze zu §. 57. auf eine minder einfache Weise hergeleitet.

Setzt man in der Formel (10.) $\varphi = \mathfrak{Am}'u$, so ist $l\varphi = \text{am}\,u$, und also

$$11.\quad \text{am}\,u = \text{arc tang}(e^{\mathfrak{Am}'u}) - \text{arc tang}(e^{-\mathfrak{Am}'u}).$$

Setzt man in dieser Gleichung ui für u, so verwandelt sie sich in

$$12.\quad \mathfrak{Am}\,u = \frac{\text{arc tang}(e^{i\,\text{am}'u}) - \text{arc tang}(e^{-i\,\text{am}'u})}{i}.$$

§. 28.

Nach §. 21. Formel 10. ist $\text{sn}(a \pm bi) = \frac{\text{sn}\,a\,\mathfrak{Cn}\,b\,\mathfrak{Dn}\,b \pm i\,\mathfrak{Sn}\,b\,\text{cn}\,a\,\text{dn}\,a}{1 + k^2\,\text{sn}^2 a\,\mathfrak{Sn}^2 b}$; führt man durchweg die cyklischen Functionen ein, so wird der Nenner $1 + k^2\text{sn}^2 a\,\text{tn}'^2 b = \frac{\text{cn}'^2 b + k^2\,\text{sn}^2 a\,\text{sn}'^2 b}{\text{cn}'^2 b} = \frac{1 - \text{dn}^2 a\,\text{sn}'^2 b}{\text{cn}'^2 b}$, der Zähler aber wird $\frac{\text{sn}\,a\,\text{dn}'b \pm i\,\text{sn}'b\,\text{cn}'b\,\text{cn}\,a\,\text{dn}\,a}{\text{cn}'^2 b}$, also ist

$$1.\quad \begin{cases} \text{sn}(a+bi) = \dfrac{\text{sn}\,a\,\text{dn}'b + i\,\text{sn}'b\,\text{cn}'b\,\text{cn}\,a\,\text{dn}\,a}{1 - \text{dn}^2 a\,\text{sn}'^2 b}, \\[2ex] \text{sn}(a-bi) = \dfrac{\text{sn}\,a\,\text{dn}'b - i\,\text{sn}'b\,\text{cn}'b\,\text{cn}\,a\,\text{dn}\,a}{1 - \text{dn}^2 a\,\text{sn}'^2 b}. \end{cases}$$

Der Zähler des Ausdrucks von $\text{cn}(a \pm bi)$ im §. 21. ist $\text{cn}\,a\,\mathfrak{Cn}\,b \mp i\,\text{sn}\,a\,\text{dn}\,a\,\mathfrak{Sn}\,b\,\mathfrak{Dn}\,b = \frac{\text{cn}\,a\,\text{cn}'b \mp i\,\text{sn}\,a\,\text{dn}\,a\,\text{sn}'b\,\text{dn}'b}{\text{cn}'^2 b}$, also ist

$$2.\quad \begin{cases} \operatorname{cn}(a+bi) = \dfrac{\operatorname{cn}a\operatorname{cn}'b - i\operatorname{sn}a\operatorname{dn}a\operatorname{sn}'b\operatorname{dn}'b}{1-\operatorname{dn}^2 a\operatorname{sn}'^2 b}, \\ \operatorname{cn}(a-bi) = \dfrac{\operatorname{cn}a\operatorname{cn}'b + i\operatorname{sn}a\operatorname{dn}a\operatorname{sn}'b\operatorname{dn}'b}{1-\operatorname{dn}^2 a\operatorname{sn}'^2 b}. \end{cases}$$

Wenn man die Formeln (1.) durch (2.) dividirt, so erhält man Ausdrücke für $\operatorname{tn}(a \pm bi)$, welche aber der Form nach ungehörig sind, weil Zähler und Nenner zugleich imaginär werden. Man erhält bessere Ausdrücke auf folgende Art. Es ist $i(b-ai) = a+bi$, also ist $\operatorname{tn}(a+bi) = i\operatorname{sn}'(b-ai)$, und da $\operatorname{sn}'(b-ai) = \dfrac{\operatorname{sn}'b\operatorname{dn}a - i\operatorname{sn}a\operatorname{cn}a\operatorname{cn}'b\operatorname{dn}'b}{1-\operatorname{dn}'^2 b\operatorname{sn}^2 a}$ ist, so erhält man

$$3.\quad \begin{cases} \operatorname{tn}(a+bi) = \dfrac{\operatorname{sn}a\operatorname{cn}a\operatorname{cn}'b\operatorname{dn}'b + i\operatorname{dn}a\operatorname{sn}'b}{1-\operatorname{sn}^2 a\operatorname{dn}'^2 b}, \\ \operatorname{tn}(a-bi) = \dfrac{\operatorname{sn}a\operatorname{cn}a\operatorname{cn}'b\operatorname{dn}'b - i\operatorname{dn}a\operatorname{sn}'b}{1-\operatorname{sn}^2 a\operatorname{dn}'^2 b}. \end{cases}$$

Der Zähler des Ausdrucks von $\operatorname{dn}(a \pm bi)$ in §. 21. ist

$$\operatorname{dn}a\,\mathfrak{Dn}\,b \mp ik^2\operatorname{sn}a\operatorname{cn}a\,\mathfrak{Sn}\,b\,\mathfrak{Cn}\,b,$$

und verwandelt sich in $\dfrac{\operatorname{dn}a\operatorname{dn}'b\operatorname{cn}'b \mp ik^2\operatorname{sn}a\operatorname{cn}a\operatorname{sn}'b}{\operatorname{cn}'^2 b}$, daher ist

$$4.\quad \begin{cases} \operatorname{dn}(a+bi) = \dfrac{\operatorname{dn}a\operatorname{dn}'b\operatorname{cn}'b - ik^2\operatorname{sn}a\operatorname{cn}a\operatorname{sn}'b}{1-\operatorname{dn}^2 a\operatorname{sn}'^2 b}, \\ \operatorname{dn}(a-bi) = \dfrac{\operatorname{dn}a\operatorname{dn}'b\operatorname{cn}'b + ik^2\operatorname{sn}a\operatorname{cn}a\operatorname{sn}'b}{1-\operatorname{dn}^2 a\operatorname{sn}'^2 b}. \end{cases}$$

Die Formeln (13.) im §. 21. werden

$$5.\quad \begin{cases} \operatorname{am}(a+bi) = \operatorname{arc\,tang}\left(\dfrac{\operatorname{tn}a\operatorname{dn}'b}{\operatorname{cn}'b}\right) + i\,\mathfrak{Arc\,Tang}(\operatorname{sn}'b\operatorname{dn}a), \\ \operatorname{am}(a-bi) = \operatorname{arc\,tang}\left(\dfrac{\operatorname{tn}a\operatorname{dn}'b}{\operatorname{cn}'b}\right) - i\,\mathfrak{Arc\,Tang}(\operatorname{sn}'b\operatorname{dn}a). \end{cases}$$

Setzt man in den vorstehenden Formeln $b = K'$, also $\operatorname{sn}'b = 1$, $\operatorname{cn}'b = 0$, $\operatorname{dn}'b = k$ und $a = u$, so erhält man

$$6.\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(u+iK') = \dfrac{1}{k\operatorname{sn}u} \quad\text{und}\quad \operatorname{sn}(u-iK') = \dfrac{1}{k\operatorname{sn}u}, \\ \operatorname{cn}(u+iK') = \dfrac{-i\operatorname{dn}u}{k\operatorname{sn}u} \quad\text{und}\quad \operatorname{cn}(u-iK') = \dfrac{i\operatorname{dn}u}{k\operatorname{sn}u}, \\ \operatorname{tn}(u+iK') = \dfrac{i}{\operatorname{dn}u} \quad\text{und}\quad \operatorname{tn}(u-iK') = \dfrac{-i}{\operatorname{dn}u}, \\ \operatorname{dn}(u+iK') = \dfrac{-i}{\operatorname{tn}u} \quad\text{und}\quad \operatorname{dn}(u-iK') = \dfrac{i}{\operatorname{tn}u}, \\ \operatorname{am}(u+iK') = \dfrac{\pi}{2} + i\,\mathfrak{Arc\,Tang}(\operatorname{dn}u); \\ \operatorname{am}(u-iK') = \dfrac{\pi}{2} - i\,\mathfrak{Arc\,Tang}(\operatorname{dn}u). \end{cases}$$

Werden die gegenüberstehenden Werthe mit einander verglichen, so hat man

$$7.\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(u+iK') = \operatorname{sn}(u-iK'); & \operatorname{tn}(u+iK') = -\operatorname{tn}(u-iK'); \\ \operatorname{cn}(u+iK') = -\operatorname{cn}(u-iK'); & \operatorname{dn}(u+iK') = -\operatorname{dn}(u-iK'). \end{cases}$$

Die Relationen unter den Amplituden sind

$$8.\quad \begin{cases} \operatorname{am}(u+iK') + \operatorname{am}(u-iK') = \pi, \\ \mathfrak{Tang}\left(\frac{\operatorname{am}(u+iK') - \operatorname{am}(u-iK')}{2i}\right) = \operatorname{dn} u. \end{cases}$$

Setzt man in den Formeln (7.) $u+iK'$ für u, so werden sie

$$9.\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(u+2iK') = \operatorname{sn} u, & \operatorname{tn}(u+2iK') = -\operatorname{tn} u, \\ \operatorname{cn}(u+2iK') = -\operatorname{cn} u, & \operatorname{dn}(u+2iK') = -\operatorname{dn} u \quad \text{und} \\ \operatorname{am}(u+2iK') = \pi - \operatorname{am} u. \end{cases}$$

Aus den vorstehenden Formeln folgt ohne Weiteres

$$10.\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(u+2niK') = \operatorname{sn} u, & \operatorname{cn}(u+2niK') = (-1)^n.\operatorname{cn} u, \\ \operatorname{tn}(u+2niK') = (-1)^n.\operatorname{cn} u, & \operatorname{dn}(u+2niK') = (-1)^n.\operatorname{dn} u, \end{cases}$$

und für die Amplituden erhält man

$$11.\quad \operatorname{am}(u+2niK') = n\pi + (-1)^n.\operatorname{am} u.$$

Die Formeln (6.) — (11.) hätte man auch leicht aus denen des §. 26. herleiten können. Setzt man in den Formeln (6.) $u=0$, so erhält man

$$12.\quad \operatorname{sn}(iK') = \tfrac{1}{0}, \quad \operatorname{cn}(iK') = \frac{i}{0}, \quad \operatorname{tn}(iK') = i, \quad \operatorname{dn}(iK') = \frac{-i}{0}.$$

Setzt man in den Formeln (9.) $u=0$, so hat man

$$13.\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(2iK') = 0, & \operatorname{tn}(2iK') = 0, \\ \operatorname{cn}(2iK') = -1, & \operatorname{dn}(2iK') = -1. \end{cases}$$

Wird aber $u = iK'$ gesetzt, so findet man

$$14.\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(3iK') = \tfrac{1}{0}, & \operatorname{tn}(3iK') = -i, \\ \operatorname{cn}(3iK') = -\frac{i}{0}, & \operatorname{dn}(3iK') = \frac{i}{0}. \end{cases}$$

Setzt man in den Formeln (6.) $u+K$ für u, so werden sie

$$15.\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(u+K+iK') = \frac{1}{k \operatorname{snc} u}, \\ \operatorname{cn}(u+K+iK') = -\frac{i}{k}.\frac{\operatorname{dnc} u}{\operatorname{snc} u} = \frac{k'}{ik}.\frac{1}{\operatorname{cn} u}, \\ \operatorname{tn}(u+K+iK') = \frac{i}{\operatorname{dnc} u}, \\ \operatorname{dn}(u+K+iK') = \frac{i}{\operatorname{tnc} u} = ik' \operatorname{tn} u, \\ \operatorname{am}(u+K+iK') = \frac{\pi}{2} + i\,\mathfrak{L} \operatorname{arc\,sin}(\operatorname{dnc} u). \end{cases}$$

Setzt man hierin $u=0$, so entstehen die Formeln

$$16.\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(K+iK') = \dfrac{1}{k}, & \operatorname{tn}(K+iK') = \dfrac{i}{k'}, \\ \operatorname{cn}(K+iK') = \dfrac{k'}{ik}, & \operatorname{dn}(K+iK') = 0, \\ \operatorname{am}(K+iK') = \dfrac{\pi}{2} + i\mathfrak{L}\operatorname{arc}\sin(k'). \end{cases}$$

§. 29.

Setzt man in den Formeln (10.) noch $u+2mK$ für u, so erhält man

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(u+2mK+2niK') &= (-1)^m.\operatorname{sn}u, \\ \operatorname{cn}(u+2mK+2niK') &= (-1)^{m+n}.\operatorname{cn}u, \\ \operatorname{tn}(u+2mK+2niK') &= (-1)^n.\operatorname{tn}u, \\ \operatorname{dn}(u+2mK+2niK') &= (-1)^n.\operatorname{dn}u\ ^{*}), \end{aligned}$$

wie im §. 25. auf andere Art gefunden worden ist. Setzt man hierin entweder $u=0$, oder $u=K$, oder $u=iK'$, oder $u=K+iK'$, so erhält man eine Reihe von particulären Bestimmungen, welche wir auf folgende Weise zusammen gruppiren.

Functionen, welche $=0$ sind:

$$\operatorname{sn}(2mK+2niK') = 0, \qquad \operatorname{cn}((2m+1)K+2niK') = 0,$$
$$\operatorname{tn}(2mK+2niK') = 0, \qquad \operatorname{dn}((2m+1)K+(2n+1)iK') = 0.$$

Functionen, welche $=\frac{1}{0}$ sind:

$$\operatorname{sn}(2mK+(2n+1)iK') = \tfrac{1}{0}, \qquad \operatorname{dn}(2mK+(2n+1)iK') = \tfrac{1}{0},$$
$$\operatorname{cn}(2mK+(2n+1)iK') = \tfrac{1}{0}, \qquad \operatorname{tn}((2m+1)K+2niK') = \tfrac{1}{0}.$$

Functionen, welche $=\pm 1$ oder $=\pm i$ sind:

$$\operatorname{sn}((2m+1)K+2niK') = (-1)^m, \qquad \operatorname{tn}(2mK+(2n+1)iK') = (-1)^n.i,$$
$$\operatorname{cn}(2mK+2niK') = (-1)^{m+n}, \qquad \operatorname{dn}(2mK+2niK') = (-1)^n.$$

Functionen, deren Werthe vom Modul abhangen:

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}((2m+1)K+(2n+1)iK') &= (-1)^m.\frac{1}{k}, \\ \operatorname{cn}((2m+1)K+(2n+1)iK') &= (-1)^{m+n}.\frac{k'}{ik}, \\ \operatorname{tn}((2m+1)K+(2n+1)iK') &= (-1)^n.\frac{i}{k'}, \\ \operatorname{dn}((2m+1)K+2niK') &= (-1)^n.k'. \end{aligned}$$

---

*) Setzt man der Kürze wegen $u+2mK+2niK' = u'$, so findet man die Formeln

$$\operatorname{snc}u' = (-1)^m.\operatorname{snc}u, \qquad \operatorname{tnc}u' = (-1)^n.\operatorname{tnc}u,$$
$$\operatorname{cnc}u' = (-1)^{m+n}.\operatorname{cnc}u, \qquad \operatorname{dnc}u' = (-1)^n.\operatorname{dnc}u.$$

§. 30.

Cyklische Modular-Functionen mit dem Modul $\frac{1}{k}$ zurückgeführt auf ähnliche mit dem Modul k.

Wenn statt des Moduls k oder k' ein anderer, z. B. der Modul $\frac{1}{k}$, verstanden werden soll, so kann man diesen Modul hinter das Argument, und durch ein Komma davon getrennt setzen; die cyklischen Functionen des Argumentes u mit dem Modul $\frac{1}{k}$ sind demnach bezeichnet durch $\operatorname{sn}\left(u, \frac{1}{k}\right)$, $\operatorname{cn}\left(u, \frac{1}{k}\right)$, $\operatorname{tn}\left(u, \frac{1}{k}\right)$, $\operatorname{dn}\left(u, \frac{1}{k}\right)$, und die Amplitude ist mit $\operatorname{am}\left(u, \frac{1}{k}\right)$ zu bezeichnen. Mit den auf den Modul k bezogenen Functionen stehen die auf den reciproken Modul $\frac{1}{k}$ bezogenen Functionen in einem einfachen Zusammenhange, welcher nun aufzuklären ist.

Es sei $u = \int_0 \frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)}\sqrt{(k^2-z^2)}}$ und, wie früher, k eine zwischen den Grenzen 0 und 1 enthaltene Zahl; so ist ∂u und also auch u imaginär, wenn $z > k$ genommen wird, und es ist u nur reell zwischen den Grenzen $z = 0$ und $z = k$.

Stellen wir die Formel also dar: $ku = \int_0 \frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)}\sqrt{\left(1-\frac{1}{k^2}\cdot z^2\right)}}$, so ist ihr gemäſs $z = \operatorname{sn}\left(ku, \frac{1}{k}\right)$, $\sqrt{(1-z^2)} = \operatorname{cn}\left(ku, \frac{1}{k}\right)$ und $\sqrt{\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right)} = \operatorname{dn}\left(ku, \frac{1}{k}\right)$. Wollen wir diese Functionen auf solche mit dem Modul k zurückführen, so haben wir nur $\frac{z}{k} = t$, also $z = kt$ und $\partial z = k\partial t$ zu setzen, wodurch, weil für $z = 0$ auch $t = 0$ ist, das Integral umgeformt wird in $u = \int_0 \frac{\partial t}{\sqrt{(1-t^2)}\sqrt{(1-k^2t^2)}}$. Dieser Formel gemäſs ist aber t der Modular-Sinus des Argumentes u für den Modul k, und also in Zeichen $t = \operatorname{sn} u$; da nun aber $z = kt$ ist, so haben wir die Formel

$$\operatorname{sn}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = k \operatorname{sn} u;$$

hieraus folgt aber

$$\operatorname{cn}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = \operatorname{dn} u,$$

$$\operatorname{tn}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = \frac{k \operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u} = \frac{k}{k'} \operatorname{cnc} u,$$

$$\operatorname{dn}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = \operatorname{cn} u.$$

Conjugirt mit dem Modul $\frac{1}{k}$ ist derjenige, dessen Quadrat das Quadrat von $\frac{1}{k}$ zu Eins ergänzt, oder $\sqrt{\left(1-\frac{1}{k^2}\right)}$, und dieser Modul ist, wenn wir wieder k zwischen den Grenzen 0 und 1 enthalten ansehen, imaginär; derselbe ist entweder $\sqrt{\frac{-(1-k^2)}{k^2}} = \frac{ik'}{k}$ oder $\sqrt{\frac{1-k^2}{-k^2}} = \frac{k'}{ik}$. Nach der gewöhnlichsten Art zu rechnen sehen wir

$$\frac{ik'}{k} \text{ als conjugirt mit } \frac{1}{k}$$

an, und beachten dann mit strenger Consequenz die Vorschrift, daſs, wenn $\frac{1}{k}$ für k gesetzt wird, $\frac{ik'}{k}$ für k' zu setzen sei.

Unter der Voraussetzung, daſs $\frac{ik'}{k}$ der mit $\frac{1}{k}$ conjugirte Modul sei, bestimmen wir jetzt schon den zum Modul $\frac{1}{k}$ gehörigen Modular-Quadranten, welchen wir für den Augenblick mit $k.\mathfrak{K}$ bezeichnen. So wie $\operatorname{dn} K = k'$ ist, so muſs auch $\operatorname{dn}\left(k.\mathfrak{K}, \frac{1}{k}\right) = \frac{ik'}{k}$ sein.

Da den vorigen Formeln gemäſs $\operatorname{dn}\left(k.\mathfrak{K}, \frac{1}{k}\right) = \operatorname{cn}\mathfrak{K}$ ist, so soll also auch $\operatorname{cn}\mathfrak{K} = \frac{ik'}{k}$ sein. Den Formeln (16.) im §. 28. gemäſs ist $\operatorname{cn}(K+iK') = \frac{k'}{ik}$, und $\operatorname{cn}(K-iK') = \frac{ik'}{k}$; daher schlieſsen wir, daſs $\mathfrak{K} = K-iK'$, und also

$$k(K-iK') \text{ der zum Modul } \frac{1}{k}$$

gehörige Modular-Quadrant sei; wir hätten $k(K+iK')$ als Modular-Quadranten gefunden, wenn wir $\frac{k'}{ik}$ als mit dem Modul $\frac{1}{k}$ conjugirt betrachtet hätten. Da wir aber $\frac{ik'}{k}$ als den conjugirten Modul ansehen, so haben wir den Lehrsatz:

Wird $\frac{1}{\mathrm{k}}$ statt des Moduls k *gesetzt, so verwandelt sich der Modular-Quadrant* K *in* $\mathrm{k(K-iK')}$.

Wenden wir die Formeln (17.) des §. 13. auf die Functionen mit dem Modul $\frac{1}{k}$ an, so entstehen die Formeln

$$\operatorname{snc}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u} = \frac{1}{\operatorname{snc} u},$$

$$\operatorname{cnc}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = \frac{ik'.\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u} = ik' \operatorname{tn} u = \frac{i}{\operatorname{tnc} u},$$

$$\operatorname{tnc}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{i \operatorname{cnc} u},$$

$$\operatorname{dnc}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = \frac{ik'}{k} \cdot \frac{1}{\operatorname{cn} u}.$$

Hiernach haben wir also die folgenden Lehrsätze: *Setzt man* ku *für* u *und* $\frac{1}{k}$ *statt des Moduls* k, *so verwandelt sich* k' *in* $\frac{ik'}{k}$, ferner

1. $\operatorname{sn} u$ in $k \operatorname{sn} u$,
2. $\operatorname{cn} u$ in $\operatorname{dn} u$,
3. $\operatorname{tn} u$ in $\frac{k}{k'} \operatorname{cnc} u$,
4. $\operatorname{dn} u$ in $\operatorname{cn} u$,
5. $\operatorname{snc} u$ in $\frac{1}{\operatorname{snc} u}$,
6. $\operatorname{cnc} u$ in $\frac{i}{\operatorname{tnc} u}$,
7. $\operatorname{tnc} u$ in $\frac{1}{i \operatorname{cnc} u}$,
8. $\operatorname{dnc} u$ in $\frac{ik'}{k} \cdot \frac{1}{\operatorname{cn} u}$,
9. $\operatorname{tang} \frac{1}{2} \operatorname{am} 2u$ in $k \operatorname{sn} u \operatorname{snc} u$.

Es ist $\operatorname{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{i} \log \sqrt{\frac{1 + i \operatorname{tn}\left(ku, \frac{1}{k}\right)}{1 - i \operatorname{tn}\left(ku, \frac{1}{k}\right)}} = \frac{1}{i} \log \sqrt{\frac{1 + \frac{ik}{k'} \operatorname{cnc} u}{1 - \frac{ik}{k'} \operatorname{cnc} u}}$; erinnern wir uns also der Formel (8.) im Zusatze zu §. 27., so haben wir

$$\operatorname{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = \operatorname{arc tang}\left(\frac{k}{k'} \operatorname{cnc} u\right) = l\left(\frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{amc}'(ui)}{i}\right);$$

daher ist

$$\mathfrak{L} \operatorname{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = \mathfrak{L} \operatorname{arc sin}(k \operatorname{sn} u) = \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{amc}'(ui)}{i},$$

weil den obigen Formeln gemäfs $\operatorname{arc tang}\left(\frac{k}{k'} \operatorname{cnc} u\right) = \operatorname{arc sin}(k \operatorname{sn} u)$ ist.

Zusatz. Es ist

$$\operatorname{sn} u = \sin \operatorname{am} u, \qquad \operatorname{cn} u = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{am} u\right) \text{ und}$$

$$\operatorname{snc} u = \sin \operatorname{amc} u, \qquad \operatorname{cnc} u = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{amc} u\right);$$

also ist auch

$$k \operatorname{sn} u = \sin \operatorname{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right),$$

$$\operatorname{dn} u = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right)\right),$$

$$k \operatorname{snc} u = \sin \operatorname{am}\left(k(K-u), \frac{1}{k}\right),$$

$$\operatorname{dnc} u = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{am}\left(k(K-u), \frac{1}{k}\right)\right).$$

Da nun überhaupt $\mathfrak{L}\varphi = \log \sqrt{\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}}$ ist, so ist

$$\mathfrak{L}\,\mathrm{am}\,u = \log\sqrt{\frac{1+\mathrm{sn}\,u}{1-\mathrm{sn}\,u}} \quad \text{und} \quad \mathfrak{L}\,\mathrm{amc}\,u = \log\sqrt{\frac{1+\mathrm{snc}\,u}{1-\mathrm{snc}\,u}},$$

$$\mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{am}\,u\right) = \log\sqrt{\frac{1+\mathrm{cn}\,u}{1-\mathrm{cn}\,u}} \quad \text{und} \quad \mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{amc}\,u\right) = \log\sqrt{\frac{1+\mathrm{cnc}\,u}{1-\mathrm{cnc}\,u}},$$

$$\mathfrak{L}\,\mathrm{am}\left(ku,\frac{1}{k}\right) = \log\sqrt{\frac{1+k\,\mathrm{sn}\,u}{1-k\,\mathrm{sn}\,u}}, \quad \mathfrak{L}\,\mathrm{am}\left(k(K-u),\frac{1}{k}\right) = \log\sqrt{\frac{1+k\,\mathrm{snc}\,u}{1-k\,\mathrm{snc}\,u}},$$

$$\mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{am}\left(ku,\frac{1}{k}\right)\right) = \log\sqrt{\frac{1+\mathrm{dn}\,u}{1-\mathrm{dn}\,u}},$$

$$\mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{am}\left(k(K-u),\frac{1}{k}\right)\right) = \log\sqrt{\frac{1+\mathrm{dnc}\,u}{1-\mathrm{dnc}\,u}}.$$

§. 31.

Cyklische Functionen mit dem Modul $\frac{ik}{k'}$ zurückgeführt auf cyklische Functionen mit dem Modul k.

Auch die Modular-Functionen mit dem Modul $\frac{ik}{k'}$ können leicht auf Modular-Functionen mit dem Modul k zurückgeführt werden; so wie der Modul $\frac{ik'}{k}$ mit $\frac{1}{k}$ conjugirt ist, so ist auch $\frac{ik}{k'}$ mit $\frac{1}{k'}$ conjugirt, und diese Bemerkung reicht schon hin, die gesuchten Formeln sogleich aus denen des §. 30. herzuleiten. Da nach §. 30. ist $\mathrm{tn}\left(ku,\frac{1}{k}\right) = \frac{k\,\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}$, so ist auch $\mathrm{tn}\left(k'u,\frac{1}{k'}\right) = \frac{k'\,\mathrm{sn}'\,u}{\mathrm{dn}'\,u}$, und folglich $\mathrm{tn}\left(k'ui,\frac{1}{k'}\right) = \frac{k'\,\mathrm{sn}'(ui)}{\mathrm{dn}'(ui)}$. Da aber nach §. 27. ist $\mathrm{sn}'(ui) = i.\mathrm{tn}\,u = i.\frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{cn}\,u}$, ferner $\mathrm{dn}'(ui) = \frac{\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{cn}\,u}$ und $\mathrm{tn}\left(k'ui,\frac{1}{k'}\right) = i\,\mathrm{sn}\left(k'u,\frac{ik}{k'}\right)$, so entsteht, wenn diese Werthe substituirt werden, die Formel

$$\mathrm{sn}\left(k'u,\frac{ik}{k'}\right) = \frac{k'\,\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{dn}\,u} = \mathrm{cnc}\,u, \text{ also}$$

$$\mathrm{cn}\left(k'u,\frac{ik}{k'}\right) = \mathrm{snc}\,u,$$

$$\mathrm{tn}\left(k'u,\frac{ik}{k'}\right) = \frac{1}{\mathrm{tnc}\,u},$$

$$\mathrm{dn}\left(k'u,\frac{ik}{k'}\right) = \sqrt{\left(1+\frac{k^2}{k'^2}\,\mathrm{cnc}^2 u\right)} = \frac{\mathrm{dnc}\,u}{k'} = \frac{1}{\mathrm{dn}\,u},$$

$$\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\,\mathrm{am}\left(2k'u,\frac{ik}{k'}\right) = k'.\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{dn}\,u} = \frac{\mathrm{cnc}\,u}{\mathrm{cn}\,u}.$$

Bezeichnen wir den Modular-Quadranten für den Modul $\frac{ik}{k'}$ für den Augenblick mit $k'.\mathfrak{K}$, so muſs also, weil $\operatorname{dn} K = k'$ ist, auch $\operatorname{dn}\left(k'\mathfrak{K}, \frac{ik}{k'}\right) = \frac{1}{k'}$ sein, da $\frac{1}{k'}$ der mit $\frac{ik}{k'}$ conjugirte Modul ist. Da aber den vorigen Formeln gemäſs $\operatorname{dn}\left(k'.\mathfrak{K}, \frac{ik}{k'}\right) = \frac{1}{\operatorname{dn}\mathfrak{K}}$ ist, so muſs auch $\frac{1}{\operatorname{dn}\mathfrak{K}} = \frac{1}{k'}$, also $\operatorname{dn}\mathfrak{K} = k'$, und daher $\mathfrak{K} = K$ sein. *Der zum Modul* $\frac{ik}{k'}$ *gehörige Modular-Quadrant ist folglich* $\mathrm{k'.K}$.

Nach den Formeln (17.) des §. 13. leiten wir aus den vorstehenden Formeln noch her

$$\operatorname{snc}\left(k'u, \frac{ik}{k'}\right) = \operatorname{cn} u,$$

$$\operatorname{cnc}\left(k'u, \frac{ik}{k'}\right) = \operatorname{sn} u,$$

$$\operatorname{tnc}\left(k'u, \frac{ik}{k'}\right) = \frac{1}{\operatorname{tn} u},$$

$$\operatorname{dnc}\left(k'u, \frac{ik}{k'}\right) = \sqrt{\left(1 + \frac{k^2}{k'^2}\operatorname{cn}^2 u\right)} = \frac{\operatorname{dn} u}{k'} = \frac{1}{\operatorname{dnc} u}.$$

Da sowohl $\operatorname{tang\,am}\left(k'u, \frac{ik}{k'}\right).\operatorname{tang\,amc} u = 1$, als auch

$\operatorname{tang\,amc}\left(k'u, \frac{ik}{k'}\right).\operatorname{tang\,am} u = 1$ ist, so ist

$$\operatorname{am}\left(k'u, \frac{ik}{k'}\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{amc} u,$$

$$\operatorname{amc}\left(k'u, \frac{ik}{k'}\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{am} u.$$

Fassen wir die entwickelten Formeln zusammen, so haben wir die folgenden Lehrsätze:

Wird $\frac{ik}{k'}$ statt des Moduls k $\left(\text{also } \frac{1}{k'} \text{ für } k'\right)$ und $k'u$ für u gesetzt, so verwandelt sich

1.	$\operatorname{sn} u$ in $\operatorname{cnc} u$,	5.	$\operatorname{snc} u$ in $\operatorname{cn} u$,
2.	$\operatorname{cn} u$ in $\operatorname{snc} u$,	6.	$\operatorname{cnc} u$ in $\operatorname{sn} u$,
3.	$\operatorname{tn} u$ in $\frac{1}{\operatorname{tnc} u}$,	7.	$\operatorname{tnc} u$ in $\frac{1}{\operatorname{tn} u}$,
4.	$\operatorname{dn} u$ in $\frac{1}{\operatorname{dn} u} = \frac{\operatorname{dnc} u}{k'}$,	8.	$\operatorname{dnc} u$ in $\frac{1}{\operatorname{dnc} u} = \frac{\operatorname{dn} u}{k'}$,

9. $\operatorname{am} u$ in $\frac{\pi}{2} - \operatorname{amc} u$,

10. $\operatorname{amc} u$ in $\frac{\pi}{2} - \operatorname{am} u$,

11. $\operatorname{tang} \frac{1}{2} \operatorname{am} 2u$ in $\operatorname{tn} u \operatorname{dnc} u = \frac{1}{\operatorname{tnc} u \operatorname{dn} u} = \frac{\operatorname{cnc} u}{\operatorname{cn} u}$.

Zusatz 1. So wie zum Modul $\frac{ik}{k'}$ der Modular-Quadrant $k'.K$ gehört, so gehört auch zum Modul $\frac{ik'}{k}$, welcher mit $\frac{1}{k}$ conjugirt ist, der Modular-Quadrant $k.K'$; daher vervollständigen wir den im §. 30. bewiesenen Lehrsatz, wie folgt:

Setzt man $\frac{1}{k}$ *statt des Moduls* k *und* $\frac{ik'}{k}$ *statt* k', *so verwandelt sich* K *in* k(K—iK') *und* K' *in* k.K', *also das Verhältniſs*

$$\frac{K}{K'} \text{ in } \frac{K}{K'} - i.$$

Zusatz 2. So wie zum Modul $\frac{1}{k}$ der Modular-Quadrant $k(K - iK')$ gehört, so gehört auch zum Modul $\frac{1}{k'}$, welcher mit $\frac{ik}{k'}$ conjugirt ist, der Modular-Quadrant $k'(K' - iK)$, und wir haben also den Lehrsatz:

Setzt man $\frac{ik}{k'}$ *statt des Moduls* k *und* $\frac{1}{k'}$ *statt* k', *so verwandelt sich* K *in* k'.K *und* K' *in* k'(K'—*i*K), *also das Verhältniſs*

$$\frac{K'}{K} \text{ in } \frac{K'}{K} - i.$$

Anmerkung. Die im Vorstehenden entwickelten Sätze, wodurch die Functionen mit den Moduln k, k', $\frac{1}{k}$ und $\frac{ik}{k'}$ auf einander zurückgeführt werden, gestatten nicht bloſs die zahlreichsten Anwendungen, sondern sie bieten auch die Möglichkeit dar, aus einigen wenigen Relationen eine groſse Menge ähnlicher, welche andere und andere Functionen betreffen, ohne groſse Weitläufigkeiten herzuleiten. Auch der Zusammenhang unter bereits gefundenen Relationen läſst sich dadurch auf mannigfaltige Arten nachweisen.

Dritter Abschnitt.

§. 32.

Die Modular-Functionen von $\frac{iK'}{2}$ und $\frac{K\pm iK'}{2}$.

Wenn man in den Formeln des §. 14., welche wir hier wiederholen:

$$1.\quad \begin{cases} \operatorname{sn}\frac{K}{2}=\sqrt{\frac{1}{1+k'}}, & \operatorname{tn}\frac{K}{2}=\sqrt{\frac{1}{k'}}; \\ \operatorname{cn}\frac{K}{2}=\sqrt{\frac{k'}{1+k'}}, & \operatorname{dn}\frac{K}{2}=\sqrt{k'}, \end{cases}$$

die beiden conjugirten Modul, und also auch die ihnen zugehörigen Modular-Quadranten mit einander vertauscht, so erhält man

$$\operatorname{sn}'\frac{K'}{2}=\sqrt{\frac{1}{1+k}},\qquad \operatorname{tn}'\frac{K'}{2}=\sqrt{\frac{1}{k}},$$
$$\operatorname{cn}'\frac{K'}{2}=\sqrt{\frac{k}{1+k}},\qquad \operatorname{dn}'\frac{K'}{2}=\sqrt{k},$$

und hieraus lassen sich die Werthe der Functionen des Arguments $\frac{iK'}{2}$ leicht herleiten. Es ist zunächst $\operatorname{sn}\frac{iK'}{2}=i\operatorname{tn}'\frac{K'}{2}$, $\operatorname{cn}\frac{iK'}{2}=\frac{1}{\operatorname{cn}'\frac{K'}{2}}$, $\operatorname{tn}\frac{iK'}{2}=i\operatorname{sn}'\frac{K'}{2}$ und $\operatorname{dn}\frac{iK'}{2}=\frac{\operatorname{dn}'\frac{K'}{2}}{\operatorname{cn}'\frac{K'}{2}}$; werden hierin die vorhin angegebenen Werthe substituirt, so erhält man die folgenden Bestimmungen:

$$2.\quad \begin{cases} \operatorname{sn}\frac{iK'}{2}=i\sqrt{\frac{1}{k}}, & \operatorname{cn}\frac{iK'}{2}=\sqrt{\frac{1+k}{k}}, \\ \operatorname{tn}\frac{iK'}{2}=i.\sqrt{\frac{1}{1+k}}, & \operatorname{dn}\frac{iK'}{2}=\sqrt{(1+k)}. \end{cases}$$

Die Functionen des Argumentes $\frac{K\pm iK'}{2}$ werden am bequemsten berechnet nach den Formeln (1.)—(5.) des §. 28., indem man $a=\frac{K}{2}$ und $b=\frac{K'}{2}$ setzt.

Dann ist $1-\mathrm{dn}^2 a.\mathrm{sn}'^2 b = 1-k'.\frac{1}{1+k} = 1-\sqrt{\frac{1-k^2}{(1+k)^2}} = 1-\sqrt{\frac{1-k}{1+k}}$ $= \frac{\sqrt{(1+k)}-\sqrt{(1-k)}}{\sqrt{(1+k)}} = \sqrt{\frac{2(1-k')}{1+k}}$. Ferner ist $\mathrm{sn}\, a\, \mathrm{dn}' b = \sqrt{\frac{1}{1+k'}}.\sqrt{k}$ $= \sqrt{\frac{k}{1+k'}}$, also ist

$$\frac{\mathrm{sn}\, a\, \mathrm{dn}' b}{1-\mathrm{dn}^2 a\, \mathrm{sn}'^2 b} = \sqrt{\left(\frac{1+k}{2(1-k')}.\frac{k}{1+k'}\right)} = \sqrt{\frac{1+k}{2k}};$$

$$\mathrm{sn}' b\, \mathrm{cn}' b\, \mathrm{cn}\, a\, \mathrm{dn}\, a = \frac{\sqrt{k}}{1+k}.\frac{k'}{\sqrt{(1+k')}},$$

also

$$\frac{\mathrm{sn}' b\, \mathrm{cn}' b\, \mathrm{cn}\, a\, \mathrm{dn}\, a}{1-\mathrm{dn}^2 a\, \mathrm{sn}'^2 b} = \sqrt{\left(\frac{k.k'^2}{(1+k)^2(1+k')}.\frac{1+k}{2(1-k')}\right)} = \sqrt{\frac{1-k}{2k}};$$

folglich ist

$$3.\quad \begin{cases} \mathrm{sn}\left(\frac{K}{2}+\frac{iK'}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+k}{2k}}+i\sqrt{\frac{1-k}{2k}}, \\ \mathrm{sn}\left(\frac{K}{2}-\frac{iK'}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+k}{2k}}-i\sqrt{\frac{1-k}{2k}}. \end{cases}$$

Erhebt man diese Ausdrücke zum Quadrate, so erhält man:

$$\mathrm{sn}\left(\frac{K}{2}\pm\frac{iK'}{2}\right) = \sqrt{\left(1\pm\frac{ik'}{k}\right)}.$$

Es ist $\mathrm{cn}\, a.\mathrm{cn}' b = \sqrt{\frac{kk'}{(1+k)(1+k')}}$, also $\frac{\mathrm{cn}\, a\, \mathrm{cn}' b}{1-\mathrm{dn}^2 a\, \mathrm{sn}'^2 b} = \sqrt{\frac{k'}{2k}}$; ferner ist $\mathrm{sn}\, a\, \mathrm{dn}\, a\, \mathrm{sn}' b\, \mathrm{dn}' b = \sqrt{\left(\frac{k'}{1+k'}.\frac{k}{1+k}\right)}$, also $\frac{\mathrm{sn}\, a\, \mathrm{dn}\, a\, \mathrm{sn}' b\, \mathrm{dn}' b}{1-\mathrm{dn}^2 a\, \mathrm{sn}'^2 b} =$ $\sqrt{\frac{k'}{2k}}$, daher ist

$$4.\quad \begin{cases} \mathrm{cn}\left(\frac{K}{2}+\frac{iK'}{2}\right) = \sqrt{\frac{k'}{2k}}-i\sqrt{\frac{k'}{2k}} = (1-i).\sqrt{\frac{k'}{2k}}, \\ \mathrm{cn}\left(\frac{K}{2}-\frac{iK'}{2}\right) = \sqrt{\frac{k'}{2k}}+i\sqrt{\frac{k'}{2k}} = (1+i).\sqrt{\frac{k'}{2k}}. \end{cases}$$

Da $(1\pm i)^2 = 1\pm 2i-1 = \pm 2i$, also $1\pm i = \sqrt{(\pm 2i)}$ ist, so können die beiden vorigen Formeln auch also geschrieben werden:

$$\mathrm{cn}\left(\frac{K}{2}\pm\frac{iK'}{2}\right) = \sqrt{\left(\mp\frac{ik'}{k}\right)}.$$

Es ist $i\left(\frac{K'}{2}-\frac{iK}{2}\right) = \frac{K}{2}+\frac{iK'}{2}$, also ist $\mathrm{tn}\left(\frac{K}{2}+\frac{iK'}{2}\right) = i\,\mathrm{sn}'\left(\frac{K'}{2}-\frac{iK}{2}\right)$, und da $\mathrm{sn}'\left(\frac{K'}{2}-\frac{iK}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+k'}{2k'}}-i\sqrt{\frac{1-k'}{2k'}}$ ist, so erhält man

$$5.\quad \begin{cases} \mathrm{tn}\left(\frac{K}{2}+\frac{iK}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-k'}{2k'}}+i\sqrt{\frac{1+k'}{2k'}}, \text{ und} \\ \mathrm{tn}\left(\frac{K}{2}-\frac{iK'}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-k'}{2k'}}-i\sqrt{\frac{1+k'}{2k'}}. \end{cases}$$

Erhebt man diese Ausdrücke zum Quadrate, so erhält man:

$$\operatorname{tn}\left(\frac{K}{2} \pm \frac{iK'}{2}\right) = \sqrt{\left(-1 \pm \frac{ik}{k'}\right)}.$$

Für die cyklischen Differenten erhält man die Formeln

$$6.\quad \begin{cases} \operatorname{dn}\left(\frac{K}{2} + \frac{iK'}{2}\right) = \sqrt{\frac{k'(1+k')}{2}} - i\sqrt{\frac{k'(1-k')}{2}}, \\ \operatorname{dn}\left(\frac{K}{2} - \frac{iK'}{2}\right) = \sqrt{\frac{k'(1+k')}{2}} + i\sqrt{\frac{k'(1-k')}{2}}, \end{cases}$$

und erhebt man sie zum Quadrate, so erhält man

$$\operatorname{dn}\left(\frac{K}{2} \pm \frac{iK'}{2}\right) = k'\sqrt{\left(1 \mp \frac{ik}{k'}\right)}.$$

Endlich findet man:

$$7.\quad \begin{cases} \operatorname{am}\left(\frac{K}{2} + \frac{iK'}{2}\right) = \operatorname{arc\,tang}\left(\sqrt[4]{\frac{1+k}{1-k}}\right) + i\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\sqrt[4]{\frac{1-k}{1+k}}\right), \\ \operatorname{am}\left(\frac{K}{2} - \frac{iK'}{2}\right) = \operatorname{arc\,tang}\left(\sqrt[4]{\frac{1+k}{1-k}}\right) - i\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\sqrt[4]{\frac{1-k}{1+k}}\right), \end{cases}$$

Setzt man in den Formeln (6.) des §. 28. jetzt $u = \frac{K}{2}$, so erhält man

$$8.\quad \begin{cases} \operatorname{sn}\left(\frac{K}{2} \pm iK'\right) = \sqrt{\frac{1}{1-k'}}, \\ \operatorname{cn}\left(\frac{K}{2} \pm iK'\right) = \mp i\sqrt{\frac{k'}{1-k'}}, \\ \operatorname{tn}\left(\frac{K}{2} \pm iK'\right) = \pm i\sqrt{\frac{1}{k'}}, \\ \operatorname{dn}\left(\frac{K}{2} \pm iK'\right) = \mp i\sqrt{k'}, \\ \operatorname{am}\left(\frac{K}{2} \pm iK'\right) = \frac{\pi}{2} \pm i\,\mathfrak{Arc\,Tang}\,(\sqrt{k'}). \end{cases}$$

Setzt man endlich in den Formeln (2.) des §. 27. $u = \frac{K'}{2}$, so entstehen

$$9.\quad \begin{cases} \operatorname{sn}\left(K \mp \frac{iK'}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{k}}, & \operatorname{tn}\left(K \mp \frac{iK'}{2}\right) = \mp i\sqrt{\frac{1}{1-k}}, \\ \operatorname{cn}\left(K \mp \frac{iK'}{2}\right) = \pm i\sqrt{\frac{1-k}{k}}, & \operatorname{dn}\left(K \mp \frac{iK'}{2}\right) = \sqrt{(1-k)}. \end{cases}$$

§. 32. *a*.

Von der Verdoppelung und Halbirung des Arguments der cyklischen Modular-Functionen.

Setzt man in den Formeln für die cyklischen Functionen eines Binoms $a+b$ jetzt $b=a$, so hat man

$$
1.\quad \begin{cases}
\operatorname{sn} 2a = \dfrac{2\operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{1-k^2 \operatorname{sn}^4 a} = \dfrac{2\operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{cn}^2 a + \operatorname{sn}^2 a \operatorname{dn}^2 a}, \\[2ex]
\operatorname{cn} 2a = \dfrac{\operatorname{cn}^2 a - \operatorname{sn}^2 a \operatorname{dn}^2 a}{1-k^2 \operatorname{sn}^4 a} = \dfrac{1-2\operatorname{sn}^2 a + k^2 \operatorname{sn}^4 a}{1-k^2 \operatorname{sn}^4 a}, \\[2ex]
\operatorname{tn} 2a = \dfrac{2\operatorname{tn} a \operatorname{dn} a}{1-\operatorname{tn}^2 a \operatorname{dn}^2 a}, \\[2ex]
\operatorname{dn} 2a = \dfrac{\operatorname{dn}^2 a - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{cn}^2 a}{1-k^2 \operatorname{sn}^4 a} = \dfrac{1-2k^2\operatorname{sn}^2 a + k^2 \operatorname{sn}^4 a}{1-k^2 \operatorname{sn}^4 a}.
\end{cases}
$$

Aus diesen Formeln setzen wir zusammen die folgenden Ausdrücke:

$$
2.\quad \begin{cases}
1 + \operatorname{sn} 2a = \dfrac{(\operatorname{cn} a + \operatorname{sn} a \operatorname{dn} a)^2}{\operatorname{cn}^2 a + \operatorname{sn}^2 a \operatorname{dn}^2 a}, \\[2ex]
1 - \operatorname{sn} 2a = \dfrac{(\operatorname{cn} a - \operatorname{sn} a \operatorname{dn} a)^2}{\operatorname{cn}^2 a + \operatorname{sn}^2 a \operatorname{dn}^2 a}, \\[2ex]
1 + \operatorname{cn} 2a = \dfrac{2\operatorname{cn}^2 a}{1-k^2 \operatorname{sn}^4 a}, \\[2ex]
1 - \operatorname{cn} 2a = \dfrac{2\operatorname{sn}^2 a \operatorname{dn}^2 a}{1-k^2 \operatorname{sn}^4 a}, \\[2ex]
1 + \operatorname{dn} 2a = \dfrac{2\operatorname{dn}^2 a}{1-k^2 \operatorname{sn}^4 a}, \\[2ex]
1 - \operatorname{dn} 2a = \dfrac{2k^2\operatorname{sn}^2 a \operatorname{cn}^2 a}{1-k^2 \operatorname{sn}^4 a}, \\[2ex]
\operatorname{dn} 2a + \operatorname{cn} 2a = \dfrac{2\operatorname{cn}^2 a \operatorname{dn}^2 a}{1-k^2 \operatorname{sn}^4 a}, \\[2ex]
\operatorname{dn} 2a - \operatorname{cn} 2a = \dfrac{2k'^2\operatorname{sn}^2 a}{1-k^2 \operatorname{sn}^4 a}, \\[2ex]
1 + k \operatorname{sn} 2a = \dfrac{(\operatorname{dn} a + k \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a)^2}{\operatorname{dn}^2 a + k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{cn}^2 a}, \\[2ex]
1 - k \operatorname{sn} 2a = \dfrac{(\operatorname{dn} a - k \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a)^2}{\operatorname{dn}^2 a + k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{cn}^2 a}, \\[2ex]
\operatorname{dn} 2a - k' \operatorname{sn} 2a = \dfrac{(\operatorname{dn} a + (1-k') \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a)(\operatorname{dn} a - (1+k') \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a)}{1-k^2 \operatorname{sn}^4 a}, \\[2ex]
\operatorname{dn} 2a + k' \operatorname{sn} 2a = \dfrac{(\operatorname{dn} a - (1-k') \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a)(\operatorname{dn} a + (1+k') \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a)}{1-k^2 \operatorname{sn}^4 a}, \\[2ex]
\operatorname{dn} 2a + k' = \dfrac{(1+k')(1-(1-k')\operatorname{sn}^2 a)^2}{1-k^2 \operatorname{sn}^4 a}, \\[2ex]
\operatorname{dn} 2a - k' = \dfrac{(1-k')(1-(1+k')\operatorname{sn}^2 a)^2}{1-k^2 \operatorname{sn}^4 a},
\end{cases}
$$

$$
2.\quad\left\{
\begin{aligned}
\operatorname{dn}2a+k\operatorname{cn}2a &= \frac{(1+k)(1-k\operatorname{sn}^2 a)^2}{1-k^2\operatorname{sn}^4 a},\\
\operatorname{dn}2a-k\operatorname{cn}2a &= \frac{(1-k)(1+k\operatorname{sn}^2 a)^2}{1-k^2\operatorname{sn}^4 a},\\
&\text{oder}\\
\operatorname{dn}2a+k\operatorname{cn}2a &= (1+k).\frac{1-k\operatorname{sn}^2 a}{1+k\operatorname{sn}^2 a},\\
\operatorname{dn}2a-k\operatorname{cn}2a &= (1-k).\frac{1+k\operatorname{sn}^2 a}{1-k\operatorname{sn}^2 a}.
\end{aligned}
\right.
$$

Man könnte die Reihe dieser Formeln leicht noch vermehren; die vorstehenden sind aber die wichtigeren, und aus ihnen leiten wir her:

$$
3.\quad\left\{
\begin{aligned}
\operatorname{sn}a &= \sqrt{\frac{1-\operatorname{cn}2a}{1+\operatorname{dn}2a}}, & \operatorname{snc}a &= \sqrt{\frac{1+\operatorname{cn}2a}{1+\operatorname{dn}2a}},\\
k\operatorname{sn}a &= \sqrt{\frac{1-\operatorname{dn}2a}{1+\operatorname{cn}2a}}, & k\operatorname{snc}a &= \sqrt{\frac{1-\operatorname{dn}2a}{1-\operatorname{cn}2a}},\\
\operatorname{cn}a &= \sqrt{\frac{\operatorname{dn}2a+\operatorname{cn}2a}{1+\operatorname{dn}2a}},\quad\text{also} & \operatorname{cnc}a &= \sqrt{\frac{\operatorname{dn}2a-\operatorname{cn}2a}{1+\operatorname{dn}2a}},\\
\operatorname{tn}a &= \sqrt{\frac{1-\operatorname{cn}2a}{\operatorname{dn}2a+\operatorname{cn}2a}}, & \operatorname{tnc}a &= \sqrt{\frac{1+\operatorname{cn}2a}{\operatorname{dn}2a-\operatorname{cn}2a}},\\
\operatorname{dn}a &= \sqrt{\frac{\operatorname{dn}2a+\operatorname{cn}2a}{1+\operatorname{cn}2a}}, & \operatorname{dnc}a &= \sqrt{\frac{\operatorname{dn}2a-\operatorname{cn}2a}{1-\operatorname{cn}2a}}.
\end{aligned}
\right.
$$

Die vier obersten Formeln lassen sich auch also darstellen:

$$
4.\quad\left\{
\begin{aligned}
\operatorname{sn}a &= \frac{\sqrt{(1+\operatorname{sn}2a)}-\sqrt{(1-\operatorname{sn}2a)}}{\sqrt{(1+k\operatorname{sn}2a)}+\sqrt{(1-k\operatorname{sn}2a)}},\\
\operatorname{snc}a &= \frac{\sqrt{(1+\operatorname{sn}2a)}+\sqrt{(1-\operatorname{sn}2a)}}{\sqrt{(1+k\operatorname{sn}2a)}+\sqrt{(1-k\operatorname{sn}2a)}},\\
k\operatorname{sn}a &= \frac{\sqrt{(1+k\operatorname{sn}2a)}-\sqrt{(1-k\operatorname{sn}2a)}}{\sqrt{(1+\operatorname{sn}2a)}+\sqrt{(1-\operatorname{sn}2a)}},\\
k\operatorname{snc}a &= \frac{\sqrt{(1+k\operatorname{sn}2a)}-\sqrt{(1-k\operatorname{sn}2a)}}{\sqrt{(1+\operatorname{sn}2a)}-\sqrt{(1-\operatorname{sn}2a)}}.
\end{aligned}
\right.
$$

§. 33.

Fernere Relationen unter den cyklischen Functionen der Binome $a+b$ und $a-b$ und denen der Theile a und b.

Dem §. 19. gemäfs ist $\mathfrak{T}\mathrm{n}(a+b)=\frac{\mathfrak{T}\mathrm{n}\,a\,\mathfrak{D}\mathrm{n}\,b+\mathfrak{T}\mathrm{n}\,b\,\mathfrak{D}\mathrm{n}\,a}{1+\mathfrak{T}\mathrm{n}\,a\,\mathfrak{D}\mathrm{n}\,b\,\mathfrak{T}\mathrm{n}\,b\,\mathfrak{D}\mathrm{n}\,a}$; vertauscht man hierin den Modul k mit k', so verwandelt sich $\mathfrak{T}\mathrm{n}(a+b)$ in $\mathfrak{T}\mathrm{n}'(a+b) = \operatorname{sn}(a+b)$; ferner verwandelt sich der Zähler in $\frac{\operatorname{sn}a\operatorname{dn}b}{\operatorname{cn}b}+\frac{\operatorname{sn}b\operatorname{dn}a}{\operatorname{cn}a}$ oder in $\frac{\operatorname{sn}a\operatorname{cn}a\operatorname{dn}b+\operatorname{sn}b\operatorname{cn}b\operatorname{dn}a}{\operatorname{cn}a\operatorname{cn}b}$, und der Nenner verwandelt sich in

$\frac{\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cn}\,b+\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,b}{\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cn}\,b}$, daher haben wir den neuen Ausdruck:

$$1.\quad \begin{cases} \mathrm{sn}\,(a+b) = \dfrac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,b+\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cn}\,b\,\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cn}\,b+\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,b}, \\ \mathrm{sn}\,(a-b) = \dfrac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,b-\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cn}\,b\,\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cn}\,b-\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,b}. \end{cases}$$

Dividirt man den Zähler und Nenner durch $\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,b$, so erhält man

$$2.\quad \begin{cases} \mathrm{sn}(a+b) = \dfrac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a+\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{snc}\,b}{\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{snc}\,b+\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b}, \\ \mathrm{sn}(a-b) = \dfrac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a-\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{snc}\,b}{\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{snc}\,b-\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b}. \end{cases}$$

Setzt man in diesen Formeln $a+iK'$ für a, so verwandelt sich der Zähler

$$\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a+\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{snc}\,b \text{ in } \frac{1+k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{snc}\,b}{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a} \text{ und der Nenner}$$

$$\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{snc}\,b+\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b \text{ in } \frac{k\,(\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,b+\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{sn}\,b)}{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a},$$

ferner $\mathrm{sn}\,(a+b)$ in $\frac{1}{k\,\mathrm{sn}\,(a+b)}$, daher haben wir noch

$$\mathrm{sn}\,(a+b) = \frac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,b+\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{sn}\,b}{1+k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{snc}\,b},$$
$$\mathrm{sn}\,(a-b) = \frac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,b-\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{sn}\,b}{1-k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{snc}\,b}.$$

Schafft man in diesen Ausdrücken die Functionen des Complementes weg, so erhält man

$$\mathrm{sn}(a+b) = \frac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{cn}\,b+\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,b\,\mathrm{cn}\,a}{\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,b+k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cn}\,b},$$
$$\mathrm{sn}(a-b) = \frac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{cn}\,b-\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,b\,\mathrm{cn}\,a}{\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,b-k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cn}\,b}.$$

Dieselben Formeln erhält man, wenn man in den Formeln (1.) setzt ka für a, kb für b und $\frac{1}{k}$ statt des Moduls k, und die Sätze des §. 30. anwendet; dieselben Formel kommen aber auch schon im §. 13. vor.

Aus den Formeln (2.) folgt:

$$3.\quad \begin{cases} 1+\mathrm{sn}(a+b) = \dfrac{(\mathrm{snc}\,b+\mathrm{sn}\,a)(\mathrm{snc}\,a+\mathrm{sn}\,b)}{\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{snc}\,b+\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b} = \dfrac{(\mathrm{cn}\,b+\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,b)(\mathrm{cn}\,a+\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,a)}{\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cn}\,b+\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,b}, \\ 1+\mathrm{sn}(a-b) = \dfrac{(\mathrm{snc}\,b+\mathrm{sn}\,a)(\mathrm{snc}\,a-\mathrm{sn}\,b)}{\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{snc}\,b-\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b} = \dfrac{(\mathrm{cn}\,b+\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,b)(\mathrm{cn}\,a-\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,a)}{\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cn}\,b-\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,b}, \\ 1-\mathrm{sn}(a+b) = \dfrac{(\mathrm{snc}\,b-\mathrm{sn}\,a)(\mathrm{snc}\,a-\mathrm{sn}\,b)}{\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{snc}\,b+\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b} = \dfrac{(\mathrm{cn}\,b-\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,b)(\mathrm{cn}\,a-\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,a)}{\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cn}\,b+\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,b}, \\ 1-\mathrm{sn}(a-b) = \dfrac{(\mathrm{snc}\,b-\mathrm{sn}\,a)(\mathrm{snc}\,a+\mathrm{sn}\,b)}{\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{snc}\,b-\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b} = \dfrac{(\mathrm{cn}\,b-\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,b)(\mathrm{cn}\,a+\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,a)}{\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cn}\,b-\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,b}. \end{cases}$$

Setzt man in diesen Formeln ka für a, kb für b und $\frac{1}{k}$ statt des Moduls k, so verwandeln sie sich dem §. 30. gemäſs in

$$4.\quad\begin{cases} 1+k\,\mathrm{sn}(a+b) = \dfrac{(\mathrm{dn}\,b+k\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,b)(\mathrm{dn}\,a+k\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cn}\,a)}{\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,b+k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cn}\,b}, \\ 1+k\,\mathrm{sn}(a-b) = \dfrac{(\mathrm{dn}\,b+k\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,b)(\mathrm{dn}\,a-k\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cn}\,a)}{\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,b-k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cn}\,b}, \\ 1-k\,\mathrm{sn}(a+b) = \dfrac{(\mathrm{dn}\,b-k\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,b)(\mathrm{dn}\,a-k\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cn}\,a)}{\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,b+k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,b}, \\ 1-k\,\mathrm{sn}(a-b) = \dfrac{(\mathrm{dn}\,b-k\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,b)(\mathrm{dn}\,a+k\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cn}\,a)}{\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,b-k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,b}. \end{cases}$$

Setzt man in der zweiten und vierten von den Formeln (3.) $K-a$ für a, so verwandeln sie sich in

$$1+\mathrm{snc}(a+b) = \frac{(\mathrm{snc}\,b+\mathrm{snc}\,a)(\mathrm{sn}\,a-\mathrm{sn}\,b)}{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,b-\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{sn}\,b},$$

$$1-\mathrm{snc}(a+b) = \frac{(\mathrm{snc}\,b-\mathrm{snc}\,a)(\mathrm{sn}\,a+\mathrm{sn}\,b)}{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,b-\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{sn}\,b},$$

und setzt man nun $k'a$ für a, $k'b$ für b und $\frac{ik}{k'}$ statt des Moduls k, so erhält man nach §. 31. auf der Stelle

$$1+\mathrm{cn}(a+b) = \frac{(\mathrm{cn}\,b+\mathrm{cn}\,a)(\mathrm{cnc}\,a-\mathrm{cnc}\,b)}{\mathrm{cnc}\,a\,\mathrm{cn}\,b-\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cnc}\,b},$$

$$1-\mathrm{cn}(a+b) = \frac{(\mathrm{cn}\,b-\mathrm{cn}\,a)(\mathrm{cnc}\,a+\mathrm{cnc}\,b)}{\mathrm{cnc}\,a\,\mathrm{cn}\,b-\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cnc}\,b}.$$

Es ist aber $\mathrm{cnc}\,a-\mathrm{cnc}\,b = \frac{k'(\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,b-\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,a)}{\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,b}$ und der Nenner

$\mathrm{cnc}\,a\,\mathrm{cn}\,b-\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cnc}\,b = \frac{k'(\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,b\,\mathrm{dn}\,b-\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a)}{\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,b}$, daher hat man

$$5.\quad\begin{cases} 1+\mathrm{cn}(a+b) = \dfrac{(\mathrm{cn}\,b+\mathrm{cn}\,a)(\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,b-\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,a)}{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,b\,\mathrm{dn}\,b-\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a}, \\ 1+\mathrm{cn}(a-b) = \dfrac{(\mathrm{cn}\,b+\mathrm{cn}\,a)(\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,b+\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,a)}{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,b\,\mathrm{dn}\,b+\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a}, \\ 1-\mathrm{cn}(a+b) = \dfrac{(\mathrm{cn}\,b-\mathrm{cn}\,a)(\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,b+\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,a)}{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,b\,\mathrm{dn}\,b-\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a}, \\ 1-\mathrm{cn}(a-b) = \dfrac{(\mathrm{cn}\,b-\mathrm{cn}\,a)(\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,b-\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,a)}{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,b\,\mathrm{dn}\,b+\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a}. \end{cases}$$

Der Ausdruck von $\mathrm{cn}(a\pm b)$, woraus die vorstehenden Formeln hergeleitet werden können, ist

$$6.\quad\begin{cases} \mathrm{cn}(a+b) = \dfrac{\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cnc}\,a-\mathrm{cn}\,b\,\mathrm{cnc}\,b}{\mathrm{cnc}\,a\,\mathrm{cn}\,b-\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cnc}\,b}, \text{ also} \\ \mathrm{cn}(a-b) = \dfrac{\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cnc}\,a+\mathrm{cn}\,b\,\mathrm{cnc}\,b}{\mathrm{cnc}\,a\,\mathrm{cn}\,b+\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cnc}\,b}. \end{cases}$$

Nach §. 30. verwandeln sich diese Formeln in

$$7. \quad \begin{cases} \mathrm{dn}(a+b) = \dfrac{\mathrm{dn}\,a\;\mathrm{tn}\,a - \mathrm{dn}\,b\;\mathrm{tn}\,b}{\mathrm{dn}\,b\;\mathrm{tn}\,a - \mathrm{dn}\,a\;\mathrm{tn}\,b}, \\ \mathrm{dn}(a-b) = \dfrac{\mathrm{dn}\,a\;\mathrm{tn}\,a + \mathrm{dn}\,b\;\mathrm{tn}\,b}{\mathrm{dn}\,b\;\mathrm{tn}\,a + \mathrm{dn}\,a\;\mathrm{tn}\,b}. \end{cases}$$

Die Formeln (2.), (6.), (7.) und die Formeln für $\mathrm{tn}(a \pm b)$ in §. 11. sind die einfachsten, nach welchen man aus Ausdrücken für die Modular-Functionen zweier reellen Argumente a und b die Ausdrücke für die Modular-Functionen von $a+b$ und $a-b$ zusammensetzen kann.

Aus den Formeln (7.) leiten wir her:

$$8. \quad \begin{cases} 1+\mathrm{dn}(a+b) = \dfrac{(\mathrm{dn}\,b + \mathrm{dn}\,a)(\mathrm{tn}\,a - \mathrm{tn}\,b)}{\mathrm{dn}\,b\;\mathrm{tn}\,a - \mathrm{dn}\,a\;\mathrm{tn}\,b}, \\ 1+\mathrm{dn}(a-b) = \dfrac{(\mathrm{dn}\,b + \mathrm{dn}\,a)(\mathrm{tn}\,a + \mathrm{tn}\,b)}{\mathrm{dn}\,b\;\mathrm{tn}\,a + \mathrm{dn}\,a\;\mathrm{tn}\,b}, \\ 1-\mathrm{dn}(a+b) = \dfrac{(\mathrm{dn}\,b - \mathrm{dn}\,a)(\mathrm{tn}\,a + \mathrm{tn}\,b)}{\mathrm{dn}\,b\;\mathrm{tn}\,a - \mathrm{dn}\,a\;\mathrm{tn}\,b}, \\ 1-\mathrm{dn}(a-b) = \dfrac{(\mathrm{dn}\,b - \mathrm{dn}\,a)(\mathrm{tn}\,a - \mathrm{tn}\,b)}{\mathrm{dn}\,b\;\mathrm{tn}\,a + \mathrm{dn}\,a\;\mathrm{tn}\,b}. \end{cases}$$

Aus den Formeln (3.) folgt durch Division

$$\sqrt{\frac{1+\mathrm{sn}(a+b)}{1-\mathrm{sn}(a+b)}} = \sqrt{\frac{\mathrm{snc}\,b + \mathrm{sn}\,a}{\mathrm{snc}\,b - \mathrm{sn}\,a}} \cdot \sqrt{\frac{\mathrm{snc}\,a + \mathrm{sn}\,b}{\mathrm{snc}\,a - \mathrm{sn}\,b}},$$

und wenn man auf beiden Seiten die natürlichen Logarithmen nimmt, so hat man

$$\mathfrak{L}\,\mathrm{am}(a \pm b) = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{sn}\,a}{\mathrm{snc}\,b}\right) \pm \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{sn}\,b}{\mathrm{snc}\,a}\right).$$

Diese Formel ist einerlei mit den Formeln (1.) des §. 23. Aus den Formeln (3.) leiten wir aber auch noch her

$$\sqrt{\frac{1+\mathrm{sn}(a+b)}{1+\mathrm{sn}(a-b)}} = \sqrt{\frac{\mathrm{snc}\,a + \mathrm{sn}\,b}{\mathrm{snc}\,a - \mathrm{sn}\,b}}\, \sqrt{\frac{\mathrm{snc}\,a\;\mathrm{snc}\,b - \mathrm{sn}\,a\;\mathrm{sn}\,b}{\mathrm{snc}\,a\;\mathrm{snc}\,b + \mathrm{sn}\,a\;\mathrm{sn}\,b}},$$

und also, wenn man wieder auf beiden Seiten die natürlichen Logarithmen nimmt, entweder

$$9. \quad \begin{cases} \log\sqrt{\dfrac{1+\mathrm{sn}(a+b)}{1+\mathrm{sn}(a-b)}} = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\dfrac{\mathrm{sn}\,b}{\mathrm{snc}\,a}\right) - \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\dfrac{\mathrm{sn}\,a\;\mathrm{sn}\,b}{\mathrm{snc}\,a\;\mathrm{snc}\,b}\right) \quad \text{oder} \\ \log\sqrt{\dfrac{1+\mathrm{sn}(a+b)}{1+\mathrm{sn}(a-b)}} = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\dfrac{\mathrm{snc}\,a}{\mathrm{sn}\,b}\right) - \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\dfrac{\mathrm{snc}\,a\;\mathrm{snc}\,b}{\mathrm{sn}\,a\;\mathrm{sn}\,b}\right). \end{cases}$$

Setzt man hierin $-a$ für a und $-b$ für b, so erhält man

$$10. \quad \log\sqrt{\frac{1-\mathrm{sn}(a-b)}{1-\mathrm{sn}(a+b)}} = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{sn}\,b}{\mathrm{snc}\,a}\right) + \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{sn}\,a\;\mathrm{sn}\,b}{\mathrm{snc}\,a\;\mathrm{snc}\,b}\right).$$

Aus den Formeln (5.) erhält man

$$\sqrt{\frac{1+\mathrm{cn}(a+b)}{1-\mathrm{cn}(a+b)}} = \sqrt{\frac{\mathrm{cn}\,b + \mathrm{cn}\,a}{\mathrm{cn}\,b - \mathrm{cn}\,a}}\, \sqrt{\frac{\mathrm{sn}\,a\;\mathrm{dn}\,b - \mathrm{sn}\,b\;\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{sn}\,a\;\mathrm{dn}\,b + \mathrm{sn}\,b\;\mathrm{dn}\,a}} \quad \text{und}$$

$$\sqrt{\frac{1+\mathrm{cn}(a-b)}{1+\mathrm{cn}(a+b)}} = \sqrt{\frac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,b+\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,b-\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,a}}\sqrt{\frac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,b\,\mathrm{dn}\,b-\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,b\,\mathrm{dn}\,b+\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a}},$$

$$\sqrt{\frac{1-\mathrm{cn}(a+b)}{1-\mathrm{cn}(a-b)}} = \sqrt{\frac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,b+\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,b-\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,a}}\sqrt{\frac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,b\,\mathrm{dn}\,b+\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,b\,\mathrm{dn}\,b-\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a}}.$$

Nimmt man wieder auf beiden Seiten die natürlichen Logarithmen, so erhält man

$$11.\quad\begin{cases}\log\sqrt{\dfrac{1+\mathrm{cn}(a\pm b)}{1-\mathrm{cn}(a\pm b)}} = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\dfrac{\mathrm{cn}\,a}{\mathrm{cn}\,b}\right) \mp \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\dfrac{\mathrm{cnc}\,b}{\mathrm{cnc}\,a}\right),\\[2ex] \log\sqrt{\dfrac{1+\mathrm{cn}(a-b)}{1+\mathrm{cn}(a+b)}} = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\dfrac{\mathrm{cnc}\,b}{\mathrm{cnc}\,a}\right) - \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\dfrac{\mathrm{tn}\,b\,\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,b}\right),\\[2ex] \log\sqrt{\dfrac{1-\mathrm{cn}(a+b)}{1-\mathrm{cn}(a-b)}} = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\dfrac{\mathrm{cnc}\,b}{\mathrm{cnc}\,a}\right) + \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\dfrac{\mathrm{tn}\,b\,\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,b}\right).\end{cases}$$

Aus den Formeln (8.) folgt zunächst:

$$\sqrt{\frac{1+\mathrm{dn}(a+b)}{1-\mathrm{dn}(a+b)}} = \sqrt{\frac{\mathrm{dn}\,b+\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{dn}\,b-\mathrm{dn}\,a}}\sqrt{\frac{\mathrm{tn}\,a-\mathrm{tn}\,b}{\mathrm{tn}\,a+\mathrm{tn}\,b}},$$

$$\sqrt{\frac{1+\mathrm{dn}(a-b)}{1+\mathrm{dn}(a+b)}} = \sqrt{\frac{\mathrm{tn}\,a+\mathrm{tn}\,b}{\mathrm{tn}\,a-\mathrm{tn}\,b}}\sqrt{\frac{\mathrm{dn}\,b\,\mathrm{tn}\,a-\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{tn}\,b}{\mathrm{dn}\,b\,\mathrm{tn}\,a+\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{tn}\,b}},$$

$$\sqrt{\frac{1-\mathrm{dn}(a+b)}{1-\mathrm{dn}(a-b)}} = \sqrt{\frac{\mathrm{tn}\,a+\mathrm{tn}\,b}{\mathrm{tn}\,a-\mathrm{tn}\,b}}\sqrt{\frac{\mathrm{dn}\,b\,\mathrm{tn}\,a+\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{tn}\,b}{\mathrm{dn}\,b\,\mathrm{tn}\,a-\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{tn}\,b}},$$

und also, wenn man auf beiden Seiten die natürlichen Logarithmen nimmt,

$$12.\quad\begin{cases}\log\sqrt{\dfrac{1+\mathrm{dn}(a\pm b)}{1-\mathrm{dn}(a\pm b)}} = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\dfrac{\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{dn}\,b}\right) \mp \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\dfrac{\mathrm{tn}\,b}{\mathrm{tn}\,a}\right),\\[2ex] \log\sqrt{\dfrac{1+\mathrm{dn}(a-b)}{1+\mathrm{dn}(a+b)}} = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\dfrac{\mathrm{tn}\,b}{\mathrm{tn}\,a}\right) - \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\dfrac{\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{tn}\,b}{\mathrm{dn}\,b\,\mathrm{tn}\,a}\right),\\[2ex] \log\sqrt{\dfrac{1-\mathrm{dn}(a+b)}{1-\mathrm{dn}(a-b)}} = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\dfrac{\mathrm{tn}\,b}{\mathrm{tn}\,a}\right) + \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\dfrac{\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{tn}\,b}{\mathrm{dn}\,b\,\mathrm{tn}\,a}\right).\end{cases}$$

Aus den gewöhnlichen Formeln für $\mathrm{sn}(a\pm b)$, $\mathrm{cn}(a\pm b)$, $\mathrm{dn}(a\pm b)$ hätten wir die so eben hergeleiteten Ausdrücke lange nicht so bequem herleiten können. Die Kenntnifs dieser Ausdrücke ist vorzüglich dann nöthig, wenn a reell und b imaginär ist. Setzen wir z. B. in der letzten Formel bi für b, so haben wir auf der Stelle in einer reellen Form

$$\frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{1-\mathrm{dn}(a+bi)}{1-\mathrm{dn}(a-bi)}} = \mathrm{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{sn}'\,b}{\mathrm{tn}\,a}\right) + \mathrm{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{tn}\,a}\,\mathrm{sn}'\,b\;\mathrm{snc}'\,b\right).$$

Setzt man in den Formeln (9.) und (10.) ka für a, kb für b und $\frac{1}{k}$ statt des Moduls k, so werden sie

$$13.\quad\begin{cases}\log\sqrt{\dfrac{1+k\,\mathrm{sn}(a\pm b)}{1-k\,\mathrm{sn}(a\pm b)}} = \mathfrak{Arc\,Tang}(k\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,b) \pm \mathfrak{Arc\,Tang}(k\,\mathrm{sn}\,b\;\mathrm{snc}\,a),\\[2ex] \log\sqrt{\dfrac{1+k\,\mathrm{sn}(a+b)}{1+k\,\mathrm{sn}(a-b)}} = \mathfrak{Arc\,Tang}(k\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{snc}\,a) - \mathfrak{Arc\,Tang}(k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{snc}\,b),\\[2ex] \log\sqrt{\dfrac{1-k\,\mathrm{sn}(a-b)}{1-k\,\mathrm{sn}(a+b)}} = \mathfrak{Arc\,Tang}(k\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{snc}\,a) + \mathfrak{Arc\,Tang}(k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{snc}\,b).\end{cases}$$

Aus diesen Formeln erhält man nach §. 31. auf der Stelle:

$$
14. \begin{cases}
\frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{1+\frac{ik}{k'}\operatorname{cnc}(a\pm b)}{1-\frac{ik}{k'}\operatorname{cnc}(a\pm b)}} \\
= \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{k}{k'}\operatorname{cnc}a\operatorname{cn}b\right) \pm \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{k}{k'}\operatorname{cnc}b\operatorname{cn}a\right), \\
\frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{1+\frac{ik}{k'}\operatorname{cnc}(a+b)}{1+\frac{ik}{k'}\operatorname{cnc}(a-b)}} \\
= \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{k}{k'}\operatorname{cnc}b\operatorname{cn}a\right) - i\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{k^2}{k'^2}\operatorname{cnc}a\operatorname{cnc}b\operatorname{cn}a\operatorname{cn}b\right), \\
\frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{1-\frac{ik}{k'}\operatorname{cnc}(a-b)}{1-\frac{ik}{k'}\operatorname{cnc}(a+b)}} \\
= \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{k}{k'}\operatorname{cnc}b\operatorname{cn}a\right) + i\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{k^2}{k'^2}\operatorname{cnc}a\operatorname{cnc}b\operatorname{cn}a\operatorname{cn}b\right).
\end{cases}
$$

Vertauscht man in den Gleichungen (9.) und (10.) die beiden conjugirten Modul, und setzt man ferner ai für a und bi für b, so erhält man:

$$
15. \begin{cases}
\frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{1+i\operatorname{tn}(a+b)}{1+i\operatorname{tn}(a-b)}} = \operatorname{arc\,tang}(\operatorname{tn}b\operatorname{dn}a) - i\,\mathfrak{Arc\,Tang}(\operatorname{tn}a\operatorname{tn}b\operatorname{dn}a\operatorname{dn}b), \\
\frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{1-i\operatorname{tn}(a-b)}{1-i\operatorname{tn}(a+b)}} = \operatorname{arc\,tang}(\operatorname{tn}b\operatorname{dn}a) + i\,\mathfrak{Arc\,Tang}(\operatorname{tn}a\operatorname{tn}b\operatorname{dn}a\operatorname{dn}b).
\end{cases}
$$

§. 34.

Aus den Formeln (1.) des §. 11 erhält man durch Addition und Subtraction

$$
1. \begin{cases}
\operatorname{sn}(a+b)+\operatorname{sn}(a-b) = \frac{2\operatorname{sn}a\operatorname{cn}b\operatorname{dn}b}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b}, \\
\operatorname{sn}(a+b)-\operatorname{sn}(a-b) = \frac{2\operatorname{sn}b\operatorname{cn}a\operatorname{dn}a}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b}.
\end{cases}
$$

Setzt man hierin $a+iK'$ für a, so erhält man auf der Stelle nach §. (28.)

$$
2. \begin{cases}
\frac{1}{\operatorname{sn}(a-b)}+\frac{1}{\operatorname{sn}(a+b)} = \frac{2\operatorname{sn}a\operatorname{cn}b\operatorname{dn}b}{\operatorname{sn}^2a-\operatorname{sn}^2b}, \\
\frac{1}{\operatorname{sn}(a-b)}-\frac{1}{\operatorname{sn}(a+b)} = \frac{2\operatorname{sn}b\operatorname{cn}a\operatorname{dn}a}{\operatorname{sn}^2a-\operatorname{sn}^2b}.
\end{cases}
$$

Weiter hat man die Formeln:

$$
3. \begin{cases}
\operatorname{cn}(a-b)+\operatorname{cn}(a+b) = \frac{2\operatorname{cn}a\operatorname{cn}b}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b}, \\
\operatorname{cn}(a-b)-\operatorname{cn}(a+b) = \frac{2\operatorname{sn}a\operatorname{sn}b\operatorname{dn}a\operatorname{dn}b}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b}
\end{cases}
$$

und

$$4.\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\mathrm{cn}(a+b)}+\dfrac{1}{\mathrm{cn}(a-b)} = \dfrac{2\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cn}\,b}{\mathrm{cn}^2 a\,\mathrm{cn}^2 b - k'^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b}, \\ \dfrac{1}{\mathrm{cn}(a+b)}-\dfrac{1}{\mathrm{cn}(a-b)} = \dfrac{2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,b}{\mathrm{cn}^2 a\,\mathrm{cn}^2 b - k'^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b}. \end{cases}$$

Für die Differenten erhält man die Formeln:

$$5.\quad \begin{cases} \mathrm{dn}(a-b)+\mathrm{dn}(a+b) = \dfrac{2\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,b}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b}, \\ \mathrm{dn}(a-b)-\mathrm{dn}(a+b) = \dfrac{2k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cn}\,b}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b} \end{cases}$$

und noch nach §. 31.

$$6.\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\mathrm{dn}(a+b)}+\dfrac{1}{\mathrm{dn}(a-b)} = \dfrac{2\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,b}{\mathrm{dn}^2 a - k^2\,\mathrm{sn}^2 b\,\mathrm{cn}^2 a}, \\ \dfrac{1}{\mathrm{dn}(a+b)}-\dfrac{1}{\mathrm{dn}(a-b)} = \dfrac{2k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cn}\,b}{\mathrm{dn}^2 a - k^2\,\mathrm{sn}^2 b\,\mathrm{cn}^2 a}. \end{cases}$$

Die Formeln für die Tangenten sind

$$7.\quad \begin{cases} \mathrm{tn}(a+b)+\mathrm{tn}(a-b) = \dfrac{2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,b}{\mathrm{cn}^2 a\,\mathrm{cn}^2 b - k'^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b}, \\ \mathrm{tn}(a+b)-\mathrm{tn}(a-b) = \dfrac{2\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cn}\,b\,\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{cn}^2 a\,\mathrm{cn}^2 b - k'^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b} \end{cases}$$

und

$$8.\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\mathrm{tn}(a-b)}+\dfrac{1}{\mathrm{tn}(a+b)} = \dfrac{2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,b}{\mathrm{sn}^2 a - \mathrm{sn}^2 b}, \\ \dfrac{1}{\mathrm{tn}(a-b)}-\dfrac{1}{\mathrm{tn}(a+b)} = \dfrac{2\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cn}\,b\,\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{sn}^2 a - \mathrm{sn}^2 b}. \end{cases}$$

§. 35.

Aus den Formeln für $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin\beta$ und $\cos\beta$ im §. 12. leitet man her die Formeln für $\sin 2\alpha$, $\sin 2\beta$, $\cos 2\alpha$ und $\cos 2\beta$; da $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ und $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ ist, so findet man auf der Stelle:

$$1.\quad \begin{cases} \sin[\mathrm{am}(a+b)+\mathrm{am}(a-b)] = \dfrac{2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,b}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b}, \\ \sin[\mathrm{am}(a+b)-\mathrm{am}(a-b)] = \dfrac{2\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cn}\,b\,\mathrm{dn}\,a}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b}, \\ \cos[\mathrm{am}(a+b)+\mathrm{am}(a-b)] = \dfrac{\mathrm{cn}^2 a - \mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{dn}^2 b}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b}, \\ \cos[\mathrm{am}(a+b)-\mathrm{am}(a-b)] = \dfrac{\mathrm{cn}^2 b - \mathrm{sn}^2 b\,\mathrm{dn}^2 a}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b}, \end{cases}$$

und hieraus gehen durch Addition und Subtraction hervor die folgenden:

$$2.\quad\begin{cases}\operatorname{sn}(a+b)\operatorname{cn}(a-b)=\dfrac{\operatorname{sn}a\operatorname{cn}a\operatorname{dn}b+\operatorname{sn}b\operatorname{cn}b\operatorname{dn}a}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b},\\ \operatorname{cn}(a+b)\operatorname{sn}(a-b)=\dfrac{\operatorname{sn}a\operatorname{cn}a\operatorname{dn}b-\operatorname{sn}b\operatorname{cn}b\operatorname{dn}a}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b},\\ \operatorname{cn}(a+b)\operatorname{cn}(a-b)=\dfrac{\operatorname{cn}^2a-\operatorname{sn}^2b\operatorname{dn}^2a}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b}\\ \qquad=\dfrac{\operatorname{cn}^2a\operatorname{cn}^2b-k'^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b}=\dfrac{\operatorname{cn}^2a-\operatorname{cnc}^2b}{1+\frac{k^2}{k'^2}\operatorname{cn}^2a\operatorname{cnc}^2b},\\ \operatorname{sn}(a+b)\operatorname{sn}(a-b)=\dfrac{\operatorname{sn}^2a-\operatorname{sn}^2b}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b}.\end{cases}$$

Die beiden letzten Gleichungen erhält man auch, wenn man die Gleichungen (3.) durch (4.) ferner (1.) durch (2.) im §. 34. dividirt.

Aus diesen Formeln leitet man nach §. 27., §. 30. und §. 31. noch die folgenden her:

$$3.\quad\begin{cases}\operatorname{sn}(a+b)\operatorname{dn}(a-b)=\dfrac{\operatorname{sn}a\operatorname{dn}a\operatorname{cn}b+\operatorname{sn}b\operatorname{dn}b\operatorname{cn}a}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b},\\ \operatorname{sn}(a-b)\operatorname{dn}(a+b)=\dfrac{\operatorname{sn}a\operatorname{dn}a\operatorname{cn}b-\operatorname{sn}b\operatorname{dn}b\operatorname{cn}a}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b},\\ \operatorname{dn}(a+b)\operatorname{dn}(a-b)=\dfrac{\operatorname{dn}^2a-k^2\operatorname{sn}^2b\operatorname{cn}^2a}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b}=\dfrac{\operatorname{dn}^2a+k'^2\operatorname{tn}^2b}{1+\operatorname{dn}^2a\operatorname{tn}^2b},\\ \operatorname{cn}(a-b)\operatorname{dn}(a+b)=\dfrac{\operatorname{cn}a\operatorname{cn}b\operatorname{dn}a\operatorname{dn}b+k'^2\operatorname{sn}a\operatorname{sn}b}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b},\\ \operatorname{cn}(a+b)\operatorname{dn}(a-b)=\dfrac{\operatorname{cn}a\operatorname{cn}b\operatorname{dn}a\operatorname{dn}b-k'^2\operatorname{sn}a\operatorname{sn}b}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b},\\ \operatorname{tn}(a+b)\operatorname{tn}(a-b)=\dfrac{\operatorname{sn}^2a-\operatorname{sn}^2b}{\operatorname{cn}^2a\operatorname{cn}^2b-k'^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b}=\dfrac{\operatorname{tn}^2a-\operatorname{tn}^2b}{1-k'^2\operatorname{tn}^2a\operatorname{tn}^2b},\\ \dfrac{\operatorname{tn}(a+b)}{\operatorname{cn}(a-b)}=\dfrac{\operatorname{sn}a\operatorname{cn}a\operatorname{dn}b+\operatorname{sn}b\operatorname{cn}b\operatorname{dn}a}{\operatorname{cn}^2a\operatorname{cn}^2b-k'^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b},\\ \dfrac{\operatorname{tn}(a-b)}{\operatorname{cn}(a+b)}=\dfrac{\operatorname{sn}a\operatorname{cn}a\operatorname{dn}b-\operatorname{sn}b\operatorname{cn}b\operatorname{dn}a}{\operatorname{cn}^2a\operatorname{cn}^2b-k'^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b}.\end{cases}$$

§. 36.

Aus den vorhin gefundenen Formeln leiten wir noch her die folgenden:

$$1.\quad\begin{cases}1+\operatorname{sn}(a+b)\operatorname{sn}(a-b)=\dfrac{\operatorname{cn}^2b+\operatorname{sn}^2a\operatorname{dn}^2b}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b},\\ 1-\operatorname{sn}(a+b)\operatorname{sn}(a-b)=\dfrac{\operatorname{cn}^2a+\operatorname{sn}^2b\operatorname{dn}^2a}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b},\end{cases}$$

$$2.\quad \begin{cases} 1+\operatorname{cn}(a+b)\operatorname{cn}(a-b)=\dfrac{\operatorname{cn}^2 b+\operatorname{cn}^2 a}{1-k^2\operatorname{sn}^2 a\operatorname{sn}^2 b}, \\ 1-\operatorname{cn}(a+b)\operatorname{cn}(a-b)=\dfrac{\operatorname{sn}^2 a\operatorname{dn}^2 b+\operatorname{sn}^2 b\operatorname{dn}^2 a}{1-k^2\operatorname{sn}^2 a\operatorname{sn}^2 b}, \end{cases}$$

$$3.\quad \begin{cases} 1+k^2\operatorname{sn}(a+b)\operatorname{sn}(a-b)=\dfrac{\operatorname{dn}^2 b+k^2\operatorname{sn}^2 a\operatorname{cn}^2 b}{1-k^2\operatorname{sn}^2 a\operatorname{sn}^2 b}, \\ 1-k^2\operatorname{sn}(a+b)\operatorname{sn}(a-b)=\dfrac{\operatorname{dn}^2 a+k^2\operatorname{sn}^2 b\operatorname{cn}^2 a}{1-k^2\operatorname{sn}^2 a\operatorname{sn}^2 b}, \end{cases}$$

$$4.\quad \begin{cases} 1+\operatorname{dn}(a+b)\operatorname{dn}(a-b)=\dfrac{\operatorname{dn}^2 b+\operatorname{dn}^2 a}{1-k^2\operatorname{sn}^2 a\operatorname{sn}^2 b}, \\ 1-\operatorname{dn}(a+b)\operatorname{dn}(a-b)=\dfrac{k^2(\operatorname{sn}^2 a\operatorname{cn}^2 b+\operatorname{sn}^2 b\operatorname{cn}^2 a)}{1-k^2\operatorname{sn}^2 a\operatorname{sn}^2 b}, \end{cases}$$

$$5.\quad \begin{cases} 1+\operatorname{tn}(a+b)\operatorname{tn}(a-b)=\dfrac{\operatorname{cn}^2 a-\operatorname{sn}^2 a\operatorname{dn}^2 b}{\operatorname{cn}^2 a-\operatorname{sn}^2 b\operatorname{dn}^2 a}, \\ 1-\operatorname{tn}(a+b)\operatorname{tn}(a-b)=\dfrac{\operatorname{cn}^2 b-\operatorname{sn}^2 b\operatorname{dn}^2 a}{\operatorname{cn}^2 a-\operatorname{sn}^2 b\operatorname{dn}^2 a}, \end{cases}$$

$$6.\quad \begin{cases} k'^2-k^2\operatorname{cn}(a+b)\operatorname{cn}(a-b)=\dfrac{k'^2-k^2\operatorname{cn}^2 a\operatorname{cn}^2 b}{1-k^2\operatorname{sn}^2 a\operatorname{sn}^2 b}, \\ k'^2+k^2\operatorname{cn}(a+b)\operatorname{cn}(a-b)=\dfrac{\operatorname{dn}^2 b\operatorname{dn}^2 a-k^2k'^2\operatorname{sn}^2 a\operatorname{sn}^2 b}{1-k^2\operatorname{sn}^2 a\operatorname{sn}^2 b}. \end{cases}$$

Addirt man zu den Gleichungen (1.) die Gleichungen für $\operatorname{sn}(a+b)\pm\operatorname{sn}(a-b)$ und subtrahirt man auch, so erhält man:

$$7.\quad \begin{cases} (1\pm\operatorname{sn}(a+b))(1\pm\operatorname{sn}(a-b))=\dfrac{(\operatorname{cn} b\pm\operatorname{sn} a\operatorname{dn} b)^2}{1-k^2\operatorname{sn}^2 a\operatorname{sn}^2 b}, \\ (1\pm\operatorname{sn}(a+b))(1\mp\operatorname{sn}(a-b))=\dfrac{(\operatorname{cn} a\pm\operatorname{sn} b\operatorname{dn} a)^2}{1-k^2\operatorname{sn}^2 a\operatorname{sn}^2 b}. \end{cases}$$

In ähnlicher Weise oder nach §. 30. aus den vorigen erhält man:

$$8.\quad \begin{cases} (1\pm k\operatorname{sn}(a+b))(1\pm k\operatorname{sn}(a-b))=\dfrac{(\operatorname{dn} b\pm k\operatorname{sn} a\operatorname{cn} b)^2}{1-k^2\operatorname{sn}^2 a\operatorname{sn}^2 b}, \\ (1\pm k\operatorname{sn}(a+b))(1\mp k\operatorname{sn}(a-b))=\dfrac{(\operatorname{dn} a\pm k\operatorname{sn} b\operatorname{cn} a)^2}{1-k^2\operatorname{sn}^2 a\operatorname{sn}^2 b}. \end{cases}$$

Für die Cosinus findet man:

$$9.\quad \begin{cases} (1\pm\operatorname{cn}(a+b))(1\pm\operatorname{cn}(a-b))=\dfrac{(\operatorname{cn} a\pm\operatorname{cn} b)^2}{1-k^2\operatorname{sn}^2 a\operatorname{sn}^2 b}, \\ (1\pm\operatorname{cn}(a-b))(1\mp\operatorname{cn}(a+b))=\dfrac{(\operatorname{sn} a\operatorname{dn} b\pm\operatorname{sn} b\operatorname{dn} a)^2}{1-k^2\operatorname{sn}^2 a\operatorname{sn}^2 b}. \end{cases}$$

Für die Differenten erhält man hieraus nach §. 30. auf der Stelle:

$$10.\quad \begin{cases} (1\pm\mathrm{dn}(a+b))(1\pm\mathrm{dn}(a-b)) = \dfrac{(\mathrm{dn}\,a\pm\mathrm{dn}\,b)^2}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b}, \\ (1\pm\mathrm{dn}(a-b))(1\mp\mathrm{dn}(a+b)) = \dfrac{k^2(\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,b\pm\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cn}\,a)^2}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b}. \end{cases}$$

Ferner ist für die Cosinus:

$$11.\quad \begin{cases} (k'\pm ik\,\mathrm{cn}(a+b))(k'\pm ik\,\mathrm{cn}(a-b)) = \dfrac{(k'\pm ik\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cn}\,b)^2}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b}, \\ (k'\pm ik\,\mathrm{cn}(a-b))(k'\mp ik\,\mathrm{cn}(a+b)) = \dfrac{(\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,b\pm ikk'\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b)^2}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b}, \end{cases}$$

und für die Tangenten findet sich:

$$12.\quad \begin{cases} (1\pm i\,\mathrm{tn}(a+b))(1\pm i\,\mathrm{tn}(a-b)) = \dfrac{(\mathrm{cn}\,a\pm i\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,b)^2}{\mathrm{cn}^2 a\,\mathrm{cn}^2 b-k'^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b}, \\ (1\pm i\,\mathrm{tn}(a+b))(1\mp i\,\mathrm{tn}(a-b)) = \dfrac{(\mathrm{cn}\,b\pm i\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,a)^2}{\mathrm{cn}^2 a\,\mathrm{cn}^2 b-k'^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b}. \end{cases}$$

§. 37.

Einige von den in §. 35. entwickelten Producten lassen sich noch einfacher darstellen, wenn man die Modular-Functionen der Argumente $2a$ und $2b$ einführt; es hat hiermit eine ähnliche Bewandtniſs, wie mit den analogen Formeln der cyklischen Functionen. Es ist z. B.

$$\sin(a+b)\sin(a-b) = \sin^2 a-\sin^2 b = \cos^2 b-\cos^2 a = \frac{\cos 2b-\cos 2a}{2}.$$

Nach §. 32. *a.* ist $\mathrm{sn}(a\pm b) = \sqrt{\dfrac{1-\mathrm{cn}(2a\pm 2b)}{1+\mathrm{dn}(2a\pm 2b)}}$, daher ist zunächst

$$\mathrm{sn}(a+b).\mathrm{sn}(a-b) = \sqrt{\left[\frac{(1-\mathrm{cn}(2a+2b))(1-\mathrm{cn}(2a-2b))}{(1+\mathrm{dn}(2a+2b))(1+\mathrm{dn}(2a-2b))}\right]},$$

weil aber nach §. 36. ist

$$(1-\mathrm{cn}(2a+2b))(1-\mathrm{cn}(2a-2b)) = \frac{(\mathrm{cn}\,2a-\mathrm{cn}\,2b)^2}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 2a\,\mathrm{sn}^2 2b} \quad \text{und}$$

$$(1+\mathrm{dn}(2a+2b))(1+\mathrm{dn}(2a-2b)) = \frac{(\mathrm{dn}\,2a+\mathrm{dn}\,2b)^2}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 2a\,\mathrm{sn}^2 2b},$$

so erhält man durch die Substitution dieser Werthe

$$\mathrm{sn}(a+b).\mathrm{sn}(a-b) = \pm\frac{\mathrm{cn}\,2a-\mathrm{cn}\,2b}{\mathrm{dn}\,2a+\mathrm{dn}\,2b}.$$

Das Vorzeichen läſst sich leicht bestimmen; da nämlich für $b=0$ aus der Formel folgt $\mathrm{sn}^2 a = \pm\dfrac{\mathrm{cn}\,2a-1}{\mathrm{dn}\,2a+1}$, und dieser Ausdruck positiv sein muſs, so ist das untere Vorzeichen zu nehmen, und also ohne alle Zweideutigkeit

$$1.\quad \mathrm{sn}(a+b).\mathrm{sn}(a-b) = \frac{\mathrm{cn}\,2b-\mathrm{cn}\,2a}{\mathrm{dn}\,2b+\mathrm{dn}\,2a}.$$

Nach §. 30. verwandelt sich diese Formel, wenn ka für a, kb für b und $\frac{1}{k}$ statt des Moduls k gesetzt wird, in

$$2.\quad k^2 . \operatorname{sn}(a+b) . \operatorname{sn}(a-b) = \frac{\operatorname{dn} 2b - \operatorname{dn} 2a}{\operatorname{cn} 2b + \operatorname{cn} 2a}.$$

Setzt man in der Formel (1.) $k'a$ für a, $k'b$ für b und $\frac{ik}{k'}$ statt des Moduls k, so verwandelt sie sich in $\operatorname{cnc}(a+b) . \operatorname{cnc}(a-b) = \dfrac{\operatorname{snc} 2b - \operatorname{snc} 2a}{\frac{1}{\operatorname{dn} 2b} + \frac{1}{\operatorname{dn} 2a}}$, und dieser Ausdruck reducirt sich zunächst auf

$$3.\quad \operatorname{cnc}(a+b) . \operatorname{cnc}(a-b) = \frac{\operatorname{cn} 2b \operatorname{dn} 2a - \operatorname{cn} 2a \operatorname{dn} 2b}{\operatorname{dn} 2b + \operatorname{dn} 2a}.$$

Substituirt man hierin $K-a$ für a, also $2K-2a$ für $2a$, so verwandelt sich nach §. 15. $\operatorname{cn} 2a$ in $-\operatorname{cn} 2a$ und $\operatorname{dn} 2a$ bleibt ungeändert, ferner verwandelt sich $\operatorname{cnc}(a-b)$ in $\operatorname{cn}(a+b)$ und $\operatorname{cnc}(a+b)$ in $\operatorname{cn}(a-b)$, daher haben wir die Formel

$$4.\quad \operatorname{cn}(a+b) . \operatorname{cn}(a-b) = \frac{\operatorname{cn} 2b \operatorname{dn} 2a + \operatorname{cn} 2a \operatorname{dn} 2b}{\operatorname{dn} 2b + \operatorname{dn} 2a}.$$

Aus (1.) und (4.) erhält man durch Subtraction und Addition

$$5.\quad \begin{cases} \cos(\operatorname{am}(a+b) + \operatorname{am}(a-b)) = \dfrac{\operatorname{cn} 2a(1+\operatorname{dn} 2b) - \operatorname{cn} 2b(1-\operatorname{dn} 2a)}{\operatorname{dn} 2b + \operatorname{dn} 2a}, \\ \cos(\operatorname{am}(a+b) - \operatorname{am}(a-b)) = \dfrac{\operatorname{cn} 2b(1+\operatorname{dn} 2a) - \operatorname{cn} 2a(1-\operatorname{dn} 2b)}{\operatorname{dn} 2b + \operatorname{dn} 2a}. \end{cases}$$

Hieraus leitet man her

$$1+\cos(\operatorname{am}(a+b) + \operatorname{am}(a-b)) = \frac{(1+\operatorname{cn} 2a)(1+\operatorname{dn} 2b) - (1+\operatorname{cn} 2b)(1-\operatorname{dn} 2a)}{\operatorname{dn} 2b + \operatorname{dn} 2a},$$

$$1-\cos(\operatorname{am}(a+b) + \operatorname{am}(a-b)) = \frac{(1-\operatorname{cn} 2a)(1+\operatorname{dn} 2b) - (1-\operatorname{cn} 2b)(1-\operatorname{dn} 2a)}{\operatorname{dn} 2b + \operatorname{dn} 2a}.$$

Aus (1.) und (4.) erhält man durch Division

$$6.\quad \operatorname{tn}(a+b) . \operatorname{tn}(a-b) = \frac{\operatorname{cn} 2b - \operatorname{cn} 2a}{\operatorname{cn} 2b \operatorname{dn} 2a + \operatorname{cn} 2a \operatorname{dn} 2b}.$$

Setzt man in der Formel (1.) $K-a$ für a, so verwandelt sie sich in

$$\operatorname{snc}(a+b) \operatorname{snc}(a-b) = \frac{\operatorname{cn}(a+b) \operatorname{cn}(a-b)}{\operatorname{dn}(a+b) \operatorname{dn}(a-b)} = \frac{\operatorname{cn} 2b + \operatorname{cn} 2a}{\operatorname{dn} 2b + \operatorname{dn} 2a},$$

und wird die Formel (4.) hierdurch dividirt, so erhält man

$$7.\quad \operatorname{dn}(a+b) \operatorname{dn}(a-b) = \frac{\operatorname{cn} 2b \operatorname{dn} 2a + \operatorname{cn} 2a \operatorname{dn} 2b}{\operatorname{cn} 2b + \operatorname{cn} 2a}.$$

Dasselbe Resultat findet man auch unmittelbar durch Anwendung der Sätze des §. 30. auf die Formel (5.).

Auch die Verhältnisse der gleichnamigen Functionen von $a+b$ und $a-b$ lassen sich in eben so einfachen Ausdrücken darstellen.

Setzt man in der Gleichung (1.) $a+\frac{iK'}{2}$ für a, $b+\frac{iK'}{2}$ für b, so bleibt $a-b$ ungeändert, und $a+b$ verwandelt sich in $a+b+iK'$, also $\operatorname{sn}(a+b)$ in $\frac{1}{k\operatorname{sn}(a+b)}$, $2a$ verwandelt sich in $2a+iK'$ und $2b$ in $2b+iK'$, daher erhalten wir

$$\frac{\operatorname{sn}(a-b)}{k\operatorname{sn}(a+b)} = \left(\frac{-i\operatorname{dn}2b}{k\operatorname{sn}2b} + \frac{i\operatorname{dn}2a}{k\operatorname{sn}2a}\right) : \left(\frac{-i}{\operatorname{tn}2b} + \frac{-i}{\operatorname{tn}2a}\right),$$

also

$$\frac{\operatorname{sn}(a-b)}{\operatorname{sn}(a+b)} = \frac{\operatorname{dn}2b\operatorname{sn}2a - \operatorname{dn}2a\operatorname{sn}2b}{\operatorname{sn}2a\,.\operatorname{sn}2b} : \frac{\operatorname{sn}2a\operatorname{cn}2b + \operatorname{sn}2b\operatorname{cn}2a}{\operatorname{sn}2a\operatorname{sn}2b},$$

daher reducirt sich der Ausdruck auf

$$8.\quad \frac{\operatorname{sn}(a-b)}{\operatorname{sn}(a+b)} = \frac{\operatorname{dn}2b\operatorname{sn}2a - \operatorname{dn}2a\operatorname{sn}2b}{\operatorname{sn}2a\operatorname{cn}2b + \operatorname{sn}2b\operatorname{cn}2a},$$

und die Anwendung des §. 30. auf diese Formel verwandelt sie sogleich in

$$9.\quad \frac{\operatorname{sn}(a-b)}{\operatorname{sn}(a+b)} = \frac{\operatorname{cn}2b\operatorname{sn}2a - \operatorname{cn}2a\operatorname{sn}2b}{\operatorname{dn}2b\operatorname{sn}2a + \operatorname{dn}2a\operatorname{sn}2b}.$$

Aus diesen beiden Formeln folgt noch

$$\frac{\operatorname{sn}(a+b)}{\operatorname{sn}(a-b)} = \sqrt{\frac{\operatorname{dn}2b\operatorname{sn}2a + \operatorname{dn}2a\operatorname{sn}2b}{\operatorname{dn}2b\operatorname{sn}2a - \operatorname{dn}2a\operatorname{sn}2b}} \cdot \sqrt{\frac{\operatorname{sn}2a\operatorname{cn}2b + \operatorname{sn}2b\operatorname{cn}2a}{\operatorname{sn}2a\operatorname{cn}2b - \operatorname{sn}2b\operatorname{cn}2a}}.$$

Dieser Ausdruck ist nöthig, wenn $\frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\operatorname{sn}(a+bi)}{\operatorname{sn}(a-bi)}}$ in einer reellen Form dargestellt werden soll. Zieht man aus der vorigen Gleichung noch einmal die Quadratwurzel, und nimmt man auf beiden Seiten die natürlichen Logarithmen so erhält man

$$\log\sqrt{\frac{\operatorname{sn}(a+b)}{\operatorname{sn}(a-b)}} = \tfrac{1}{2}\operatorname{Arc\,Tang}\left(\frac{\operatorname{dn}2a}{\operatorname{sn}2a}\cdot\frac{\operatorname{sn}2b}{\operatorname{dn}2b}\right) + \tfrac{1}{2}\operatorname{Arc\,Tang}\left(\frac{\operatorname{tn}2b}{\operatorname{tn}2a}\right)$$

oder

$$10.\quad \begin{cases} \log\sqrt{\frac{\operatorname{sn}(a+b)}{\operatorname{sn}(a-b)}} = \tfrac{1}{2}\operatorname{Arc\,Tang}\left(\frac{\operatorname{tn}2b}{\operatorname{tn}2a}\right) + \tfrac{1}{2}\operatorname{Arc\,Tang}\left(\frac{\operatorname{cnc}2b}{\operatorname{cnc}2a}\right) \text{ und} \\ \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\operatorname{sn}(a+bi)}{\operatorname{sn}(a-bi)}} = \tfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{sn}'2b}{\operatorname{tn}2a}\right) + \tfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{k'}{k}\cdot\frac{\operatorname{cnc}'2b}{\operatorname{cnc}2a}\right). \end{cases}$$

Vertauscht man in den Gleichungen (8.) und (9.) die beiden conjugirten Modul und setzt man ai für a, wie auch bi für b, so erhält man

$$11.\quad \frac{\operatorname{tn}(a-b)}{\operatorname{tn}(a+b)} = \frac{\operatorname{sn}2a\operatorname{dn}2b - \operatorname{sn}2b\operatorname{dn}2a}{\operatorname{sn}2a + \operatorname{sn}2b} = \frac{\operatorname{sn}2a - \operatorname{sn}2b}{\operatorname{sn}2a\operatorname{dn}2b + \operatorname{sn}2b\operatorname{dn}2a},$$

und die Gleichungen (10.) werden nun

$$12.\quad\begin{cases}\log\sqrt{\dfrac{\mathrm{tn}(a+b)}{\mathrm{tn}(a-b)}}=\tfrac{1}{2}\,\mathfrak{ArcTang}\left(\dfrac{\mathrm{sn}\,2b}{\mathrm{sn}\,2a}\right)+\tfrac{1}{2}\,\mathfrak{ArcTang}\left(\dfrac{\mathrm{cnc}\,2b}{\mathrm{cnc}\,2a}\right),\\[2ex] \dfrac{1}{i}\log\sqrt{\dfrac{\mathrm{tn}(a+bi)}{\mathrm{tn}(a-bi)}}=\tfrac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tang}\left(\dfrac{\mathrm{tn}'\,2b}{\mathrm{sn}\,2a}\right)+\tfrac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tang}\left(\dfrac{k'}{k}\cdot\dfrac{\mathrm{cnc}'\,2b}{\mathrm{cnc}\,2a}\right).\end{cases}$$

Werden die Gleichungen (8.) und (9.) durch (11.) dividirt, so entsteht

$$13.\quad\frac{\mathrm{cn}(a-b)}{\mathrm{cn}(a+b)}=\frac{\mathrm{sn}\,2a+\mathrm{sn}\,2b}{\mathrm{sn}\,2a\,\mathrm{cn}\,2b+\mathrm{sn}\,2b\,\mathrm{cn}\,2a}=\frac{\mathrm{sn}\,2a\,\mathrm{cn}\,2b-\mathrm{sn}\,2b\,\mathrm{cn}\,2a}{\mathrm{sn}\,2a-\mathrm{sn}\,2b},$$

und aus den Gleichungen (10.) und (12.) erhält man durch Subtraction

$$14.\quad\begin{cases}\log\sqrt{\dfrac{\mathrm{cn}(a-b)}{\mathrm{cn}(a+b)}}=\tfrac{1}{2}\,\mathfrak{ArcTang}\left(\dfrac{\mathrm{sn}\,2b}{\mathrm{sn}\,2a}\right)-\tfrac{1}{2}\,\mathfrak{ArcTang}\left(\dfrac{\mathrm{tn}\,2b}{\mathrm{tn}\,2a}\right),\\[2ex] \dfrac{1}{i}\log\sqrt{\dfrac{\mathrm{cn}(a-bi)}{\mathrm{cn}(a+bi)}}=\tfrac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tang}\left(\dfrac{\mathrm{tn}'\,2b}{\mathrm{sn}\,2a}\right)-\tfrac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tang}\left(\dfrac{\mathrm{sn}'\,2b}{\mathrm{tn}\,2a}\right).\end{cases}$$

Nach §. 30. verwandelt sich die Formel (13.) in

$$15.\quad\frac{\mathrm{dn}(a-b)}{\mathrm{dn}(a+b)}=\frac{\mathrm{sn}\,2a+\mathrm{sn}\,2b}{\mathrm{sn}\,2a\,\mathrm{dn}\,2b+\mathrm{sn}\,2b\,\mathrm{dn}\,2a}=\frac{\mathrm{sn}\,2a\,\mathrm{dn}\,2b-\mathrm{sn}\,2b\,\mathrm{dn}\,2a}{\mathrm{sn}\,2a-\mathrm{sn}\,2b},$$

und aus den Formeln (14.) wird

$$16.\quad\begin{cases}\log\sqrt{\dfrac{\mathrm{dn}(a-b)}{\mathrm{dn}(a+b)}}=\tfrac{1}{2}\,\mathfrak{ArcTang}\left(\dfrac{\mathrm{sn}\,2b}{\mathrm{sn}\,2a}\right)-\tfrac{1}{2}\,\mathfrak{ArcTang}\left(\dfrac{\mathrm{cnc}\,2b}{\mathrm{cnc}\,2a}\right),\\[2ex] \dfrac{1}{i}\log\sqrt{\dfrac{\mathrm{dn}(a-bi)}{\mathrm{dn}(a+bi)}}=\tfrac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tang}\left(\dfrac{\mathrm{tn}'\,2b}{\mathrm{sn}\,2a}\right)-\tfrac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tang}\left(\dfrac{k'}{k}\cdot\dfrac{\mathrm{cnc}'\,2b}{\mathrm{cnc}\,2a}\right).\end{cases}$$

Setzt man in der Formel (1.) $\frac{K}{2}-b$ für a und $\frac{K}{2}-a$ für b, so verwandelt sich $a+b$ in $K-(a+b)$ und $a-b$ bleibt ungeändert; da sich nun $2a$ verwandelt in $K-2b$ und $2b$ in $K-2a$, so erhalten wir

$$\mathrm{snc}(a+b)\,.\,\mathrm{sn}(a-b)=\frac{\mathrm{cnc}\,2a-\mathrm{cnc}\,2b}{\mathrm{dnc}\,2a+\mathrm{dnc}\,2b}.$$

Vertauschen wir nun die beiden conjugirten Modul, zugleich ai für a und bi für b setzend, so erhalten wir

$$\frac{\mathrm{tn}(a-b)}{\mathrm{dn}(a+b)}=\frac{k}{k'}\cdot\frac{\mathrm{cnc}\,2a-\mathrm{cnc}\,2b}{k\,\mathrm{snc}\,2a+k\,\mathrm{snc}\,2b},$$

oder einfacher

$$17.\quad\begin{cases}\dfrac{\mathrm{tn}(a-b)}{\mathrm{dn}(a+b)}=\dfrac{\mathrm{sn}\,2a\,\mathrm{dn}\,2b-\mathrm{sn}\,2b\,\mathrm{dn}\,2a}{\mathrm{cn}\,2a\,\mathrm{dn}\,2b+\mathrm{cn}\,2b\,\mathrm{dn}\,2a}\quad\text{und}\\[2ex] \dfrac{\mathrm{tn}(a+b)}{\mathrm{dn}(a-b)}=\dfrac{\mathrm{sn}\,2a\,\mathrm{dn}\,2b+\mathrm{sn}\,2b\,\mathrm{dn}\,2a}{\mathrm{cn}\,2a\,\mathrm{dn}\,2b+\mathrm{cn}\,2b\,\mathrm{dn}\,2a}.\end{cases}$$

Setzen wir in der ersten Formel wieder $\frac{K}{2}-a$ für b und $\frac{K}{2}-b$ für a, so erhalten wir

$$\frac{\mathrm{tn}(a-b)}{\mathrm{dnc}(a+b)}=\frac{\mathrm{snc}\,2b\,\mathrm{dnc}\,2a-\mathrm{snc}\,2a\,\mathrm{dnc}\,2b}{\mathrm{cnc}\,2b\,\mathrm{dnc}\,2a+\mathrm{cnc}\,2a\,\mathrm{dnc}\,2b},$$

oder nach einer leichten Reduction:

$$18.\quad \begin{cases} \operatorname{tn}(a-b)\operatorname{dn}(a+b) = \dfrac{\operatorname{cn}2b-\operatorname{cn}2a}{\operatorname{sn}2b+\operatorname{sn}2a} = \dfrac{\operatorname{sn}2a-\operatorname{sn}2b}{\operatorname{cn}2b+\operatorname{cn}2a}, \\ \operatorname{tn}(a+b)\operatorname{dn}(a-b) = \dfrac{\operatorname{cn}2b-\operatorname{cn}2a}{\operatorname{sn}2a-\operatorname{sn}2b} = \dfrac{\operatorname{sn}2a+\operatorname{sn}2b}{\operatorname{cn}2b+\operatorname{cn}2a}, \end{cases}$$

Multiplicirt man die Formeln (17. mit (7.), so erhält man

$$19.\quad \begin{cases} \operatorname{tn}(a-b)\operatorname{dn}(a-b) = \dfrac{\operatorname{sn}2a\operatorname{dn}2b-\operatorname{sn}2b\operatorname{dn}2a}{\operatorname{cn}2b+\operatorname{cn}2a} = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\operatorname{am}(2a-2b), \\ \operatorname{tn}(a+b)\operatorname{dn}(a+b) = \dfrac{\operatorname{sn}2a\operatorname{dn}2b+\operatorname{sn}2b\operatorname{dn}2a}{\operatorname{cn}2b+\operatorname{cn}2a} = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\operatorname{am}(2a+2b). \end{cases}$$

Multiplicirt man die Formeln (1.) und (2.), und subtrahirt man das Product von Eins, so erhält man

$$20.\quad 1-k^2\operatorname{sn}^2(a+b)\operatorname{sn}^2(a-b) = \frac{2(\operatorname{dn}2b\operatorname{cn}2b+\operatorname{dn}2a\operatorname{cn}2a)}{(\operatorname{dn}2b+\operatorname{dn}2a)(\operatorname{cn}2b+\operatorname{cn}2a)}.$$

Zusatz. Wenn die Argumente a und b nicht verdoppelt werden, so ist

$$\log\sqrt{\frac{\operatorname{sn}(a+b)}{\operatorname{sn}(a-b)}} = \mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\left(\frac{\operatorname{sn}b\operatorname{cn}a\operatorname{dn}a}{\operatorname{sn}a\operatorname{cn}b\operatorname{dn}b}\right),$$

oder einfacher

$$21.\quad \begin{cases} \log\sqrt{\dfrac{\operatorname{sn}(a+b)}{\operatorname{sn}(a-b)}} = \mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\left(\dfrac{\operatorname{tn}b\operatorname{dn}a}{\operatorname{tn}a\operatorname{dn}b}\right) = \mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\left(\dfrac{\operatorname{cnc}b}{\operatorname{cn}b}\cdot\dfrac{\operatorname{cn}a}{\operatorname{cnc}a}\right) \text{ und} \\ \dfrac{1}{i}\log\sqrt{\dfrac{\operatorname{sn}(a+bi)}{\operatorname{sn}(a-bi)}} = \operatorname{arc\,tang}\left(\dfrac{\operatorname{dn}a}{\operatorname{tn}a}\operatorname{sn}'b\operatorname{snc}'b\right). \end{cases}$$

Hieraus folgt auf der Stelle

$$22.\quad \begin{cases} \log\sqrt{\dfrac{\operatorname{tn}(a+b)}{\operatorname{tn}(a-b)}} = \mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\left(\dfrac{\operatorname{sn}b\operatorname{snc}b}{\operatorname{sn}a\operatorname{snc}a}\right); \\ \dfrac{1}{i}\log\sqrt{\dfrac{\operatorname{tn}(a+bi)}{\operatorname{tn}(a-bi)}} = \operatorname{arc\,tang}\left(\dfrac{1}{\operatorname{sn}a\operatorname{snc}a}\cdot\dfrac{\operatorname{tn}'b}{\operatorname{dn}'b}\right). \end{cases}$$

Für die Cosinus erhalten wir die Formel

$$23.\quad \begin{cases} \log\sqrt{\dfrac{\operatorname{cn}(a-b)}{\operatorname{cn}(a+b)}} = \mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}(\operatorname{tn}a\operatorname{dn}a\operatorname{tn}b\operatorname{dn}b) = \mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\left(\dfrac{\operatorname{sn}a}{\operatorname{snc}a}\cdot\dfrac{\operatorname{sn}b}{\operatorname{snc}b}\right) \\ \qquad = \mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}(\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\operatorname{am}2a.\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\operatorname{am}2b), \text{ also} \\ \dfrac{1}{i}\log\sqrt{\dfrac{\operatorname{cn}(a-bi)}{\operatorname{cn}(a+bi)}} = \operatorname{arc\,tang}(\operatorname{tn}a\operatorname{dn}a\operatorname{tn}'b\operatorname{dn}'b) = \operatorname{arc\,tang}\left(\dfrac{\operatorname{sn}a}{\operatorname{snc}a}\cdot\dfrac{\operatorname{sn}'b}{\operatorname{snc}'b}\right) \\ \qquad = \operatorname{arc\,tang}(\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\operatorname{am}2a.\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\operatorname{am}'2b). \end{cases}$$

Die Differenten endlich geben die Formeln

$$24.\quad \begin{cases} \log\sqrt{\dfrac{\operatorname{dn}(a-b)}{\operatorname{dn}(a+b)}} = \mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}(k^2\operatorname{sn}a\operatorname{snc}a\operatorname{sn}b\operatorname{snc}b), \\ \dfrac{1}{i}\log\sqrt{\dfrac{\operatorname{dn}(a-bi)}{\operatorname{dn}(a+bi)}} = \operatorname{arc\,tang}\left(k^2\operatorname{sn}a\operatorname{snc}a.\dfrac{\operatorname{tn}'b}{\operatorname{dn}'b}\right). \end{cases}$$

§. 38.

Nach §. 11. (Formel 12.) ist

$$\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,b\,\mathrm{dn}(a+b) = k'^2 + k^2\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cn}\,b\,\mathrm{cn}(a+b);$$

multiplicirt man diese Gleichung mit $\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{tn}\,b\,\mathrm{tn}(a+b)$, so erhält man:

$$\mathrm{tn}a\,\mathrm{dn}a.\mathrm{tn}b\,\mathrm{dn}b.\mathrm{tn}(a+b)\,\mathrm{dn}(a+b) = k'^2\mathrm{tn}a\,\mathrm{tn}b\,\mathrm{tn}(a+b) + k^2\mathrm{sn}a\,\mathrm{sn}b\,\mathrm{sn}(a+b),$$

und da $\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,a = \mathrm{tang}\frac{1}{2}\mathrm{am}\,2a$, $\mathrm{tn}\,b\,\mathrm{dn}\,b = \mathrm{tang}\frac{1}{2}\mathrm{am}\,2b$ und $\mathrm{tn}(a+b)\,\mathrm{dn}(a+b) = \mathrm{tang}\frac{1}{2}\mathrm{am}(2a+2b)$ ist, so kann die Formel auch also vorgestellt werden:

$$1.\quad \mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\mathrm{am}2a.\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\mathrm{am}2b.\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\mathrm{am}(2a+2b)$$
$$= k'^2\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{tn}\,b\,\mathrm{tn}(a+b) + k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{sn}(a+b)$$

oder, wenn man die beiden conjugirten Modul mit einander vertauscht und sich der Formel (2.) des §. 22. erinnert,

$$2.\quad \mathfrak{Tang}\tfrac{1}{2}\mathfrak{Am}\,2a.\mathfrak{Tang}\tfrac{1}{2}\mathfrak{Am}\,2b.\mathfrak{Tang}\tfrac{1}{2}\mathfrak{Am}(2a+2b)$$
$$= k^2\,\mathfrak{Sn}\,a\,\mathfrak{Sn}\,b\,\mathfrak{Sn}(a+b) + k'^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{sn}'b\,\mathrm{sn}'(a+b).$$

Wir leiten diese Gleichungen noch auf eine andere Art her, und finden durch dasselbe Verfahren noch zwei neue Gleichungen, in welchen statt der Summe der beiden Glieder auf der rechten Seite ihr Unterschied vorkommt. Nach §. 37. ist:

$$k^2\mathrm{sn}(a+b).\mathrm{sn}(a-b) = \frac{\mathrm{dn}\,2b - \mathrm{dn}\,2a}{\mathrm{cn}\,2b + \mathrm{cn}\,2a}$$

und

$$k'^2\,\mathrm{tn}(a+b).\mathrm{tn}(a-b) = \frac{\mathrm{dn}\,2a\,\mathrm{cn}\,2b - \mathrm{dn}\,2b\,\mathrm{cn}\,2a}{\mathrm{cn}\,2b + \mathrm{cn}\,2a};$$

wir multipliciren die erste Gleichung mit $\mathrm{sn}\,2a = \mathrm{tn}\,2a.\mathrm{cn}\,2a$ und die zweite mit $\mathrm{tn}\,2a$ selbst, dann ist:

$$k^2\mathrm{sn}(a+b).\mathrm{sn}(a-b).\mathrm{sn}\,2a = \mathrm{tn}\,2a.\frac{\mathrm{dn}\,2b\,\mathrm{cn}\,2a - \mathrm{dn}\,2a\,\mathrm{cn}\,2a}{\mathrm{cn}\,2b + \mathrm{cn}\,2a},$$

$$k'^2\mathrm{tn}(a+b).\mathrm{tn}(a-b).\mathrm{tn}\,2a = \mathrm{tn}\,2a.\frac{\mathrm{dn}\,2a\,\mathrm{cn}\,2b - \mathrm{dn}\,2b\,\mathrm{cn}\,2a}{\mathrm{cn}\,2b + \mathrm{cn}\,2a},$$

und hieraus erhalten wir durch Addition und Subtraction:

$$k^2\,\mathrm{sn}(a+b)\,\mathrm{sn}(a-b)\,\mathrm{sn}\,2a + k'^2\,\mathrm{tn}(a+b)\,\mathrm{tn}(a-b)\,\mathrm{tn}\,2a$$
$$= \mathrm{tn}\,2a\,\mathrm{dn}\,2a.\frac{\mathrm{cn}\,2b - \mathrm{cn}\,2a}{\mathrm{cn}\,2b + \mathrm{cn}\,2a},$$

$$k'^2\,\mathrm{tn}(a+b)\,\mathrm{tn}(a-b)\,\mathrm{tn}\,2a - k^2\,\mathrm{sn}(a+b)\,\mathrm{sn}(a-b)\,\mathrm{sn}\,2a$$
$$= \mathrm{tn}\,2a\,\mathrm{dn}\,2a - \frac{2\,\mathrm{sn}\,2a\,\mathrm{dn}\,2b}{\mathrm{cn}\,2b + \mathrm{cn}\,2a}.$$

Setzt man in diesen Formeln a für $a+b$, b für $a-b$, also $a+b$ für $2a$ und $a-b$ für $2b$, so werden sie

$$k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{sn}(a+b) + k'^2 \operatorname{tn} a \operatorname{tn} b \operatorname{tn}(a+b)$$
$$= \operatorname{tn}(a+b) \operatorname{dn}(a+b) \cdot \frac{\operatorname{cn}(a-b) - \operatorname{cn}(a+b)}{\operatorname{cn}(a-b) + \operatorname{cn}(a+b)}$$
$$k'^2 \operatorname{tn} a \operatorname{tn} b \operatorname{tn}(a+b) - k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{sn}(a+b)$$
$$= \operatorname{tn}(a+b) \operatorname{dn}(a+b) - \frac{2 \operatorname{sn}(a+b) \operatorname{dn}(a-b)}{\operatorname{cn}(a-b) + \operatorname{cn}(a+b)}.$$

Da aber $\frac{\operatorname{cn}(a-b) - \operatorname{cn}(a+b)}{\operatorname{cn}(a-b) + \operatorname{cn}(a+b)} = \operatorname{tn} a \operatorname{dn} a \operatorname{tn} b \operatorname{dn} b$ ist, so ist die erste von diesen beiden Gleichungen also einerlei mit der obigen Gleichung (1.). Da ferner nach §. 35. ist $\operatorname{sn}(a+b) \operatorname{dn}(a-b) = \frac{\operatorname{sn} a \operatorname{dn} a \operatorname{cn} b + \operatorname{sn} b \operatorname{dn} b \operatorname{cn} a}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 b}$, so ist $\frac{2 \operatorname{sn}(a+b) \operatorname{dn}(a-b)}{\operatorname{cn}(a-b) + \operatorname{cn}(a+b)} = \frac{\operatorname{sn} a \operatorname{dn} a \operatorname{cn} b + \operatorname{sn} b \operatorname{dn} b \operatorname{cn} a}{\operatorname{cn} a \operatorname{cn} b} = \operatorname{tn} a \operatorname{dn} a + \operatorname{tn} b \operatorname{dn} b$, und also

$$\operatorname{tn}(a+b) \operatorname{dn}(a+b) - \operatorname{tn} a \operatorname{dn} a - \operatorname{tn} b \operatorname{dn} b$$
$$= k'^2 \operatorname{tn} a \operatorname{tn} b \operatorname{tn}(a+b) - k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{sn}(a+b),$$

oder in anderen Zeichen

$$3. \begin{cases} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \operatorname{am}(2a+2b) = \\ \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \operatorname{am} 2a + \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \operatorname{am} 2b + k'^2 \operatorname{tn} a \operatorname{tn} b \operatorname{tn}(a+b) - k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{sn}(a+b), \\ \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \operatorname{am}(2a-2b) = \\ \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \operatorname{am} 2a - \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \operatorname{am} 2b - k'^2 \operatorname{tn} a \operatorname{tn} b \operatorname{tn}(a-b) + k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{sn}(a-b). \end{cases}$$

Vertauscht man in diesen Gleichungen die beiden conjugirten Modul mit einander, so lassen sie sich also vorstellen

$$4. \begin{cases} \mathfrak{Tang} \tfrac{1}{2} \mathfrak{Am}(2a+2b) = \\ \mathfrak{Tang} \tfrac{1}{2} \mathfrak{Am} 2a + \mathfrak{Tang} \tfrac{1}{2} \mathfrak{Am} 2b + k^2 \mathfrak{Sn} a \mathfrak{Sn} b \mathfrak{Sn}(a+b) - k'^2 \operatorname{sn}' a \operatorname{sn}' b \operatorname{sn}'(a+b), \\ \mathfrak{Tang} \tfrac{1}{2} \mathfrak{Am}(2a-2b) = \\ \mathfrak{Tang} \tfrac{1}{2} \mathfrak{Am} 2a - \mathfrak{Tang} \tfrac{1}{2} \mathfrak{Am} 2b - k^2 \mathfrak{Sn} a \mathfrak{Sn} b \mathfrak{Sn}(a-b) + k'^2 \operatorname{sn}' a \operatorname{sn}' b \operatorname{sn}'(a-b). \end{cases}$$

§. 39.

Wir ziehen nun die Gleichungen (3.) und (1.) des §. 38. näher in Betracht; was von ihnen gilt, kann dann leicht auf die Gleichungen (4.) und (2.) übertragen werden. Durch die Addition der Gleichungen (3.) erhalten wir zunächst

$$\tfrac{1}{2} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \operatorname{am}(2a+2b) + \tfrac{1}{2} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \operatorname{am}(2a-2b)$$
$$= \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \operatorname{am} 2a + k'^2 \mathfrak{Sn}' a \mathfrak{Sn}' b \left(\frac{\mathfrak{Sn}'(a+b) - \mathfrak{Sn}'(a-b)}{2}\right)$$
$$- k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \left(\frac{\operatorname{sn}(a+b) - \operatorname{sn}(a-b)}{2}\right),$$

oder, wenn die cyklischen und hyperbolischen Sinus von $a+b$ und $a-b$ entwickelt werden,

$$5. \quad \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\operatorname{am}(2a+2b)+\operatorname{tang}\frac{1}{2}\operatorname{am}(2a-2b)}{2}$$

$$= \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\operatorname{am}2a + \frac{k'^2\,\mathfrak{Sn}'a\,\mathfrak{Cn}'a\,\mathfrak{Dn}'a\,\mathfrak{Sn}'^2b}{1-k'^2\,\mathfrak{Sn}'^2a\,\mathfrak{Sn}'^2b} - \frac{k^2\operatorname{sn}a\operatorname{cn}a\operatorname{dn}a\operatorname{sn}^2b}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b}.$$

In dieser Gleichung läſst sich auch das Glied $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\operatorname{am}2a = \operatorname{tn}a\operatorname{dn}a$ mit dem einen oder anderen der beiden übrigen Glieder zu einem Gliede zusammenziehen. Es ist

$$\operatorname{tn}a\operatorname{dn}a - \frac{k^2\operatorname{sn}a\operatorname{cn}a\operatorname{dn}a\operatorname{sn}^2b}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b} = \operatorname{tn}a\operatorname{dn}a\left(1-\frac{k^2\operatorname{cn}^2a\operatorname{sn}^2b}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b}\right)$$

$$= \frac{\operatorname{tn}a\operatorname{dn}a\operatorname{dn}^2b}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b},$$

daher verwandelt sich die Gleichung (5.) in

$$6. \quad \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\operatorname{am}(2a+2b)+\operatorname{tang}\frac{1}{2}\operatorname{am}(2a-2b)}{2}$$

$$= \frac{k'^2\,\mathfrak{Sn}'a\,\mathfrak{Cn}'a\,\mathfrak{Dn}'a\,.\,\mathfrak{Sn}'^2b}{1-k'^2\,\mathfrak{Sn}'^2a\,\mathfrak{Sn}'^2b} + \frac{\operatorname{tn}a\operatorname{dn}a\operatorname{dn}^2b}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b}.$$

Eben so findet man $\mathfrak{Tn}a\,\mathfrak{Dn}a + \frac{k^2\,\mathfrak{Sn}a\,\mathfrak{Cn}a\,\mathfrak{Dn}a\,\mathfrak{Sn}^2b}{1-k^2\,\mathfrak{Sn}^2a\,\mathfrak{Sn}^2b} = \frac{\mathfrak{Tn}a\,\mathfrak{Dn}a\,\mathfrak{Dn}^2b}{1-k^2\,\mathfrak{Sn}^2a\,\mathfrak{Sn}^2b}$, und da $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\operatorname{am}2a = \mathfrak{Tang}\frac{1}{2}\mathfrak{Am}'2a = \mathfrak{Tn}'a\,\mathfrak{Dn}'a$ ist, so erhalten wir

$$7. \quad \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\operatorname{am}(2a+2b)+\operatorname{tang}\frac{1}{2}\operatorname{am}(2a-2b)}{2}$$

$$= \frac{\mathfrak{Tn}'a\,\mathfrak{Dn}'a\,\mathfrak{Dn}'^2b}{1-k'^2\,\mathfrak{Sn}'^2a\,\mathfrak{Sn}'^2b} - \frac{k^2\operatorname{sn}a\operatorname{cn}a\operatorname{dn}a\operatorname{sn}^2b}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b}.$$

Die so eben entwickelten Gleichungen (5.), (6.), (7.), welche weiter unten eine wichtigere Bedeutung bekommen werden, lassen sich auch aus der Gleichung (1.) des §. 38. herleiten, und wir übergehen diese Herleitung nicht, weil sie zu einer neuen Darstellung der vorigen Gleichungen führt. Setzt man in der erwähnten Gleichung (1.) $-b$ für b und addirt man die neue Gleichung zu ihr, so erhält man zunächst

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\operatorname{am}2a\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\operatorname{am}2b\,.\left[\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\operatorname{am}(2a+2b)+\operatorname{tang}\frac{1}{2}\operatorname{am}(2a-2b)}{2}\right]$$

$$= k'^2\,\mathfrak{Sn}'a\,\mathfrak{Sn}'b\,.\left[\frac{\mathfrak{Sn}'(a+b)+\mathfrak{Sn}'(a-b)}{2}\right] + k^2\operatorname{sn}a\operatorname{sn}b\,.\left[\frac{\operatorname{sn}(a+b)+\operatorname{sn}(a-b)}{2}\right].$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite wird, wenn er entwickelt wird,

$$= \frac{k'^2\,\mathfrak{Sn}'^2a\,\mathfrak{Cn}'b\,\mathfrak{Dn}'b\,\mathfrak{Sn}'b}{1-k'^2\,\mathfrak{Sn}'^2a\,\mathfrak{Sn}'^2b} + \frac{k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{cn}b\operatorname{dn}b\operatorname{sn}b}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b},$$

und da $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\operatorname{am}2a\operatorname{tang}\frac{1}{2}\operatorname{am}2b = \operatorname{tn}a\operatorname{dn}a\operatorname{tn}b\operatorname{dn}b = \mathfrak{Tn}'a\,\mathfrak{Dn}'a\,\mathfrak{Tn}'b\,\mathfrak{Dn}'b$ ist, so erhält man, wenn die Gleichung hierdurch dividirt wird, die einfachere Darstellung

$$8.\quad \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\operatorname{am}(2a+2b)+\operatorname{tang}\frac{1}{2}\operatorname{am}(2a-2b)}{2}$$
$$= \frac{k'^2\,\mathfrak{Sn}'a\,\mathfrak{Cn}'a\,\mathfrak{Cn}'^2 b}{\mathfrak{Dn}'a(1-k'^2\,\mathfrak{Sn}'^2 a\,\mathfrak{Sn}'^2 b)} + \frac{k^2\operatorname{sn}a\operatorname{cn}a\operatorname{cn}^2 b}{\operatorname{dn}a(1-k^2\operatorname{sn}^2 a\operatorname{sn}^2 b)},$$

und dieser Ausdruck ist nicht minder bemerkenswerth, als die vorigen; da derselbe hier ohne Kenntniſs des Zusammenhanges mit den vorigen Gleichungen gefunden worden ist, so ist eben dieser Zusammenhang noch anzugeben.

Durch eine leichte Reduction findet man:

$$\frac{\mathfrak{Cn}'^2 b}{1-k'^2\,\mathfrak{Sn}'^2 a\,\mathfrak{Sn}'^2 b} = 1+\frac{\mathfrak{Dn}'^2 a\,\mathfrak{Sn}'^2 b}{1-k'^2\,\mathfrak{Sn}'^2 a\,\mathfrak{Sn}'^2 b} \quad\text{und}$$
$$\frac{\operatorname{cn}^2 b}{1-k^2\operatorname{sn}^2 a\operatorname{sn}^2 b} = 1-\frac{\operatorname{dn}^2 a\operatorname{sn}^2 b}{1-k^2\operatorname{sn}^2 a\operatorname{sn}^2 b};$$

werden diese Werthe in der Gleichung (8.) substituirt, so entsteht zunächst:

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\operatorname{am}(2a+2b)+\operatorname{tang}\frac{1}{2}\operatorname{am}(2a-2b)}{2}$$
$$= \frac{k'^2\,\mathfrak{Sn}'a\,\mathfrak{Cn}'a}{\mathfrak{Dn}'a} + \frac{k^2\operatorname{sn}a\operatorname{cn}a}{\operatorname{dn}a} + \frac{k'^2\,\mathfrak{Sn}'a\,\mathfrak{Cn}'a\,\mathfrak{Dn}'a\,\mathfrak{Sn}'^2 b}{1-k'^2\,\mathfrak{Sn}'^2 a\,\mathfrak{Sn}'^2 b} - \frac{k^2\operatorname{sn}a\operatorname{cn}a\operatorname{dn}a\operatorname{sn}^2 b}{1-k^2\operatorname{sn}^2 a\operatorname{sn}^2 b},$$

da aber

$$\frac{k'^2\,\mathfrak{Sn}'a\,\mathfrak{Cn}'a}{\mathfrak{Dn}'a} + \frac{k^2\operatorname{sn}a\operatorname{cn}a}{\operatorname{dn}a} = \frac{k'^2\operatorname{sn}a}{\operatorname{cn}a\operatorname{dn}a} + \frac{k^2\operatorname{sn}a\operatorname{cn}a}{\operatorname{dn}a}$$
$$= \frac{\operatorname{tn}a}{\operatorname{dn}a}(k'^2+k^2\operatorname{cn}^2 a) = \frac{\operatorname{tn}a\operatorname{dn}^2 a}{\operatorname{dn}a} = \operatorname{tn}a\operatorname{dn}a = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\operatorname{am}2a$$

ist, so ist die Gleichung (8.) in die Gleichung (5.) verwandelt worden.

§. 40.

Einige Relationen unter cyklischen Modular-Functionen mit drei und auch vier beliebigen Argumenten.

Relationen unter cyklischen Modular-Functionen, worin drei ganz beliebige Argumente vorkommen, erhält man sehr leicht, und man kann sie in groſser Menge aus den vorhin entwickelten Relationen unter den Functionen $a, b, a+b$ schon dadurch herleiten, daſs man $a=\alpha-\beta$, $b=\beta-\gamma$, also $a+b=\alpha-\gamma$ setzt. Macht man z. B. in der Gleichung

$$\operatorname{dn}a\operatorname{dn}b\operatorname{dn}(a+b) = k'^2+k^2\operatorname{cn}a\operatorname{cn}b\operatorname{cn}(a+b)$$

des §. 11. diese Substitution, so erhält man auf der Stelle die Gleichung:

1. $\mathrm{dn}(\alpha-\beta)\,\mathrm{dn}(\beta-\gamma)\,\mathrm{dn}(\gamma-\alpha)=k'^2+k^2\,\mathrm{cn}(\alpha-\beta)\,\mathrm{cn}(\beta-\gamma)\,\mathrm{cn}(\gamma-\alpha)$,
unter cyklischen Modular-Functionen, worin drei ganz beliebige Argumente α, β, γ vorkommen. Die drei Differenzen $\alpha-\beta$, $\beta-\gamma$ und $\gamma-\alpha$, worauf sich die in der Formel vorkommenden Functionen beziehen, machen die Summe Null aus; man kann aber leicht eine noch allgemeinere Relation herleiten, worin vier Argumente vorkommen, wovon eines allein so grofs ist, als die Summe der drei übrigen. Es sei $\alpha+\beta+\gamma=\delta$; setzen wir nun $\alpha+\beta=g$, dann ist $g+\gamma=\delta$, oder $g=\delta-\gamma$. Nach §. 11. ist nun, insofern $g=\alpha+\beta$ ist:

$$\mathrm{cn}\,g = \mathrm{cn}\,\alpha\,\mathrm{cn}\,\beta-\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,\beta\,\mathrm{dn}\,g, \quad \mathrm{dn}\,g = \mathrm{dn}\,\alpha\,\mathrm{dn}\,\beta-k^2\,\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,\beta\,\mathrm{cn}\,g,$$

und weil auch $g=\delta-\gamma$ ist, so ist

$$\mathrm{cn}\,g = \mathrm{cn}\,\delta\,\mathrm{cn}\,\gamma+\mathrm{sn}\,\delta\,\mathrm{sn}\,\gamma\,\mathrm{dn}\,g, \quad \mathrm{dn}\,g = \mathrm{dn}\,\delta\,\mathrm{dn}\,\gamma+k^2\,\mathrm{sn}\,\delta\,\mathrm{sn}\,\gamma\,\mathrm{cn}\,g.$$

Durch die Multiplication der Formeln $\mathrm{cn}\,\alpha\,\mathrm{cn}\,\beta=\mathrm{cn}\,g+\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,\beta\,\mathrm{dn}\,g$ und $\mathrm{cn}\,\gamma\,\mathrm{cn}\,\delta=\mathrm{cn}\,g-\mathrm{sn}\,\gamma\,\mathrm{sn}\,\delta\,\mathrm{dn}\,g$ erhält man zunächst die Gleichung:

$$\mathrm{cn}\,\alpha\,\mathrm{cn}\,\beta\,\mathrm{cn}\,\gamma\,\mathrm{cn}\,\delta$$
$$= \mathrm{cn}^2 g+(\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,\beta-\mathrm{sn}\,\gamma\,\mathrm{sn}\,\delta)\,\mathrm{cn}\,g\,\mathrm{dn}\,g-\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,\beta\,\mathrm{sn}\,\gamma\,\mathrm{sn}\,\delta\,\mathrm{dn}^2 g;$$

multiplicirt man aber die Formeln $\mathrm{dn}\,\alpha\,\mathrm{dn}\,\beta=\mathrm{dn}\,g+k^2\,\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,\beta\,\mathrm{cn}\,g$ und $\mathrm{dn}\,\gamma\,\mathrm{dn}\,\delta=\mathrm{dn}\,g-k^2\,\mathrm{sn}\,\gamma\,\mathrm{sn}\,\delta\,\mathrm{cn}\,g$, so erhält man die zweite Gleichung

$$\mathrm{dn}\,\alpha\,\mathrm{dn}\,\beta\,\mathrm{dn}\,\gamma\,\mathrm{dn}\,\delta$$
$$= \mathrm{dn}^2 g+k^2(\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,\beta-\mathrm{sn}\,\gamma\,\mathrm{sn}\,\delta)\,\mathrm{cn}\,g\,\mathrm{dn}\,g-k^4\,\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,\beta\,\mathrm{sn}\,\gamma\,\mathrm{sn}\,\delta\,\mathrm{cn}^2 g,$$

und wenn man von ihr die mit k^2 multiplicirte erste Gleichung subtrahirt, beachtend, dafs $\mathrm{dn}^2 g-k^2\,\mathrm{cn}^2 g=k'^2$ ist, so wird das Argument g dadurch völlig eliminirt, und man erhält

$$\mathrm{dn}\,\alpha\,\mathrm{dn}\,\beta\,\mathrm{dn}\,\gamma\,\mathrm{dn}\,\delta-k^2\,\mathrm{cn}\,\alpha\,\mathrm{cn}\,\beta\,\mathrm{cn}\,\gamma\,\mathrm{cn}\,\delta = k'^2+k'^2k^2\,\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,\beta\,\mathrm{sn}\,\gamma\,\mathrm{sn}\,\delta,$$

oder

$$2. \quad \frac{\mathrm{dn}\,\alpha\,\mathrm{dn}\,\beta\,\mathrm{dn}\,\gamma\,\mathrm{dn}\,\delta-k^2\,\mathrm{cn}\,\alpha\,\mathrm{cn}\,\beta\,\mathrm{cn}\,\gamma\,\mathrm{cn}\,\delta}{k'^2} = 1+k^2\,\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,\beta\,\mathrm{sn}\,\gamma\,\mathrm{sn}\,\delta.$$

Setzt man in dieser Formel $\alpha-\beta$ für α, $\beta-\gamma$ für β und $\gamma-\alpha$ für γ, so ist $\delta=0$, also $\mathrm{cn}\,\delta=\mathrm{dn}\,\delta=1$ und $\mathrm{sn}\,\delta=0$; die rechte Seite reducirt sich also auf ihr erstes Glied Eins, und man kommt unter dieser Voraussetzung also auf die Gleichung (1.) wieder zurück. Die gröfsere Allgemeinheit dieser Formel (2.) besteht also darin, dafs die Summe $\delta=\alpha+\beta+\gamma$ eine beliebige sein kann, indessen kommen in der Gleichung (2.) im Grunde nur drei verschiedene Argumente α, β, γ vor, da $\delta=\alpha+\beta+\gamma$ sein soll.

§. 41.

Ausdrücke von der Form $1-k^2 \operatorname{sn} A \operatorname{sn} B \operatorname{sn} C \operatorname{sn} D$, in welcher A, B, C, D vier beliebige Gröfsen sind, haben eine noch allgemeinere Form, als der in der Formel (2.) des §. 40. vorkommende ähnliche Ausdruck. Wir können, ohne die Allgemeinheit dieser Form zu vermindern, setzen:

$$A = \alpha+\beta, \quad B = \alpha-\beta, \quad C = \alpha'+\beta' \quad \text{und} \quad D = \alpha'-\beta',$$

wenn wir uns unter $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$, vier ganz willkührliche Gröfsen vorstellen. Nach §. 35. ist

$$\operatorname{sn}(\alpha+\beta).\operatorname{sn}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{sn}^2\alpha-\operatorname{sn}^2\beta}{1-k^2\operatorname{sn}^2\alpha\operatorname{sn}^2\beta},$$

$$\operatorname{sn}(\alpha'+\beta').\operatorname{sn}(\alpha'-\beta') = \frac{\operatorname{sn}^2\alpha'-\operatorname{sn}^2\beta'}{1-k^2\operatorname{sn}^2\alpha'\operatorname{sn}^2\beta'};$$

substituiren wir diese Ausdrücke, so finden wir für

$$1-k^2\operatorname{sn}(\alpha+\beta)\operatorname{sn}(\alpha-\beta)\operatorname{sn}(\alpha'+\beta')\operatorname{sn}(\alpha'-\beta')$$

einen Bruch, dessen Nenner das Product $(1-k^2\operatorname{sn}^2\alpha\operatorname{sn}^2\beta)(1-k^2\operatorname{sn}^2\alpha'\operatorname{sn}^2\beta')$, und dessen Zähler ist:

$$1-k^2\operatorname{sn}^2\alpha\operatorname{sn}^2\beta-k^2\operatorname{sn}^2\alpha'\operatorname{sn}^2\beta'+k^4\operatorname{sn}^2\alpha\operatorname{sn}^2\beta\operatorname{sn}^2\alpha'\operatorname{sn}^2\beta'-k^2\operatorname{sn}^2\alpha\operatorname{sn}^2\alpha'$$
$$-k^2\operatorname{sn}^2\beta\operatorname{sn}^2\beta'+k^2\operatorname{sn}^2\alpha\operatorname{sn}^2\beta'+k^2\operatorname{sn}^2\alpha'\operatorname{sn}^2\beta;$$

ein Theil dieses Zählers, nämlich

$$1-k^2\operatorname{sn}^2\alpha\operatorname{sn}^2\alpha'-k^2\operatorname{sn}^2\beta\operatorname{sn}^2\beta'+k^4\operatorname{sn}^2\alpha\operatorname{sn}^2\alpha'\operatorname{sn}^2\beta\operatorname{sn}^2\beta'$$

ist gleich dem Producte $(1-k^2\operatorname{sn}^2\alpha\operatorname{sn}^2\alpha')(1-k^2\operatorname{sn}^2\beta\operatorname{sn}^2\beta')$, und die vier übrigen Theile desselben $-k^2(\operatorname{sn}^2\alpha\operatorname{sn}^2\beta+\operatorname{sn}^2\alpha'\operatorname{sn}^2\beta'-\operatorname{sn}^2\alpha\operatorname{sn}^2\beta'-\operatorname{sn}^2\beta\operatorname{sn}^2\alpha')$ sind gleich dem Producte $-k^2(\operatorname{sn}^2\alpha-\operatorname{sn}^2\alpha')(\operatorname{sn}^2\beta-\operatorname{sn}^2\beta')$; daher entsteht die Formel:

$$1-k^2\operatorname{sn}(\alpha+\beta)\operatorname{sn}(\alpha-\beta)\operatorname{sn}(\alpha'+\beta')\operatorname{sn}(\alpha'-\beta') =$$
$$\frac{(1-k^2\operatorname{sn}^2\alpha\operatorname{sn}^2\alpha')(1-k^2\operatorname{sn}^2\beta\operatorname{sn}^2\beta')}{(1-k^2\operatorname{sn}^2\alpha\operatorname{sn}^2\beta)(1-k^2\operatorname{sn}^2\alpha'\operatorname{sn}^2\beta')}.\left(1-k^2\frac{\operatorname{sn}^2\alpha-\operatorname{sn}^2\alpha'}{1-k^2\operatorname{sn}^2\alpha\operatorname{sn}^2\alpha'}.\frac{\operatorname{sn}^2\beta-\operatorname{sn}^2\beta'}{1-k^2\operatorname{sn}^2\beta\operatorname{sn}^2\beta'}\right),$$

welche, weil $\operatorname{sn}(\alpha+\alpha')\operatorname{sn}(\alpha-\alpha') = \frac{\operatorname{sn}^2\alpha-\operatorname{sn}^2\alpha'}{1-k^2\operatorname{sn}^2\alpha\operatorname{sn}^2\alpha'}$ und $\operatorname{sn}(\beta+\beta')\operatorname{sn}(\beta-\beta')$ $= \frac{\operatorname{sn}^2\beta-\operatorname{sn}^2\beta'}{1-k^2\operatorname{sn}^2\beta\operatorname{sn}^2\beta'}$ ist, sich zusammenzieht auf:

$$1. \quad \frac{1-k^2\operatorname{sn}(\alpha+\beta)\operatorname{sn}(\alpha-\beta)\operatorname{sn}(\alpha'+\beta')\operatorname{sn}(\alpha'-\beta')}{1-k^2\operatorname{sn}(\alpha+\alpha')\operatorname{sn}(\alpha-\alpha')\operatorname{sn}(\beta+\beta')\operatorname{sn}(\beta-\beta')}$$
$$= \frac{(1-k^2\operatorname{sn}^2\alpha\operatorname{sn}^2\alpha')(1-k^2\operatorname{sn}^2\beta\operatorname{sn}^2\beta')}{(1-k^2\operatorname{sn}^2\alpha\operatorname{sn}^2\beta)(1-k^2\operatorname{sn}^2\alpha'\operatorname{sn}^2\beta')},$$

und eine Relation unter cyklischen Modular-Sinus ausdrückt, welche sich auf vier ganz beliebige Argumente $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ beziehen.

Setzen wir in dieser Formel $\alpha + iK'$ für α, so verwandelt sich $\operatorname{sn}(\alpha+\beta)$ in $\frac{1}{k\operatorname{sn}(\alpha+\beta)}$ u. s. w.; daher verwandelt sich die vorige Formel zunächst in:

$$\frac{\operatorname{sn}(\alpha+\alpha')\operatorname{sn}(\alpha-\alpha')}{\operatorname{sn}(\alpha+\beta)\operatorname{sn}(\alpha-\beta)}\cdot\frac{\operatorname{sn}(\alpha+\beta)\operatorname{sn}(\alpha-\beta)-\operatorname{sn}(\alpha'+\beta')\operatorname{sn}(\alpha'-\beta')}{\operatorname{sn}(\alpha+\alpha')\operatorname{sn}(\alpha-\alpha')-\operatorname{sn}(\beta+\beta')\operatorname{sn}(\beta-\beta')}$$
$$=\frac{\operatorname{sn}^2\alpha-\operatorname{sn}^2\alpha'}{\operatorname{sn}^2\alpha-\operatorname{sn}^2\beta}\cdot\frac{1-k^2\operatorname{sn}^2\beta\operatorname{sn}^2\beta'}{1-k^2\operatorname{sn}^2\alpha'\operatorname{sn}^2\beta'}.$$

Da aber

$$\frac{\operatorname{sn}(\alpha+\alpha')\operatorname{sn}(\alpha-\alpha')}{\operatorname{sn}^2\alpha-\operatorname{sn}^2\alpha'} = (1-k^2\operatorname{sn}^2\alpha\operatorname{sn}^2\alpha')^{-1} \text{ und}$$
$$\frac{\operatorname{sn}(\alpha+\beta)\operatorname{sn}(\alpha-\beta)}{\operatorname{sn}^2\alpha-\operatorname{sn}^2\beta} = (1-k^2\operatorname{sn}^2\alpha\operatorname{sn}^2\beta)^{-1}$$

ist, so reducirt sich die Gleichung auf

$$2.\quad \frac{\operatorname{sn}(\alpha+\beta)\operatorname{sn}(\alpha-\beta)-\operatorname{sn}(\alpha'+\beta')\operatorname{sn}(\alpha'-\beta')}{\operatorname{sn}(\alpha+\alpha')\operatorname{sn}(\alpha-\alpha')-\operatorname{sn}(\beta+\beta')\operatorname{sn}(\beta-\beta')}$$
$$=\frac{(1-k^2\operatorname{sn}^2\alpha\operatorname{sn}^2\alpha')(1-k^2\operatorname{sn}^2\beta\operatorname{sn}^2\beta')}{(1-k^2\operatorname{sn}^2\alpha\operatorname{sn}^2\beta)(1-k^2\operatorname{sn}^2\alpha'\operatorname{sn}^2\beta')},$$

welche die merkwürdige Beschaffenheit hat, daſs die Ausdrücke auf der rechten Seite in ihr und in der vorigen Gleichung (1.) ganz dieselben sind, während die Ausdrücke auf der linken Seite sehr verschiedene Gestalt haben.

§. 42.

Setzt man in der Formel (1.) $\alpha'=\alpha$ und $\beta'=\beta$, so verwandelt sie sich in die specielle Formel

$$1-k^2\operatorname{sn}^2(\alpha+\beta)\operatorname{sn}^2(\alpha-\beta) = \frac{(1-k^2\operatorname{sn}^4\alpha)(1-k^2\operatorname{sn}^4\beta)}{(1-k^2\operatorname{sn}^2\alpha\operatorname{sn}^2\beta)^2},$$

worin nur noch zwei beliebige Argumente α und β vorkommen; dieser Formel gemäſs ist aber auch

$$1-k^2\operatorname{sn}^2(\alpha'+\beta')\operatorname{sn}^2(\alpha'-\beta') = \frac{(1-k^2\operatorname{sn}^4\alpha')(1-k^2\operatorname{sn}^4\beta')}{(1-k^2\operatorname{sn}^2\alpha'\operatorname{sn}^2\beta')^2},$$
$$1-k^2\operatorname{sn}^2(\alpha+\alpha')\operatorname{sn}^2(\alpha-\alpha') = \frac{(1-k^2\operatorname{sn}^4\alpha)(1-k^2\operatorname{sn}^4\alpha')}{(1-k^2\operatorname{sn}^2\alpha\operatorname{sn}^2\alpha')^2},$$
$$1-k^2\operatorname{sn}^2(\beta+\beta')\operatorname{sn}^2(\beta-\beta') = \frac{(1-k^2\operatorname{sn}^4\beta)(1-k^2\operatorname{sn}^4\beta')}{(1-k^2\operatorname{sn}^2\beta\operatorname{sn}^2\beta')^2},$$

und dividirt man das Product der beiden ersten Gleichungen durch das Product der dritten und vierten, so erhält man durch Ausziehung der Quadrat-Wurzel die Formel

$$3.\quad \sqrt{\frac{[1-k^2\,\mathrm{sn}^2(\alpha+\beta)\,\mathrm{sn}^2(\alpha-\beta)]\,[1-k^2\,\mathrm{sn}^2(\alpha'+\beta')\,\mathrm{sn}^2(\alpha'-\beta')]}{[1-k^2\,\mathrm{sn}^2(\alpha+\alpha')\,\mathrm{sn}^2(\alpha-\alpha')]\,[1-k^2\,\mathrm{sn}^2(\beta+\beta')\,\mathrm{sn}^2(\beta-\beta')]}}$$
$$=\frac{(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\alpha\,\mathrm{sn}^2\alpha')(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\beta\,\mathrm{sn}^2\beta')}{(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\alpha\,\mathrm{sn}^2\beta)(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\alpha'\,\mathrm{sn}^2\beta')},$$

worin der Ausdruck auf der rechten Seite wieder mit denen in den Gleichungen (1.) und (2.) übereinstimmt. *Es haben demnach die vier der Form nach sehr verschiedenen Ausdrücke:*

$$\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}(\alpha+\beta)\,\mathrm{sn}(\alpha-\beta)\,\mathrm{sn}(\alpha'+\beta')\,\mathrm{sn}(\alpha'-\beta')}{1-k^2\,\mathrm{sn}(\alpha+\alpha')\,\mathrm{sn}(\alpha-\alpha')\,\mathrm{sn}(\beta+\beta')\,\mathrm{sn}(\beta-\beta')},$$
$$\frac{\mathrm{sn}(\alpha+\beta)\,\mathrm{sn}(\alpha-\beta)-\mathrm{sn}(\alpha'+\beta')\,\mathrm{sn}(\alpha'-\beta')}{\mathrm{sn}(\alpha+\alpha')\,\mathrm{sn}(\alpha-\alpha')-\mathrm{sn}(\beta+\beta')\,\mathrm{sn}(\beta-\beta')},$$
$$\frac{(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\alpha\,\mathrm{sn}^2\alpha')(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\beta\,\mathrm{sn}^2\beta')}{(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\alpha\,\mathrm{sn}^2\beta)(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\alpha'\,\mathrm{sn}^2\beta')},$$
$$\sqrt{\frac{[1-k^2\,\mathrm{sn}^2(\alpha+\beta)\,\mathrm{sn}^2(\alpha-\beta)]\,[1-k^2\,\mathrm{sn}^2(\alpha'+\beta')\,\mathrm{sn}^2(\alpha'-\beta')]}{[1-k^2\,\mathrm{sn}^2(\alpha+\alpha')\,\mathrm{sn}^2(\alpha-\alpha')]\,[1-k^2\,\mathrm{sn}^2(\beta+\beta')\,\mathrm{sn}^2(\beta-\beta')]}},$$

in welchen α, β, α', β' *vier ganz beliebige Elemente sind, immer einen und denselben Werth.*

§. 43.

Setzen wir in der Gleichung

$$\frac{\mathrm{sn}(\alpha+\beta)\,\mathrm{sn}(\alpha-\beta)-\mathrm{sn}(\alpha'+\beta')\,\mathrm{sn}(\alpha'-\beta')}{\mathrm{sn}(\alpha+\alpha')\,\mathrm{sn}(\alpha-\alpha')-\mathrm{sn}(\beta+\beta')\,\mathrm{sn}(\beta-\beta')}$$
$$=\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}(\alpha+\beta)\,\mathrm{sn}(\alpha-\beta)\,\mathrm{sn}(\alpha'+\beta')\,\mathrm{sn}(\alpha'-\beta')}{1-k^2\,\mathrm{sn}(\alpha+\alpha')\,\mathrm{sn}(\alpha-\alpha')\,\mathrm{sn}(\beta+\beta')\,\mathrm{sn}(\beta-\beta')}$$

nun

$$\alpha=\frac{A+C-B}{2},\quad \beta=\frac{A+B-C}{2},\quad \alpha'=\frac{B+C-A}{2},\quad \beta'=\beta=\frac{B+A-C}{2},$$

so ist $\alpha+\beta=A$, $\alpha-\beta=C-B$, $\alpha'+\beta'=B$, $\alpha'-\beta'=C-A$, $\alpha+\alpha'=C$, $\alpha-\alpha'=A-B$ und $\beta-\beta'=0$; und werden diese Werthe substituirt, so erhält man auf der Stelle die Gleichung

$$\frac{\mathrm{sn}A\,\mathrm{sn}(C-B)-\mathrm{sn}B\,\mathrm{sn}(C-A)}{\mathrm{sn}C\,\mathrm{sn}(A-B)}=1-k^2\,\mathrm{sn}A\,\mathrm{sn}(C-B)\,\mathrm{sn}B\,\mathrm{sn}(C-A),$$

oder in ein wenig veränderter Gestalt

$$1.\quad \mathrm{sn}A\,\mathrm{sn}(C-B)+\mathrm{sn}B\,\mathrm{sn}(A-C)+\mathrm{sn}C\,\mathrm{sn}(B-A)$$
$$=-k^2\,\mathrm{sn}A\,\mathrm{sn}B\,\mathrm{sn}C\,\mathrm{sn}(C-B)\,\mathrm{sn}(A-C)\,\mathrm{sn}(B-A).$$

Setzt man in dieser Gleichung, welche nur noch drei willkührliche Argumente A, B, C enthält, $A+iK'$ für A, $B+iK'$ für B und $C+iK'$ für C, so verwandelt sie sich sofort in

$$2.\quad \frac{\mathrm{sn}(C-B)}{\mathrm{sn}A}+\frac{\mathrm{sn}(A-C)}{\mathrm{sn}B}+\frac{\mathrm{sn}(B-A)}{\mathrm{sn}C}+\frac{\mathrm{sn}(C-B)}{\mathrm{sn}A}\cdot\frac{\mathrm{sn}(A-C)}{\mathrm{sn}B}\cdot\frac{\mathrm{sn}(B-A)}{\mathrm{sn}C}=0.$$

Setzt man in diesen Gleichungen zuerst $K-A$ für A, $K-B$ für B und $K-C$ für C, und wendet man dann die Sätze des §. 31. auf sie an, so erhält man auf der Stelle

$$3.\quad \operatorname{cn} A \operatorname{cnc}(C-B)+\operatorname{cn} B \operatorname{cnc}(A-C)+\operatorname{cn} C \operatorname{cnc}(B-A)$$
$$=\frac{k^2}{k'^2}\operatorname{cn} A \operatorname{cn} B \operatorname{cn} C \operatorname{cnc}(C-B)\operatorname{cnc}(A-C)\operatorname{cnc}(B-A)$$

und

$$4.\quad \frac{\operatorname{cnc}(C-B)}{\operatorname{cn} A}+\frac{\operatorname{cnc}(A-C)}{\operatorname{cn} B}+\frac{\operatorname{cnc}(B-A)}{\operatorname{cn} C}+\frac{\operatorname{cnc}(C-B)}{\operatorname{cn} A}\cdot\frac{\operatorname{cnc}(A-C)}{\operatorname{cn} B}\cdot\frac{\operatorname{cnc}(B-A)}{\operatorname{cn} C}=0.$$

Vertauscht man in den Formeln (1.) und (2.) die beiden conjugirten Modul, und setzt man dann Ai für A, Bi für B und Ci für C, so erhält man

$$5.\quad \operatorname{tn} A \operatorname{tn}(C-B)+\operatorname{tn} B \operatorname{tn}(A-C)+\operatorname{tn} C \operatorname{tn}(B-A)$$
$$=-k'^2 \operatorname{tn} A \operatorname{tn} B \operatorname{tn} C \operatorname{tn}(C-B)\operatorname{tn}(A-C)\operatorname{tn}(B-A)$$

und

$$6.\quad \frac{\operatorname{tn}(C-B)}{\operatorname{tn} A}+\frac{\operatorname{tn}(A-C)}{\operatorname{tn} B}+\frac{\operatorname{tn}(B-A)}{\operatorname{tn} C}+\frac{\operatorname{tn}(C-B)}{\operatorname{tn} A}\cdot\frac{\operatorname{tn}(A-C)}{\operatorname{tn} B}\cdot\frac{\operatorname{tn}(B-A)}{\operatorname{tn} C}=0.$$

Die Anwendung des §. 30. auf die Formeln (3.) und (4.) giebt

$$7.\quad \operatorname{dn} A \operatorname{tn}(C-B)+\operatorname{dn} B \operatorname{tn}(A-C)+\operatorname{dn} C \operatorname{tn}(B-A)$$
$$=\operatorname{dn} A \operatorname{dn} B \operatorname{dn} C \operatorname{tn}(C-B)\operatorname{tn}(A-C)\operatorname{tn}(B-A)$$

und

$$8.\quad \frac{\operatorname{tn}(C-B)}{\operatorname{dn} A}+\frac{\operatorname{tn}(A-C)}{\operatorname{dn} B}+\frac{\operatorname{tn}(B-A)}{\operatorname{dn} C}=k'^2\frac{\operatorname{tn}(C-B)}{\operatorname{dn} A}\cdot\frac{\operatorname{tn}(A-C)}{\operatorname{dn} B}\cdot\frac{\operatorname{tn}(B-A)}{\operatorname{dn} C}.$$

Zusatz. Setzt man $k=0$ in den vorstehenden Formeln, so erhält man für die trigonometrischen Functionen die Formeln:

$$1.\quad \sin A\sin(C-B)+\sin B\sin(A-C)+\sin C\sin(B-A)=0\quad\text{[aus (1.)]},$$

$$2.\quad \cos A\sin(C-B)+\cos B\sin(A-C)+\cos C\sin(B-A)=0\quad\text{[aus (3.)]},$$

$$3.\quad \frac{\sin(C-B)}{\sin A}+\frac{\sin(A-C)}{\sin B}+\frac{\sin(B-A)}{\sin C}+\frac{\sin(C-B).\sin(A-C).\sin(B-A)}{\sin A.\sin B.\sin C}=0$$
(aus 2.),

$$4.\quad \frac{\sin(C-B)}{\cos A}+\frac{\sin(A-C)}{\cos B}+\frac{\sin(B-A)}{\cos C}+\frac{\sin(C-B).\sin(A-C).\sin(B-A)}{\cos A.\cos B.\cos C}=0$$
(aus 4.),

$$5.\quad \operatorname{tang} A\operatorname{tang}(C-B)+\operatorname{tang} B\operatorname{tang}(A-C)+\operatorname{tang} C\operatorname{tang}(B-A)$$
$$+\operatorname{tang} A\operatorname{tang} B\operatorname{tang} C\operatorname{tang}(C-B)\operatorname{tang}(A-C)\operatorname{tang}(B-A)=0\quad\text{(aus 5.)},$$

$$6.\quad \frac{\operatorname{tang}(C-B)}{\operatorname{tang} A}+\frac{\operatorname{tang}(A-C)}{\operatorname{tang} B}+\frac{\operatorname{tang}(B-A)}{\operatorname{tang} C}+\frac{\operatorname{tang}(C-B).\operatorname{tang}(A-C)\operatorname{tang}(B-A)}{\operatorname{tang} A\operatorname{tang} B\operatorname{tang} C}=0,$$

$$7.\quad \operatorname{tang}(C-B)+\operatorname{tang}(A-C)+\operatorname{tang}(B-A)$$
$$=\operatorname{tang}(C-B)\operatorname{tang}(A-C)\operatorname{tang}(B-A).$$

Von diesen trigonometrischen Formeln können (1.), (2.) und (7.) am einfachsten hergeleitet werden; von den Formeln (1.) und (2.) hat meines Wissens zuerst *Gauſs,* in der *Theoria motus corporum coelestium* etc. eine nützliche Anwendung gemacht; die Formeln (3.), (4.), (5.) und (6.) scheinen noch nirgendwo früher aufgestellt worden zu sein.

§. 44.

Wir benutzen die im §. 42. ausgesprochenen Sätze auch zur Umformung des Ausdrucks

$$U = \sqrt{\frac{1+k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{sn}(u+v+a)}{1-k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{sn}(u+v-a)}},$$

welcher weiter unten vorkommt, und bei welchem vieles auf die Kenntniſs der Formen ankommt, in welchen er dargestellt werden kann. Setzen wir in den Gleichungen des §. 42.

$$\alpha+\beta = u, \quad \alpha-\beta = v, \quad \alpha'+\beta' = u+v-a \text{ und } \alpha'-\beta' = a,$$

dann ist rückwärts

$$\alpha = \alpha' = \frac{u+v}{2}, \quad \beta = \frac{u-v}{2}, \quad \beta' = \frac{u+v}{2}-a,$$

und hieraus folgt noch

$$\alpha+\alpha' = u+v, \;\; \alpha-\alpha' = 0, \;\; \beta+\beta' = u-a \text{ und } \beta-\beta' = a-v = -(v-a).$$

Werden die hier angegebenen zusammengehörenden Werthe in den Gleichungen des §. 42. substituirt, so erhält man die folgenden Gleichungen:

$$1-k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{sn} a \operatorname{sn}(u+v-a) = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{sn} v - \operatorname{sn} a \operatorname{sn}(u+v-a)}{\operatorname{sn}(u-a)\operatorname{sn}(v-a)}$$

$$= \frac{\left(1-k^2 \operatorname{sn}^4 \frac{u+v}{2}\right)\left(1-k^2 \operatorname{sn}^2 \frac{u-v}{2} \operatorname{sn}^2\left(\frac{u+v}{2}-a\right)\right)}{\left(1-k^2 \operatorname{sn}^2 \frac{u+v}{2} \operatorname{sn}^2 \frac{u-v}{2}\right).\left(1-k^2 \operatorname{sn}^2 \frac{u+v}{2} \operatorname{sn}^2\left(\frac{u+v}{2}-a\right)\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{(1-k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v)(1-k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2(u+v-a))}{1-k^2 \operatorname{sn}^2(u-a)\operatorname{sn}^2(v-a)}};$$

setzen wir in diesen Formeln noch $-a$ für a, so verwandeln sie sich in:

$$1+k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{sn} a \operatorname{sn}(u+v+a) = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{sn} v + \operatorname{sn} a \operatorname{sn}(u+v+a)}{\operatorname{sn}(u+a)\operatorname{sn}(v+a)}$$

$$= \frac{\left(1-k^2 \operatorname{sn}^4 \frac{u+v}{2}\right)\left(1-k^2 \operatorname{sn}^2 \frac{u-v}{2} \operatorname{sn}^2\left(\frac{u+v}{2}+a\right)\right)}{\left(1-k^2 \operatorname{sn}^2 \frac{u+v}{2} \operatorname{sn}^2 \frac{u-v}{2}\right).\left(1-k^2 \operatorname{sn}^2 \frac{u+v}{2} \operatorname{sn}^2\left(\frac{u+v}{2}+a\right)\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{(1-k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v)(1-k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2(u+v+a))}{1-k^2 \operatorname{sn}^2(u+a)\operatorname{sn}^2(v+a)}};$$

dividirt man nun diese Gleichungen durch die vorigen, so erhält man die vier folgenden verschiedenen Ausdrücke von U:

1. $U = \sqrt{\frac{1+k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{sn} a \operatorname{sn}(u+v+a)}{1-k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{sn} a \operatorname{sn}(u+v-a)}}$,

2. $U = \sqrt{\frac{\operatorname{sn} u \operatorname{sn} v + \operatorname{sn} a \operatorname{sn}(u+v+a)}{\operatorname{sn} u \operatorname{sn} v - \operatorname{sn} a \operatorname{sn}(u+v-a)}} \sqrt{\frac{\operatorname{sn}(u-a)\operatorname{sn}(v-a)}{\operatorname{sn}(u+a)\operatorname{sn}(v+a)}}$,

3. $U = \sqrt{\frac{1-k^2 \operatorname{sn}^2 \frac{u-v}{2} \cdot \operatorname{sn}^2\left(\frac{u+v}{2}+a\right)}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 \frac{u-v}{2} \cdot \operatorname{sn}^2\left(\frac{u+v}{2}-a\right)}} \sqrt{\frac{1-k^2 \operatorname{sn}^2 \frac{u+v}{2} \operatorname{sn}^2\left(\frac{u+v}{2}-a\right)}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 \frac{u+v}{2} \operatorname{sn}^2\left(\frac{u+v}{2}+a\right)}}$,

4. $U = \sqrt[4]{\frac{1-k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2(u+v+a)}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2(u+v-a)}} \cdot \sqrt[4]{\frac{1-k^2 \operatorname{sn}^2(u-a)\operatorname{sn}^2(v-a)}{1-k^2 \operatorname{sn}^2(u+a)\operatorname{sn}^2(v+a)}}$,

wovon übrigens der erste die einfachste Gestalt hat.

Die Gleichung

$$1+k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{sn} a \operatorname{sn}(u+v+a) = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{sn} v + \operatorname{sn} a \operatorname{sn}(u+v+a)}{\operatorname{sn}(u+a)\operatorname{sn}(v+a)},$$

welche sich nach Wegschaffung des Divisors verwandelt in:

$$\operatorname{sn} u \operatorname{sn} v = \operatorname{sn}(u+a)\operatorname{sn}(v+a) - \operatorname{sn} a \operatorname{sn}(u+v+a)$$
$$+ k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{sn} a \operatorname{sn}(u+a)\operatorname{sn}(v+a)\operatorname{sn}(u+v+a),$$

stellen wir noch auf eine bemerkenswerthe andere Weise dar. Multipliciren wir sie mit $k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v$ und subtrahiren wir beide Seiten von Eins, so erhalten wir:

$$1-k^2\operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v = 1-k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{sn}(u+a)\operatorname{sn}(v+a) + k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{sn} a \operatorname{sn}(u+v+a)$$
$$-k^4 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v \operatorname{sn} a \operatorname{sn}(u+a)\operatorname{sn}(v+a)\operatorname{sn}(u+v+a), \quad \text{oder}$$

$$1-k^2\operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v =$$
$$(1-k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{sn}(u+a)\operatorname{sn}(v+a))(1+k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{sn} a \operatorname{sn}(u+v+a)).$$

Setzen wir $-a$ für a, so ist also auch

$$1-k^2\operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v =$$
$$(1-k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{sn}(u-a)\operatorname{sn}(v-a))(1-k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{sn} a \operatorname{sn}(u+v-a)).$$

Werden diese beiden Producte identificirt, so erhält man

$$\frac{1+k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{sn} a \operatorname{sn}(u+v+a)}{1-k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{sn} a \operatorname{sn}(u+v-a)} = \frac{1-k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{sn}(u-a)\operatorname{sn}(v-a)}{1-k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{sn}(u+a)\operatorname{sn}(v+a)}.$$

Zu den vier vorhergehenden Ausdrücken der Gröfse U kommt also noch der fünfte

$$5. \quad U = \sqrt{\frac{1-k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{sn}(u-a)\operatorname{sn}(v-a)}{1-k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{sn}(u+a)\operatorname{sn}(v+a)}}.$$

Macht man in den Formeln des §. 42. die folgenden Substitutionen:

$\alpha = \frac{u+v}{2}$, $\alpha' = \frac{u+v}{2} - a$, $\beta = \beta' = \frac{u-v}{2}$, also $\alpha+\beta = u$, $\alpha-\beta = v$,

$\alpha'+\beta' = u-a, \quad \alpha'-\beta' = v-a, \quad \alpha+\alpha' = u+v-a, \quad \alpha-\alpha' = a,$
$\beta+\beta' = u-v, \quad \beta-\beta' = 0,$ so erhält man die Gleichungen:

$$1-k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{sn}(u-a) \operatorname{sn}(v-a) = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{sn} v - \operatorname{sn}(u-a) \operatorname{sn}(v-a)}{\operatorname{sn} a \operatorname{sn}(u+v-a)}$$

$$= \frac{\left(1-k^2 \operatorname{sn}^4 \frac{u-v}{2}\right)\left(1-k^2 \operatorname{sn}^2 \frac{u+v}{2} \operatorname{sn}^2 \left(\frac{u+v}{2}-a\right)\right)}{\left(1-k^2 \operatorname{sn}^2 \frac{u+v}{2} \operatorname{sn}^3 \frac{u-v}{2}\right)\left(1-k^2 \operatorname{sn}^2 \frac{u-v}{2} \operatorname{sn}^2 \left(\frac{u+v}{2}-a\right)\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{(1-k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v)(1-k^2 \operatorname{sn}^2 (u-a) \operatorname{sn}^2 (v-a))}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 (u+v-a)}}.$$

Setzt man hierin $-a$ für a, und dividirt man die einen Gleichungen durch die andern, so erhält man noch die folgenden Ausdrücke der Gröfse U:

$$6. \quad U = \sqrt{\frac{\operatorname{sn}(u+v+a)}{\operatorname{sn}(u+v-a)}} \cdot \sqrt{\frac{\operatorname{sn} u \operatorname{sn} v - \operatorname{sn}(u-a) \operatorname{sn}(v-a)}{\operatorname{sn}(u+a) \operatorname{sn}(v+a) - \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v}},$$

$$7. \quad U = \sqrt{\frac{1-k^2 \operatorname{sn}^2 \frac{u+v}{2} \operatorname{sn}^2 \left(\frac{u+v}{2}-a\right)}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 \frac{u+v}{2} \operatorname{sn}^2 \left(\frac{u+v}{2}+a\right)}} \cdot \sqrt{\frac{1-k^2 \operatorname{sn}^2 \frac{u-v}{2} \operatorname{sn}^2 \left(\frac{u+v}{2}+a\right)}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 \frac{u-v}{2} \operatorname{sn}^2 \left(\frac{u+v}{2}-a\right)}},$$

$$8. \quad U = \sqrt[4]{\frac{1-k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 (u+v+a)}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 (u+v-a)}} \cdot \sqrt[4]{\frac{1-k^2 \operatorname{sn}^2 (u-a) \operatorname{sn}^2 (v-a)}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 (u+a) \operatorname{sn}^2 (v+a)}}.$$

Macht man aber die Substitutionen

$$\alpha = \frac{u+v-a}{2}, \quad \beta = \frac{u-v-a}{2}, \quad \alpha' = \frac{u+v-a}{2}, \quad \beta' = \frac{u-v+a}{2},$$

so verwandelt sich der Ausdruck (5.) für U auf ähnliche Art in

$$9. \quad U = \sqrt{\frac{\operatorname{sn}(u-a) \operatorname{sn} v - \operatorname{sn} u \operatorname{sn}(v-a)}{\operatorname{sn} u \operatorname{sn}(v+a) - \operatorname{sn} v \operatorname{sn}(u+a)}},$$

$$10. \quad U = \sqrt[4]{\frac{1-k^2 \operatorname{sn}^2 v \operatorname{sn}^2 (u-a)}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 v \operatorname{sn}^2 (u+a)}} \cdot \sqrt[4]{\frac{1-k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 (v-a)}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 (v+a)}}.$$

Eben so, wie die Formel

$$1-k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v =$$
$$(1-k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{sn}(u+a) \operatorname{sn}(v+a))(1+k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{sn} a \operatorname{sn}(u+v+a))$$

gefunden wurde, findet man auch

$$1-k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 (u+v+a) =$$
$$(1-k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn}(u+a) \operatorname{sn}(v+a) \operatorname{sn}(u+v+a))(1+k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{sn}(u+v+a) \operatorname{sn} a).$$

§. 45.

Wir stellen den Ausdruck U in noch drei anderen Gestalten dar. Es ist nach §. 40.:

$$1+k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}(u+v+a)$$
$$=\frac{\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{dn}\,v\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}(u+v+a)-k^2\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cn}(u+v+a)}{k'^2}.$$

Setzt man hierin $-a$ für a, so erhält man noch eine zweite Gleichung; dividirt man durch sie die erste, und zieht man die Quadratwurzel aus, so hat man schon:

$$11.\quad U=\sqrt{\frac{\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{dn}\,v\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}(u+v+a)-k^2\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cn}(u+v+a)}{\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{dn}\,v\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}(u+v-a)-k^2\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cn}(u+v-a)}}.$$

Dividirt man den Zähler und Nenner durch

$$\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{dn}\,v\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}(u+v+a)\,\mathrm{dn}(u+v-a),$$

so erhält man noch auf der Stelle

$$U=\sqrt{\frac{\mathrm{dn}(u+v+a)}{\mathrm{dn}(u+v-a)}}\cdot\sqrt{\frac{1-k^2\,\mathrm{snc}\,u\,\mathrm{snc}\,v\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{snc}(u+v+a)}{1-k^2\,\mathrm{snc}\,u\,\mathrm{snc}\,v\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{snc}(u+v-a)}}.$$

Setzt man nun $u+u'=K$, $v+v'=K$, $a+a'=K$, so ist $u+v+a=3K-(u'+v'+a')$, also $K-(u+v+a)=u'+v'+a'-2K$; ferner $u+v-a=2K-u'-v'+a'-K=K-(u'+v'-a')$; daher erhalten wir:

$$12.\quad\begin{cases}U=\sqrt{\dfrac{\mathrm{dnc}(u'+v'+a')}{\mathrm{dnc}(u'+v'-a)}}\sqrt{\dfrac{1+k^2\,\mathrm{sn}\,u'\,\mathrm{sn}\,v'\,\mathrm{sn}\,a'\,\mathrm{sn}(u'+v'+a')}{1-k^2\,\mathrm{sn}\,u'\,\mathrm{sn}\,v'\,\mathrm{sn}\,a'\,\mathrm{sn}(u'+v'-a')}},\quad\text{oder}\\ U=\sqrt{\dfrac{\mathrm{dn}(u'+v'-a')}{\mathrm{dn}(u'+v'+a')}}\cdot\sqrt{\dfrac{1+k^2\,\mathrm{sn}\,u'\,\mathrm{sn}\,v'\,\mathrm{sn}\,a'\,\mathrm{sn}(u'+v'+a')}{1-k^2\,\mathrm{sn}\,u'\,\mathrm{sn}\,v'\,\mathrm{sn}\,a'\,\mathrm{sn}(u'+v'-a')}}.\end{cases}$$

Wird also in dem Ausdrucke U statt jedes der drei Elemente a, u, v sein Complement gesetzt, so wird dadurch U mit $\sqrt{\frac{\mathrm{dn}(u+v-a)}{\mathrm{dn}(u+v+a)}}=\sqrt{\frac{\mathrm{dn}(u'+v'+a')}{\mathrm{dn}(u'+v'-a')}}$ multiplicirt.

Der Ausdruck U kann auch unter die Form $U=\sqrt{\frac{P+Q}{P-Q}}$ gebracht werden, so daſs $\log U=\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{Q}{P}\right)$ ist, und er muſs sogar unter diese Form gebracht werden, wenn das Argument a den Factor i enthält, damit dann $\frac{1}{i}\log U$ wieder in einer reellen Gestalt dargestellt werden könne. Setzen wir aber:

$$P+Q=1+k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}(u+v+a)\quad\text{und}$$
$$P-Q=1-k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}(u+v-a),$$

so ist

$$P=1+k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}\,a\left(\frac{\mathrm{sn}(u+v+a)-\mathrm{sn}(u+v-a)}{2}\right)\quad\text{und}$$
$$Q=k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}\,a\left(\frac{\mathrm{sn}(u+v+a)+\mathrm{sn}(u+v-a)}{2}\right).$$

Da nun aber

$$\frac{\mathrm{sn}(u+v+a)-\mathrm{sn}(u+v-a)}{2} = \frac{\mathrm{sn}\,a\;\mathrm{cn}(u+v)\,\mathrm{dn}(u+v)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2(u+v)\,\mathrm{sn}^2 a} \quad \text{und}$$

$$\frac{\mathrm{sn}(u+v+a)+\mathrm{sn}(u+v-a)}{2} = \frac{\mathrm{sn}(u+v)\,\mathrm{cn}\,a\;\mathrm{dn}\,a}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2(u+v)\,\mathrm{sn}^2 a}$$

ist, so ist

$$P = 1+\frac{k^2\,\mathrm{sn}^2 a\;\mathrm{sn}\,u\;\mathrm{sn}\,v\;\mathrm{cn}(u+v)\,\mathrm{dn}(u+v)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2(u+v)\,\mathrm{sn}^2 a} \quad \text{und}$$

$$Q = \frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\;\mathrm{cn}\,a\;\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}\,u\;\mathrm{sn}\,v\;\mathrm{sn}(u+v)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2(u+v)\,\mathrm{sn}^2 a};$$

daher ist

$$\log U = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\;\mathrm{cn}\,a\;\mathrm{dn}\,a\;\mathrm{sn}\,u\;\mathrm{sn}\,v\;\mathrm{sn}(u+v)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\;\mathrm{sn}^2(u+v)+k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}\,u\;\mathrm{sn}\,v\;\mathrm{cn}(u+v)\,\mathrm{dn}(u+v)}\right).$$

Der Nenner des angegebenen Bruches läſst sich noch auf zwei verschiedene Arten zusammenziehen, indem man entweder $1-\mathrm{cn}^2(u+v)$ für $\mathrm{sn}^2(u+v)$ oder $1-\mathrm{dn}^2(u+v)$ für $k^2\mathrm{sn}^2(u+v)$ substituirt. Machen wir die letzte Substitution, so ist der Nenner:

$$\mathrm{cn}^2 a+\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{dn}(u+v)(\mathrm{dn}(u+v)+k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}(u+v)),$$

und da nach §. 11. Formel (8.) ist:

$$\mathrm{dn}(u+v)+k^2\mathrm{sn}\,u\;\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}(u+v) = \mathrm{dn}\,u\;\mathrm{dn}\,v,$$

so erhalten wir:

$$13.\quad \log U = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\;\mathrm{cn}\,a\;\mathrm{dn}\,a\;\mathrm{sn}\,u\;\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}(u+v)}{\mathrm{cn}^2 a+\mathrm{sn}^2 a\;\mathrm{dn}\,u\;\mathrm{dn}\,v\;\mathrm{dn}(u+v)}\right).$$

Das Resultat der zweiten vorhin angegebenen Substitution können wir auch aus dem so eben gefundenen Resultate herleiten. Da nach §. 11. Formel (12.) ist

$$\mathrm{dn}\,u\;\mathrm{dn}\,v\;\mathrm{dn}(u+v) = k'^2+k^2\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{cn}(u+v),$$

so ist der Nenner, wenn dieser Werth substituirt wird,

$$\mathrm{cn}^2 a+k'^2\mathrm{sn}^2 a+k^2\mathrm{sn}^2 a\;\mathrm{cn}\,u\;\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{cn}(u+v),$$

und weil $\mathrm{cn}^2 a+k'^2\,\mathrm{sn}^2 a=\mathrm{dn}^2 a$ ist, so erhalten wir:

$$14.\quad \log U = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\;\mathrm{cn}\,a\;\mathrm{dn}\,a\;\mathrm{sn}\,u\;\mathrm{sn}\,v\;\mathrm{sn}(u+v)}{\mathrm{dn}^2 a+k^2\,\mathrm{sn}^2 a\;\mathrm{cn}\,u\;\mathrm{cn}\,v\;\mathrm{cn}(u+v)}\right).$$

Zusatz. Wird ai für a gesetzt und der geänderte Werth von U mit U' bezeichnet, so giebt die Formel (13.):

$$15.\quad \frac{1}{i}\log U' = \mathrm{arc\,tang}\left(\frac{k^2\,\mathrm{tn}'a\;\mathrm{dn}'a\;\mathrm{sn}\,u\;\mathrm{sn}\,v\;\mathrm{sn}(u+v)}{1-\mathrm{sn}'^2 a\;\mathrm{dn}\,u\;\mathrm{dn}\,v\;\mathrm{dn}(u+v)}\right),$$

und die Formel (14.) verwandelt sich nun in:

$$16.\quad \frac{1}{i}\log U' = \mathrm{arc\,tang}\left(\frac{k^2\,\mathrm{tn}'a\;\mathrm{dn}'a\;\mathrm{sn}\,u\;\mathrm{sn}\,v\;\mathrm{sn}(u+v)}{\mathrm{dn}'^2 a-k^2\,\mathrm{sn}'^2 a\;\mathrm{cn}\,u\;\mathrm{cn}\,v\;\mathrm{cn}(u+v)}\right).$$

Setzt man ka für a, ku für u, kv für v und $\frac{1}{k}$ statt des Moduls k, so verwandelt sich, wenn die Sätze des §. 30. angewandt werden, der Ausdruck U wieder in sich selbst.

§. 46.

Die charakteristischen Gleichungen der Modular-Functionen.

Zum Beschlusse dieses Abschnitts leiten wir die characteristischen Gleichungen der Modular-Functionen her.

Setzen wir in der Gleichung (3.) des §. 4. jetzt $p = -1$ und $q = -k^2$ dem §. 6. gemäfs, ferner $x = \operatorname{sn} v$, $y = \operatorname{sn} w$ und $z = \operatorname{sn} u$, da $u = v + w$ sein soll, so erhalten wir die Gleichung

1. $$\operatorname{sn}^2 v + 2 \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u . \operatorname{sn} v \operatorname{sn} w + \operatorname{sn}^2 w + k^2 \operatorname{sn}^2 u . \operatorname{sn}^2 v \operatorname{sn}^2 w = \operatorname{sn}^2 u,$$

welche in Hinsicht auf die Gröfsen $\operatorname{sn} v$ und $\operatorname{sn} w$ symmetrisch ist. Setzen wir in dieser Gleichung $K - v$ für v und $K - w$ für w, so verwandelt sich u in $2K - u$, also $\operatorname{cn} u$ in $-\operatorname{cn} u$, und die Gleichung wird also

$$\operatorname{snc}^2 v - 2 \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u . \operatorname{snc} v \operatorname{snc} w + \operatorname{snc}^2 w + k^2 \operatorname{sn}^2 u . \operatorname{snc}^2 v \operatorname{snc}^2 w = \operatorname{sn}^2 u.$$

Die Anwendung der Sätze des §. 31. verwandelt diese Formel in

$$\operatorname{cn}^2 v - 2 \operatorname{snc} u \frac{\operatorname{dnc} u}{k'} . \operatorname{cn} v \operatorname{cn} w + \operatorname{cn}^2 w - \frac{k^2}{k'^2} \operatorname{cnc}^2 u . \operatorname{cn}^2 v \operatorname{cn}^2 w = \operatorname{cnc}^2 u.$$

Da aber $\operatorname{snc} u \operatorname{dnc} u = \frac{k' \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn}^2 u}$, $\frac{k^2}{k'^2} \operatorname{cnc}^2 u = \frac{k^2 \operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{dn}^2 u}$ ist, so haben wir als characteristische Gleichung der cyklischen Modular-Cosinus

2. $$\operatorname{cn}^2 v - \frac{2 \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn}^2 u} . \operatorname{cn} v \operatorname{cn} w + \operatorname{cn}^2 w - \frac{k^2 \operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{dn}^2 u} . \operatorname{cn}^2 v \operatorname{cn}^2 w = \frac{k'^2 \operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{dn}^2 u}.$$

Durch Anwendung der Sätze des §. 30. verwandelt sich diese Gleichung sofort in

3. $$\operatorname{dn}^2 v - \frac{2 \operatorname{dn} u}{\operatorname{cn}^2 u} . \operatorname{dn} v \operatorname{dn} w + \operatorname{dn}^2 w - \operatorname{tn}^2 u . \operatorname{dn}^2 v \operatorname{dn}^2 w = -k'^2 \operatorname{tn}^2 u.$$

Vertauscht man in der Gleichung (1.) die beiden conjugirten Modul, vi für v und wi für w setzend, so erhält man

4. $$\operatorname{tn}^2 v + 2 \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn}^2 u} . \operatorname{tn} v \operatorname{tn} w + \operatorname{tn}^2 w + k'^2 \operatorname{tn}^2 u \operatorname{tn}^2 v \operatorname{tn} w = \operatorname{tn}^2 u,$$

als characteristische Gleichung der cyklischen Modular-Tangenten.

Die characteristischen Gleichungen haben also für jede Art der cyklischen Modular-Functionen die Form

$$x^2 + 2axy + y^2 + b . x^2 y^2 = e,$$

worin x und y zwei gleichnamige cyklische Modular-Functionen der Ar-

gumente v und w bezeichnen; die Gleichung ist jeden Falles symmetrisch und vom vierten Grade, in Ansehung der einzelnen Gröfsen x und y selbst ist sie aber nur vom zweiten Grade.

Für die hyperbolischen Modular-Functionen gilt dasselbe Gesetz, da man, um die charakteristischen Gleichungen für sie zu finden, in den vorhin gefundenen Gleichungen nur vi für v und wi für w, also ui für u zu setzen braucht.

Vierter Abschnitt.

§. 47.

Integral-Formel zum Ausdrucke des Zusammenhanges zwischen t und u, wenn $t = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\operatorname{am} u$ ist.

Bisher sind immer nur vier cyklische und vier hyperbolische Modular-Functionen $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{tn} u$, $\operatorname{dn} u$, $\mathfrak{S}\mathrm{n}\, u$, $\mathfrak{C}\mathrm{n}\, u$, $\mathfrak{T}\mathrm{n}\, u$, $\mathfrak{D}\mathrm{n}\, u$, mit den vermittelnden Functionen oder Amplituden $\operatorname{am} u$ und $\mathfrak{A}\mathrm{m}\, u$ in Gebrauch gekommen; da aber auch die Function $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\operatorname{am} u$ in manchen Fällen wichtige Dienste leistet, so ist es nöthig, nun auch sie in näheren Betracht zu ziehen, und namentlich den Zusammenhang zwischen dieser Function und dem Argumente u durch eine Integral-Formel auszudrücken. Setzen wir

$$1.\quad \begin{cases} t = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\operatorname{am} u, \text{ so ist auch} \\ t = \sqrt{\frac{1-\operatorname{cn} u}{1+\operatorname{cn} u}} = \frac{\sqrt{(1+\operatorname{sn} u)}-\sqrt{(1-\operatorname{sn} u)}}{\sqrt{(1+\operatorname{sn} u)}+\sqrt{(1-\operatorname{sn} u)}} \text{ oder} \\ t = \mathfrak{T}\mathrm{ang}\,\frac{1}{2}\mathfrak{A}\mathrm{m}' u = \sqrt{\frac{\mathfrak{C}\mathrm{n}' u - 1}{\mathfrak{C}\mathrm{n}' u + 1}}. \end{cases}$$

Wir kehren die vorstehenden Gleichungen um, indem wir die Modular-Functionen selbst durch t ausdrücken. Aus der Gleichung $t = \sqrt{\frac{1-\operatorname{cn} u}{1+\operatorname{cn} u}}$ findet sich zunächst

$$2.\quad \operatorname{cn} u = \frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \operatorname{sn} u = \frac{2t}{1+t^2},\quad \operatorname{tn} u = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Da $\operatorname{dn} u = \sqrt{(k'^2 + k^2 \operatorname{cn}^2 u)}$ ist, so findet sich durch die Substitution des Werthes von $\operatorname{cn} u$ die Formel

$$3.\quad \operatorname{dn} u = \frac{\sqrt{(k'^2(1+t^2)^2 + k^2(1-t^2)^2)}}{1+t^2} \text{ oder } \operatorname{dn} u = \frac{\sqrt{(1+2(k'^2-k^2)t^2+t^4)}}{1+t^2}.$$

Ist $k = \sin\theta$, also $k' = \cos\theta$, so ist $k'^2 - k^2 = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$, und also

$$\operatorname{dn} u = \frac{\sqrt{(1+2\cos 2\theta . t^2 + t^4)}}{1+t^2}.$$

Da $\cos 2\theta < 1$ ist, so kann $1+2\cos 2\theta . t^2 + t^4$ nur in zwei imaginäre Factoren von der Form $1+\alpha t^2$ zerlegt werden, indessen läſst sich jene biquadratische Form in zwei quadratische Factoren zerlegen, welche die Formen

$$1+\alpha t + t^2 \quad \text{und} \quad 1-\alpha t + t^2$$

haben, und welche beide reell sind, wie nun gezeigt werden soll. Es ist $k'^2 - k^2 = 1 - 2k^2$, daher ist $1+2\cos 2\theta . t^2 + t^4 = 1 + 2t^2 + t^4 - 4k^2t^2 = (1+t^2)^2 - 4k^2t^2 = (1+2kt+t^2)(1-2kt+t^2)$; der obige Ausdruck von $\operatorname{dn} u$ läſst sich hiernach auch also darstellen

$$4. \quad \operatorname{dn} u = \frac{\sqrt{(1+2kt+t^2)} . \sqrt{(1-2kt+t^2)}}{1+t^2}.$$

Wird dieser Ausdruck benutzt, so finden wir noch

$$5. \quad \begin{cases} \operatorname{snc} u = \dfrac{1-t^2}{\sqrt{(1+2kt+t^2)} . \sqrt{(1-2kt+t^2)}}, \\ \operatorname{cnc} u = \dfrac{2k't}{\sqrt{(1+2kt+t^2)} . \sqrt{(1-2kt+t^2)}}, \\ \operatorname{tnc} u = \dfrac{1-t^2}{2k't}, \\ \operatorname{dnc} u = \dfrac{k'(1+t^2)}{\sqrt{(1+2kt+t^2)} . \sqrt{(1-2kt+t^2)}}. \end{cases}$$

Aus der Gleichung $t = \operatorname{tang} \frac{1}{2} \operatorname{am} u$ folgt $\operatorname{am} u = 2 \operatorname{arc tang}(t)$; das Differenzial dieser Gleichung ist $\operatorname{dn} u . \partial u = \frac{2\partial t}{1+t^2}$, also $\partial u = \frac{2\partial t}{(1+t^2)\operatorname{dn} u}$, folglich ist, da für $u=0$ auch $t=0$ sein muſs,

$$6. \quad \begin{cases} u = \displaystyle\int_0 \frac{2.\partial t}{\sqrt{(1+2\cos 2\theta . t^2 + t^4)}}, \quad \text{oder} \\ u = \displaystyle\int_0 \frac{2.\partial t}{\sqrt{(1-2kt+t^2)} . \sqrt{(1+2kt+t^2)}}. \end{cases}$$

Setzt man in der Gleichung $t = \operatorname{tang} \frac{1}{2} \operatorname{am} u$ das Argument $u = K$, so wird $\operatorname{am} u = \frac{\pi}{2}$, also $t = \operatorname{tang} \frac{\pi}{4} = 1$; daher haben wir zum Ausdrucke des Modular-Quadranten auch das bestimmte Integral

$$7. \quad K = \int_0^1 \frac{2\partial t}{\sqrt{(1+2\cos 2\theta . t^2 + t^4)}} = \int_0^1 \frac{2\partial t}{\sqrt{(1+2kt+t^2)} . \sqrt{(1-2kt+t^2)}}.$$

Zusatz. Ist $k = \sin 45^0 = \sqrt{\frac{1}{2}}$, so ist $\cos 2\theta = 0$, also nun

$$u = \int_0 \frac{2\partial t}{\sqrt{(1+t^4)}} \quad \text{und} \quad K = \int_0^1 \frac{2\partial t}{\sqrt{(1+t^4)}}.$$

§. 48.

Ueber den Zusammenhang zwischen den Functionen von u und der Function $\tang\frac{1}{2}\operatorname{am}2u$.

Setzt man $t = \tang\frac{1}{2}\operatorname{am}2u$ oder auch $t = \operatorname{tn}u\operatorname{dn}u$, so können alle Formeln des §. 47. sogleich wieder gebraucht werden, wenn man nur durchweg $2u$ für u setzt. Die Integral-Formel für den Zusammenhang zwischen t und u ist daher nun

$$1.\quad u = \int_0 \frac{\partial t}{\sqrt{(1-2kt+t^2)}\sqrt{(1+2kt+t^2)}} = \int_0 \frac{\partial t}{\sqrt{(1+2\cos 2\theta . t^2+t^4)}}.$$

Nun ist $t = 1$ für $u = \frac{K}{2}$ und für $u = K$ ist $\operatorname{am}2u = \pi$, also $t = \tang\frac{\pi}{2}$ oder $t = \frac{1}{0}$. Die Function t hat nun einige Aehnlichkeit mit $\operatorname{tn}u$ selbst. Die cyklischen Modular-Functionen des Argumentes $2u$ lassen sich nun sehr bequem durch t ausdrücken, nicht eben so einfach werden die Ausdrücke für die Functionen des einfachen Argumentes u selbst. Bemerkenswerth sind indessen die Ausdrücke für $\operatorname{sn}u$ und $\operatorname{snc}u$, welche wir nun herleiten. Es ist nach §. 32. *a.*:

$$\operatorname{sn}u = \frac{\sqrt{(1+\operatorname{sn}2u)}-\sqrt{(1-\operatorname{sn}2u)}}{\sqrt{(1+k\operatorname{sn}2u)}+\sqrt{(1-k\operatorname{sn}2u)}},$$
$$\operatorname{snc}u = \frac{\sqrt{(1+\operatorname{sn}2u)}+\sqrt{(1-\operatorname{sn}2u)}}{\sqrt{(1+k\operatorname{sn}2u)}+\sqrt{(1-k\operatorname{sn}2u)}},$$
$$k\operatorname{sn}u = \frac{\sqrt{(1+k\operatorname{sn}2u)}-\sqrt{(1-k\operatorname{sn}2u)}}{\sqrt{(1+\operatorname{sn}2u)}+\sqrt{(1-\operatorname{sn}2u)}},$$
$$k\operatorname{snc}u = \frac{\sqrt{(1+k\operatorname{sn}2u)}-\sqrt{(1-k\operatorname{sn}2u)}}{\sqrt{(1+\operatorname{sn}2u)}-\sqrt{(1-\operatorname{sn}2u)}},$$

und substituirt man hierin für $\operatorname{sn}2u$ den Werth $\operatorname{sn}2u = \frac{2t}{1+t^2}$, so erhält man die Ausdrücke:

$$2.\quad \begin{cases} \operatorname{sn}u = \dfrac{2t}{\sqrt{(1+2kt+t^2)}+\sqrt{(1-2kt+t^2)}}, \\ \operatorname{sn}u = \dfrac{\sqrt{(1+2kt+t^2)}-\sqrt{(1-2kt+t^2)}}{2k}, \\ \operatorname{snc}u = \dfrac{2}{\sqrt{(1+2kt+t^2)}+\sqrt{(1-2kt+t^2)}}, \\ \operatorname{snc}u = \dfrac{\sqrt{(1+2kt+t^2)}-\sqrt{(1-2kt+t^2)}}{2kt}. \end{cases}$$

Man übersieht auch leicht, daſs sich aus dem ersten Ausdrucke für $\operatorname{sn}u$ die drei übrigen auf der Stelle finden lassen, wenn man bedenkt, daſs

$$t = \tang\tfrac{1}{2}\operatorname{am}2u = \operatorname{tn}u\operatorname{dn}u = \frac{\operatorname{sn}u}{\operatorname{snc}u} \text{ ist.}$$

Die vorigen Formeln geben auch rückwärts die Bedeutungen der einzelnen Wurzel-Ausdrücke an, welche in ihnen vorkommen; da nämlich

$$\sqrt{(1+2kt+t^2)}+\sqrt{(1-2kt+t^2)} = \frac{2}{\operatorname{snc} u} \quad \text{und}$$
$$\sqrt{(1+2kt+t^2)}-\sqrt{(1-2kt+t^2)} = 2k \operatorname{sn} u$$

ist, so ist also

$$3. \quad \begin{cases} \sqrt{(1+2kt+t^2)} = \frac{1}{\operatorname{snc} u} + k \operatorname{sn} u, \\ \sqrt{(1-2kt+t^2)} = \frac{1}{\operatorname{snc} u} - k \operatorname{sn} u. \end{cases}$$

Subtrahirt man das Quadrat der letzten Gleichung von dem der ersten, so erhält man wieder $4kt = 4k\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{snc} u}$, oder $t = \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{snc} u} = \operatorname{tang} \frac{1}{2} \operatorname{am} 2u$.

Setzt man $\operatorname{tn} u = x$, so ist $\operatorname{dn} u = \sqrt{\frac{1+k'^2 x^2}{1+x^2}}$, also hat man zur Bestimmung von x die Gleichung $t^2 = \frac{x^2+k'^2 x^4}{1+x^2}$ oder $k'^2 x^4 + x^2(1-t^2) = t^2$, und hieraus folgt

$$\operatorname{tn} u = \sqrt{\frac{-(1-t^2)+\sqrt{(1-2\cos 2\theta . t^2+t^4)}}{1+\cos 2\theta}},$$

wenn wieder $k = \sin\theta$ gesetzt wird.

Zusatz. Setzt man also

$$z = \frac{2t}{\sqrt{(1+2kt+t^2)}+\sqrt{(1-2kt+t^2)}} = \frac{\sqrt{(1+2kt+t^2)}-\sqrt{(1-2kt+t^2)}}{2k},$$

so ist

$$\frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)}.\sqrt{(1-k^2 z^2)}} = \frac{\partial t}{\sqrt{(1+2kt+t^2)}\sqrt{(1-2kt+t^2)}},$$

weil jedes dieser beiden Differenziale $= \partial u$ ist

Anmerkung. Stellt man den Ausdruck von $\operatorname{tn}^2 u$ also dar:

$$-\operatorname{tn}^2 u = \frac{1-t^2-\sqrt{[1-2(k'^2-k^2)t^2+t^4]}}{2k'^2} = \frac{2-2t^2-2\sqrt{[1-2(k'^2-k^2)t^2+t^4]}}{4k'^2},$$

und beobachtet man, daſs

$$\sqrt{(1-2(k'^2-k^2)t^2+t^4)} = \sqrt{(1-2kti-t^2)}.\sqrt{(1+2kti-t^2)}$$

ist, so kann man die Quadratwurzel auf beiden Seiten ausziehen und erhält dadurch in einer imaginären Form den Ausdruck

$$\operatorname{tn} u = \frac{\sqrt{(1+2kti-t^2)}-\sqrt{(1-2kti-t^2)}}{2k'.i},$$

$$\operatorname{tnc} u = \frac{2i}{\sqrt{(1+2kti-t^2)}-\sqrt{(1-2kti-t^2)}} = \frac{\sqrt{(1+2kti-t^2)}+\sqrt{(1-2kti-t^2)}}{2kt},$$

$$\operatorname{tn} u = \frac{\sqrt{(t^2+2kti-1)}-\sqrt{(t^2-2kti-1)}}{2k'},$$

§. 49.

Zurückführung der cyklischen Modular-Functionen mit einem imaginären Modul von der Form $\cos\alpha \pm i\sin\alpha$ auf solche Functionen mit einem reellen Modul.

Nach §. 47. ist, wenn $t = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\operatorname{am} u$ gesetzt wird,

$$u = \int_0 \frac{2\partial t}{\sqrt{(1+2\cos 2\theta . t^2 + t^4)}}.$$

Setzt man hierin für $2\cos 2\theta$ den Werth $e^{2\theta i} + e^{-2\theta i}$, so erhält man:

$$1. \quad u = \int_0 \frac{2\partial t}{\sqrt{(1+t^2 e^{2\theta i})}\sqrt{(1+t^2 e^{-2\theta i})}}.$$

Führen wir, um nicht zu hyperbolischen, sondern zu cyklischen Sinus überzugehen, die Gröſse $\theta' = \frac{\pi}{2} - \theta$ ein, so ist $e^{2\theta i} = e^{\pi i}.e^{-2\theta' i} = -e^{-2\theta' i}$ und $e^{-2\theta i} = e^{-\pi i}.e^{+2\theta' i} = -e^{+2\theta' i}$, und also

$$u = \int_0 \frac{2\partial t}{\sqrt{(1-t^2 . e^{2\theta' i})}\sqrt{(1-t^2 e^{-2\theta i})}}.$$

Es ist nun $e^{\theta' i} = \cos\theta' + i\sin\theta' = k + ik'$ und $e^{-\theta' i} = k - ik'$, daher kann die Gleichung auch also dargestellt werden:

$$u = \int_0 \frac{2\partial t}{\sqrt{(1-(k+ik')^2 t^2)} . \sqrt{(1-(k-ik')^2 t^2)}}.$$

Setzen wir nun $z = (k+ik').t$, also $t = \frac{z}{k+ik'}$ und $\lambda = \frac{k-ik'}{k+ik'}$, so erhalten wir

$$\frac{u(k+ik')}{2} = \int_0 \frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)}\sqrt{(1-\lambda^2 z^2)}}.$$

Dieser Gleichung gemäſs ist aber z oder t $(k+ik')$ der cyklische Modular-Sinus des Argumentes $\frac{u(k+ik')}{2}$ mit dem Modul $\lambda = \frac{k-ik'}{k+ik'}$. Es wird nicht unzweckmäſsig sein, dieses Resultat auf eine ursprüngliche Weise nachzuweisen. Zu dem Ende setzen wir

$$v = u(k+ik'), \quad \text{also} \quad \frac{v}{2} = \frac{u(k+ik')}{2}.$$

Die cyklischen Modular-Functionen des imaginären Argumentes $\frac{v}{2}$ also sollen sich auf den Modul $\frac{k-ik'}{k+ik'}$ beziehen, während sich die cyklischen Modular-Functionen des Argumentes u selbst auf den Modul k beziehen; halten wir diese Bemerkung im Sinne, so können wir die beiden Modul in der Bezeichnung ganz weglassen. Uebrigens setzen wir, wie vorhin, $\lambda = \frac{k-ik'}{k+ik'} = (k-ik')^2 = k^2 - k'^2 - 2ikk' = -\cos 2\theta - i\sin 2\theta$, so daſs also das erste Glied $-\cos 2\theta$ negativ ist für $\theta < 45^0$ und positiv ist für $\theta > 45^0$. Nehmen wir nun an die Gleichung

$$\operatorname{sn}\frac{v}{2} = (k+ik')t = (k+ik')\sqrt{\frac{1-\operatorname{cn}u}{1+\operatorname{cn}u}},$$

dann ist

$$\lambda\operatorname{sn}\frac{v}{2} = (k-ik')t = (k-ik')\sqrt{\frac{1-\operatorname{cn}u}{1+\operatorname{cn}u}},$$

oder

$$\operatorname{sn}\frac{v}{2} = (k+ik').\frac{\operatorname{sn}u}{1+\operatorname{cn}u} \quad \text{und} \quad \lambda\operatorname{sn}\frac{v}{2} = (k-ik').\frac{\operatorname{sn}u}{1+\operatorname{cn}u}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$\left(1-\operatorname{sn}\frac{v}{2}\right)\left(1-\lambda\operatorname{sn}\frac{v}{2}\right) = 1-\frac{2k\operatorname{sn}u}{1+\operatorname{cn}u}+\frac{1-\operatorname{cn}u}{1+\operatorname{cn}u} = \frac{2(1-k\operatorname{sn}u)}{1+\operatorname{cn}u}.$$

Setzen wir hierin $-u$ für u, wodurch sich auch v in $-v$ verwandelt, so erhalten wir noch

$$\left(1+\operatorname{sn}\frac{v}{2}\right)\left(1+\lambda\operatorname{sn}\frac{v}{2}\right) = \frac{2(1+k\operatorname{sn}u)}{1+\operatorname{cn}u};$$

wird diese Gleichung mit der vorigen multiplicirt, und dann die Quadratwurzel ausgezogen, so erhält man

$$\operatorname{cn}\frac{v}{2}\operatorname{dn}\frac{v}{2} = \frac{2\operatorname{dn}u}{1+\operatorname{cn}u}.$$

Differenziirt man aber die Gleichung

$$\operatorname{sn}\frac{v}{2} = (k+ik').\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\operatorname{am}u,$$

so erhält man:

$$\tfrac{1}{2}\operatorname{cn}\frac{v}{2}\operatorname{dn}\frac{v}{2}.\partial v = (k+ik').\frac{\frac{1}{2}\partial\operatorname{am}u}{\cos^2\frac{1}{2}\operatorname{am}u} = (k+ik').\frac{\operatorname{dn}u.\partial u}{1+\operatorname{cn}u},$$

also

$$\operatorname{cn}\frac{v}{2}\operatorname{dn}\frac{v}{2}.\partial v = (k+ik').\frac{2\operatorname{dn}u.\partial u}{1+\operatorname{cn}u},$$

und wird diese Gleichung durch die vorige dividirt, so entsteht

$$\partial v = (k+ik').\partial u, \quad \text{also} \quad v = (k+ik').u, \quad \text{wie oben.}$$

Es bleibt nun noch übrig, aus den Gleichungen

$$2.\quad \begin{cases} \operatorname{sn}\frac{v}{2} = (k+ik').\operatorname{tang}\frac{1}{2}\operatorname{am}u = (k+ik').\sqrt{\frac{1-\operatorname{cn}u}{1+\operatorname{cn}u}} \quad \text{und} \\ \lambda\operatorname{sn}\frac{v}{2} = (k-ik').\sqrt{\frac{1-\operatorname{cn}u}{1+\operatorname{cn}u}} \end{cases}$$

die Ausdrücke für die übrigen sich auf den Modul $\lambda = \frac{k-ik'}{k+ik'}$ beziehenden Modular-Functionen des Argumentes $\frac{v}{2} = \frac{u(k+ik')}{2}$ herzuleiten. Man findet zunächst

$$\operatorname{cn}\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+\operatorname{cn}u-(k+ik')^2(1-\operatorname{cn}u)}{1+\operatorname{cn}u}}, \quad \operatorname{dn}\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+\operatorname{cn}u-(k-ik')^2(1-\operatorname{cn}u)}{1+\operatorname{cn}u}}.$$

Stellen wir den Ausdruck $\operatorname{cn}\frac{v}{2}$, welcher umgeformt werden mufs, vor, unter

$$\operatorname{cn}\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{\alpha}{1+\operatorname{cn}u}} - i\sqrt{\frac{\beta}{1+\operatorname{cn}u}},$$

dann ist

$$\alpha-\beta-2i\sqrt{(\alpha\beta)} = 1+\operatorname{cn}u-(k^2-k'^2)(1-\operatorname{cn}u)-2ikk'(1-\operatorname{cn}u),$$

also

$$\alpha-\beta = 1+\operatorname{cn}u-(k^2-k'^2)(1-\operatorname{cn}u) = 1-k^2+k'^2+(1+k^2-k'^2).\operatorname{cn}u$$

und

$$2\sqrt{(\alpha\beta)} = 2kk'(1-\operatorname{cn}u).$$

Aus diesen Gleichungen findet man, wenn man die Quadrate derselben addirt und die Wurzel auszieht, nach einer leichten Reduction

$$\alpha+\beta = 2\operatorname{dn}u \quad \text{und da} \quad \alpha-\beta = 2k'^2+2k^2\operatorname{cn}u;$$

$$\alpha = \operatorname{dn}u+k^2\operatorname{cn}u+k'^2, \quad \text{und} \quad \beta = \operatorname{dn}u-k^2\operatorname{cn}u-k'^2,$$

also

$$\operatorname{cn}\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{dn}u+k^2\operatorname{cn}u+k'^2}{1+\operatorname{cn}u}} - i\sqrt{\frac{\operatorname{dn}u-k^2\operatorname{cn}u-k'^2}{1+\operatorname{cn}u}} \quad \text{und}$$

$$\operatorname{dn}\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{dn}u+k^2\operatorname{cn}u+k'^2}{1+\operatorname{cn}u}} + i\sqrt{\frac{\operatorname{dn}u-k^2\operatorname{cn}u-k'^2}{1+\operatorname{cn}u}}.$$

Diese Formeln können auch also dargestellt werden:

$$3. \quad \begin{cases} \operatorname{cn}\frac{v}{2} = \sqrt{\left(\frac{1+\operatorname{dn}u}{1+\operatorname{cn}u}-k^2.\frac{1-\operatorname{cn}u}{1+\operatorname{cn}u}\right)} - i\sqrt{\left(k^2.\frac{1-\operatorname{cn}u}{1+\operatorname{cn}u}-\frac{1-\operatorname{dn}u}{1+\operatorname{cn}u}\right)}, \\ \operatorname{dn}\frac{v}{2} = \sqrt{\left(\frac{1+\operatorname{dn}u}{1+\operatorname{cn}u}-k^2.\frac{1-\operatorname{cn}u}{1+\operatorname{cn}u}\right)} + i\sqrt{\left(k^2.\frac{1-\operatorname{cn}u}{1+\operatorname{cn}u}-\frac{1-\operatorname{dn}u}{1+\operatorname{cn}u}\right)}. \end{cases}$$

§. 50.

Die vorhin entwickelten Formeln, wodurch die cyklischen Modular-Functionen mit dem imaginären Modul $\lambda = \frac{k-ik'}{k+ik'} = (k-ik')^2$ zurückgeführt werden auf cyklische Modular-Functionen des Argumentes u mit dem Modul k, werden noch ein wenig einfacher, wenn man in ihnen $2u$ für u setzt. Behält man die Bezeichnung

$$v = (k+ik')u$$

bei, und bezieht man die Modular-Functionen des Argumentes v zugleich auf jenen Modul λ, so verwandelt sich die Formel

$$\operatorname{sn}\frac{v}{2} = (k+ik')\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\operatorname{am}u$$

sogleich in:

$$\operatorname{sn}v = (k+ik')\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\operatorname{am}2u$$

oder

1. $\operatorname{sn} v = (k + ik').\operatorname{tn} u \operatorname{dn} u$ und $\lambda \operatorname{sn} v = (k - ik').\operatorname{tn} u \operatorname{dn} u.$

Die Formeln (3.) verwandeln sich nun in

$$\operatorname{cn} v = \sqrt{\left(\frac{1+\operatorname{dn} 2u}{1+\operatorname{cn} 2u} - k^2.\frac{1-\operatorname{cn} 2u}{1+\operatorname{cn} 2u}\right)} - i\sqrt{\left(k^2.\frac{1-\operatorname{cn} 2u}{1+\operatorname{cn} 2u} - \frac{1-\operatorname{dn} 2u}{1+\operatorname{cn} 2u}\right)},$$

$$\operatorname{dn} v = \sqrt{\left(\frac{1+\operatorname{dn} 2u}{1+\operatorname{cn} 2u} - k^2.\frac{1-\operatorname{cn} 2u}{1+\operatorname{cn} 2u}\right)} + i\sqrt{\left(k^2.\frac{1-\operatorname{cn} 2u}{1+\operatorname{cn} 2u} - \frac{1-\operatorname{dn} 2u}{1+\operatorname{cn} 2u}\right)}.$$

Da aber dem §. 32. *a.* gemäfs $\frac{1+\operatorname{dn} 2u}{1+\operatorname{cn} 2u} = \frac{\operatorname{dn}^2 u}{\operatorname{cn}^2 u}$, $\frac{1-\operatorname{dn} 2u}{1+\operatorname{cn} 2u} = k^2 \operatorname{sn}^2 u$ und $\frac{1-\operatorname{cn} 2u}{1+\operatorname{cn} 2u} = \operatorname{tn}^2 u \operatorname{dn}^2 u$ ist, so werden diese Formeln

$$\operatorname{cn} v = \sqrt{\frac{\operatorname{dn}^2 u - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{dn}^2 u}{\operatorname{cn}^2 u}} - i\sqrt{\frac{k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{dn}^2 u - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn}^2 u}{\operatorname{cn}^2 u}}$$

oder

$$2.\quad \operatorname{cn} v = \frac{\operatorname{dn}^2 u}{\operatorname{cn} u} - ikk'.\frac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{cn} u},\quad \operatorname{dn} v = \frac{\operatorname{dn}^2 u}{\operatorname{cn} u} + ikk'.\frac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{cn} u}.$$

Setzen wir den mit λ conjugirten Modul $\sqrt{(1-\lambda^2)} = \lambda'$, so ist

$$\lambda' = \frac{2\sqrt{(ikk')}}{k+ik'}.$$

Dieser Ausdruck mufs noch in einer andern Gestalt dargestellt werden. Est ist zunächst $\lambda' = \sqrt{2kk'}.\sqrt{(2i)}.(k-ik')$, da aber $\sqrt{(2i)} = 1+i$ ist, so findet man $\lambda' = \sqrt{(2kk')}.(1+i)(k-ik')$ oder

$$3.\quad \lambda' = \sqrt{(2kk')}.[k+k'+(k-k')i].$$

Die Formeln für $\operatorname{cn} v$ und $\operatorname{dn} v$ dienen nun auch noch zur Bestimmung der den beiden Moduln λ und λ' zugehörigen Modular-Quadranten, welche wir mit L und L' bezeichnen. Es mufs L so bestimmt werden, dafs $\operatorname{cn} L = 0$ sei; daher haben wir die Gleichung

$$\frac{\operatorname{dn}^2 u - ikk' \operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{cn} u} = 0,\quad \text{oder}\quad \operatorname{dn}^2 u - ikk' \operatorname{sn}^2 u = 0.$$

Der durch diese Gleichung bestimmte Werth von u giebt mit $k+ik'$ multiplicirt den gesuchten Werth von L. Es ist aber jene Gleichung einerlei mit

$$1 = ikk'.\frac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{dn}^2 u} = \frac{ik}{k'}.\operatorname{cnc}^2 u,$$

folglich ist

$$\operatorname{cnc}^2 u = \frac{k'}{ik} = -\frac{ik'}{k},\quad \text{also}\quad \operatorname{cnc} u = \sqrt{(-2i)}.\sqrt{\frac{k'}{2k}},$$

da aber $\sqrt{(-2i)} = 1-i$ ist, so ist

$$\operatorname{cnc} u = \sqrt{\frac{k'}{2k}} - i\sqrt{\frac{k'}{2k}},$$

und weil nach §. 32. auch $\operatorname{cn}\left(\frac{K}{2} + \frac{iK'}{2}\right) = (1-i)\sqrt{\frac{k'}{2k}}$ ist, so ist

$$K-u=\frac{K}{2}+\frac{iK'}{2}, \quad \text{oder} \quad u=\frac{K}{2}-\frac{iK'}{2},$$

und also der dem Modul $\lambda=\frac{k-ik'}{k+ik'}$ zugehörige Modular-Quadrant

$$4. \quad L=(k+ik').\left(\frac{K}{2}-\frac{iK'}{2}\right)=\frac{\frac{1}{2}K-\frac{1}{2}iK'}{k-ik'}.$$

Die Gleichung $\mathrm{dn}\,v=\frac{\mathrm{dn}^2 u}{\mathrm{cn}\,u}+ikk'.\frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{cn}\,u}$ kann nun zur Probe dienen. Setzt man $u=\frac{K}{2}-\frac{iK'}{2}$, so muſs $v=L$ und also $\mathrm{dn}\,v=\lambda'$ werden. Da nun aber $\mathrm{dn}^2 u=ikk'\,\mathrm{sn}^2 u$ ist, so erhalten wir zunächst $\mathrm{dn}\,v=\frac{2ikk'\,\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{cn}\,u}$; weil ferner $\mathrm{sn}^2 u=\frac{k-ik'}{k}$ und $\frac{1}{\mathrm{cn}\,u}=(1-i)\sqrt{\frac{k}{2k'}}$ ist, so erhalten wir durch die Substitution dieser Werthe

$$\mathrm{dn}\,v=(k-ik')(1+i).\sqrt{(2kk')},$$

oder auch

$$\mathrm{dn}\,v=\sqrt{(2kk')}.[k+k'+i(k-k')]=\lambda'.$$

Setzt man in der Formel $\mathrm{cn}\,v=\frac{\mathrm{dn}^2 u}{\mathrm{cn}\,u}-ikk'.\frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{cn}\,u}$ für u an die Stelle ui, so verwandelt sich der Gleichung $v=(k+ik')u$ gemäſs auch v in vi, daher ist $\mathrm{cn}(vi)=\frac{\mathrm{dn}'^2 u}{\mathrm{cn}' u}+ikk'.\frac{\mathrm{sn}'^2 u}{\mathrm{cn}' u}$, und da auch $\mathrm{cn}(vi)=\frac{1}{\mathrm{cn}' v}$ ist, wenn sich die Function $\mathrm{cn}' v$ auf den Modul λ' bezieht, so erhalten wir die Gleichung

$$\mathrm{cn}' v=\frac{\mathrm{cn}' u}{\mathrm{dn}'^2 u+ikk'\,\mathrm{sn}'^2 u},$$

welche zur Bestimmung des Modular-Quadranten L' dient, der zum Modul λ' gehört; soll $\mathrm{cn}' v=0$, also $v=L'$ sein, so muſs $\mathrm{cn}' u=0$, also $u=K'$ sein; daher ist

$$5. \quad L'=(k+ik').K'=\frac{K'}{k-ik'},$$

und es ist also $\frac{L}{L'}=\frac{K}{2K'}-\frac{i}{2}$. Hiernach haben wir also den Lehrsatz: *Wird* $\frac{k-ik'}{k+ik'}$ *statt des Moduls k gesetzt, so verwandelt sich* $\frac{K}{K'}$ *in* $\frac{1}{2}\left(\frac{K}{K'}-i\right)$.

Zusatz. Da

$$\lambda=\frac{k-ik'}{k+ik'}=(k-ik')^2=\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right]^2$$
$$=\cos(\pi-2\theta)-i\sin(\pi-2\theta)$$

ist, so ist also

$$\lambda=-\cos 2\theta-i\sin 2\theta, \quad \text{und}$$

$$\lambda^n=(-1)^n.(\cos 2n\theta+i\sin 2n\theta), \quad \text{wenn } k=\sin\theta \text{ gesetzt wird.}$$

§. 51.

Zurückführung der cyklischen Modular-Functionen auf andere mit einem kleineren Argumente und kleinerem Modul.

Wir kommen noch einmal auf die Formeln des §. 47. zurück, indem wir dem §. 30. gemäfs darin ku für u und $\frac{1}{k}$ statt des Moduls k setzen. Die Function $t = \operatorname{tang} \frac{1}{2} \operatorname{am} u$ wird nun

$$t = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \operatorname{am} \left(ku, \frac{1}{k}\right) \quad \text{oder}$$

$$t = \sqrt{\frac{1-\operatorname{dn} u}{1+\operatorname{dn} u}} = \frac{k \operatorname{sn} u}{1+\operatorname{dn} u} = \frac{1-\operatorname{dn} u}{k \operatorname{sn} u} \quad \text{oder}$$

$$t = \frac{\sqrt{(1+k\operatorname{sn} u)} - \sqrt{(1-k\operatorname{sn} u)}}{\sqrt{(1+k\operatorname{sn} u)} + \sqrt{(1-k\operatorname{sn} u)}}.$$

Die Formeln (2.) und (3.) werden nun

$$k\operatorname{sn} u = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \operatorname{dn} u = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \operatorname{cn} u = \frac{\sqrt{\left[1-2\left(\frac{2}{k^2}-1\right)t^2+t^4\right]}}{1+t^2},$$

und die Formel (6.) des §. 47. verwandelt sich jetzt in

$$ku = \int_0 \frac{2\,\partial t}{\sqrt{\left[1-2\left(\frac{2}{k^2}-1\right)t^2+t^4\right]}},$$

Der in dieser Formel enthaltene Wurzel-Ausdruck kann jetzt in zwei reelle Factoren zerlegt werden, in welchen die erste Potenz von t nicht vorkommt, und wodurch man erhält:

$$ku = \int_0 \frac{2.\partial t}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{1+k'}{k}\right)^2 t^2\right]}\sqrt{\left[1-\left(\frac{1-k'}{k}\right)^2 t^2\right]}}.$$

Führen wir eine neue Gröfse z ein, nämlich $z = \frac{1+k'}{k} t$, also $t = \frac{k}{1+k'} z$, so ist $\frac{1-k'}{k} t = \frac{1-k'}{1+k'} z = \lambda z$, wenn man $\lambda = \frac{1-k'}{1+k'}$ setzt; da nun auch $\partial t = \frac{k}{1+k'} \partial z$ ist, so erhalten wir

$$\left(\frac{1+k'}{2}\right) u = \int_0 \frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)}.\sqrt{(1-\lambda^2 z^2)}},$$

da für $t = 0$ auch u und z gleich Null sind. Dieser Gleichung gemäfs ist aber z der cyklische Modular-Sinus des Argumentes $\frac{1+k'}{2}.u$ mit dem Modul λ. Die beiden Modul λ und k' sind durch die Gleichung $\frac{1-k'}{1+k'} = \lambda$ mit einander verbunden; ist $\lambda' = \sqrt{(1-\lambda^2)}$ der mit λ conjugirte Modul so haben wir überhaupt die Gleichungen:

$$1.\quad \begin{cases} \lambda = \frac{1-k'}{1+k'} = \left(\frac{\sqrt{(1+k)}-\sqrt{(1-k)}}{\sqrt{(1+k)}+\sqrt{(1-k)}}\right)^2, \qquad \lambda' = \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}, \\ k' = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}, \qquad k = \frac{2\sqrt{\lambda}}{1+\lambda} \text{ und } \lambda'^2.k^2 = 4\lambda.k', \end{cases}$$

welchen gemäfs $\lambda < k$ ist; da nämlich $\lambda = \frac{k^2}{(1+k')^2}$ ist, so ist $\lambda < k^2$, und da $k^2 < k$ ist, so ist um so mehr auch $\lambda < k$.

Setzen wir ferner:

$$v = \frac{1+k'}{2}.u,$$

also rückwärts

$$2.\quad u = \frac{2}{1+k'}.v = (1+\lambda).v, \quad \text{und} \quad ku = 2\sqrt{\lambda}.v,$$

und beziehen wir im Folgenden alle Modular-Functionen des Argumentes v auf den Modul λ, nämlich $\operatorname{sn} v$, $\operatorname{cn} v$, $\operatorname{tn} v$, $\operatorname{dn} v$, ferner $\operatorname{am} v$; hingegen $\operatorname{sn}' v$, $\operatorname{cn}' v$, $\operatorname{dn}' v$, $\operatorname{tn}' v$, wie auch $\operatorname{am}' v$ auf den conjugirten Modul λ', so können wir den Zusammenhang zwischen den sich auf den Modul λ beziehenden Functionen des Argumentes v und den sich auf den Modul k beziehenden Functionen des Argumentes u in einfachen Formeln ausdrücken.

Da $\frac{k}{1+k'} = \sqrt{\lambda}$ ist, so erhält man, wenn in der Gleichung $t = \frac{k}{1+k'} z$ der Werth $t = \sqrt{\frac{1-\operatorname{dn} u}{1+\operatorname{dn} u}}$ und $z = \operatorname{sn} v$ substituirt wird, auf der Stelle die Formel

$$\sqrt{\lambda}\operatorname{sn} v = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\operatorname{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right), \quad \text{oder}$$

$$3.\quad \begin{cases} \sqrt{\lambda}.\operatorname{sn} v = \sqrt{\frac{1-\operatorname{dn} u}{1+\operatorname{dn} u}}, \text{ welche auch also dargestellt werden kann:} \\ \sqrt{\lambda}.\operatorname{sn} v = \frac{\sqrt{(1+k\operatorname{sn} u)}-\sqrt{(1-k\operatorname{sn} u)}}{\sqrt{(1+k\operatorname{sn} u)}+\sqrt{(1-k\operatorname{sn} u)}}, \text{ oder } \sqrt{\frac{1+k\operatorname{sn} u}{1-k\operatorname{sn} u}} = \frac{1+\sqrt{\lambda}.\operatorname{sn} v}{1-\sqrt{\lambda}.\operatorname{sn} v}. \end{cases}$$

Der Gleichung (2.) gemäfs ist $v < u$, und da auch $\lambda < k$ ist, so beziehen sich also die Functionen $\operatorname{sn} v$, $\operatorname{cn} v$, $\operatorname{dn} v$, $\operatorname{tn} v$, $\operatorname{am} v$ auf ein kleineres Argument $v < u$ und zugleich auf einen kleineren Modul $\lambda < k$. Will man umgekehrt die Functionen von u durch Functionen von v ausdrücken, so hat man nur den Werth $t = \sqrt{\lambda}.\operatorname{sn} v$ in den zu Anfange dieses Paragraphen aufgestellten Formeln zu substituiren.

Aus der Formel $\operatorname{sn} v = \sqrt{\frac{1+k'}{1-k'}}\sqrt{\frac{1-\operatorname{dn} u}{1+\operatorname{dn} u}} = \frac{(1+k')\operatorname{sn} u}{1+\operatorname{dn} u}$ folgt

$$4.\quad \operatorname{cn} v = \sqrt{\frac{2}{1-k'}}\sqrt{\frac{\operatorname{dn} u - k'}{1+\operatorname{dn} u}},$$

und aus der Formel $\lambda\,\mathrm{sn}\,v = \sqrt{\frac{1-k'}{1+k'}}\sqrt{\frac{1-\mathrm{dn}\,u}{1+\mathrm{dn}\,u}} = \frac{(1-k')\,\mathrm{sn}\,u}{1+\mathrm{dn}\,u}$ folgt

$$5.\quad \mathrm{dn}\,v = \sqrt{\frac{2}{1+k'}}\sqrt{\frac{k'+\mathrm{dn}\,u}{1+\mathrm{dn}\,u}};$$

ferner ist

$$6.\quad \mathrm{tn}\,v = \sqrt{\frac{1+k'}{2}}\sqrt{\frac{1-\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{dn}\,u-k'}};$$

$$7.\quad \mathrm{snc}\,v = \sqrt{\frac{1+k'}{1-k'}}\sqrt{\frac{\mathrm{dn}\,u-k'}{\mathrm{dn}\,u+k'}} = \sqrt{\frac{1+k'}{1-k'}}\sqrt{\frac{1-\mathrm{dnc}\,u}{1+\mathrm{dnc}\,u}} = \frac{(1+k')\,\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u+k'},$$

$$8.\quad \mathrm{cnc}\,v = \frac{\lambda'\,\mathrm{sn}\,v}{\mathrm{dn}\,v} = \sqrt{\frac{2k'}{1-k'}}\sqrt{\frac{1-\mathrm{dn}\,u}{k'+\mathrm{dn}\,u}} = \sqrt{\frac{2}{1-k'}}\sqrt{\frac{\mathrm{dnc}\,u-k'}{1+\mathrm{dnc}\,u}},$$

$$9.\quad \mathrm{dnc}\,v = \sqrt{\frac{2k'}{1+k'}}\sqrt{\frac{1+\mathrm{dn}\,u}{k'+\mathrm{dn}\,u}} = \sqrt{\frac{2}{1+k'}}\sqrt{\frac{k'+\mathrm{dnc}\,u}{1+\mathrm{dnc}\,u}}.$$

Die Functionen des Complementes von v für den Modul λ hangen also ebenso von dem Argumente $K-u$ ab, wie die Functionen von v selbst für den Modul λ vom Argumente u abhangen.

§. 52.

Die Formeln (4.) und (5.) bieten einen bemerkenswerthen Umstand dar; setzt man in der einen Formel $-k'$ für k', so verwandelt sie sich in die andere; daraus kann man schliefsen, dafs sie sich bequem als Binome werden darstellen lassen, welche nur in den Vorzeichen vor den zweiten Gliedern verschieden sind.

Setzt man, da im Allgemeinen $\mathrm{dn}\,v > \mathrm{cn}\,v$ ist,

$$\mathrm{cn}\,v = \sqrt{\frac{\alpha}{1+\mathrm{dn}\,u}} - \sqrt{\frac{\beta}{1+\mathrm{dn}\,u}} \quad\text{und}\quad \mathrm{dn}\,v = \sqrt{\frac{\alpha}{1+\mathrm{dn}\,u}} + \sqrt{\frac{\beta}{1+\mathrm{dn}\,u}},$$

so soll also $\sqrt{\frac{\alpha}{1+\mathrm{dn}\,u}} = \frac{\mathrm{cn}\,v+\mathrm{dn}\,v}{2}$, oder $\frac{\alpha}{1+\mathrm{dn}\,u} = \left(\frac{\mathrm{cn}\,v+\mathrm{dn}\,v}{2}\right)^2$ und $\frac{\beta}{1+\mathrm{dn}\,u} = \left(\frac{\mathrm{dn}\,v-\mathrm{cn}\,v}{2}\right)^2$ sein; es ist aber $\frac{\mathrm{dn}^2 v+\mathrm{cn}^2 v}{4} = \frac{\mathrm{dn}\,u-k'^2}{k^2(1+\mathrm{dn}\,u)}$, ferner

$$\mathrm{dn}\,v.\mathrm{cn}\,v = \frac{2}{k}.\frac{\sqrt{(\mathrm{dn}^2 u-k'^2)}}{1+\mathrm{dn}\,u} = \frac{2\,\mathrm{cn}\,u}{1+\mathrm{dn}\,u},\ \text{also}\ \frac{2\,\mathrm{dn}\,v\,\mathrm{cn}\,v}{4} = \frac{\mathrm{cn}\,u}{1+\mathrm{dn}\,u},$$

daher ist

$$\alpha = \frac{\mathrm{dn}\,u-k'^2}{k^2}+\mathrm{cn}\,u \quad\text{und}\quad \beta = \frac{\mathrm{dn}\,u-k'^2}{k^2}-\mathrm{cn}\,u,\quad\text{oder}$$

$$\alpha = 1+\mathrm{cn}\,u-\left(\frac{1-\mathrm{dn}\,u}{k^2}\right) \quad\text{und}\quad \beta = 1-\mathrm{cn}\,u-\left(\frac{1-\mathrm{dn}\,u}{k^2}\right),$$

und also

$$\mathrm{cn}\,v = \sqrt{\left(\frac{1+\mathrm{cn}\,u}{1+\mathrm{dn}\,u}-\frac{1}{k^2}.\frac{1-\mathrm{dn}\,u}{1+\mathrm{dn}\,u}\right)} - \sqrt{\left(\frac{1-\mathrm{cn}\,u}{1+\mathrm{dn}\,u}-\frac{1}{k^2}.\frac{1-\mathrm{dn}\,u}{1+\mathrm{dn}\,u}\right)},$$

$$\mathrm{dn}\,v = \sqrt{\left(\frac{1+\mathrm{cn}\,u}{1+\mathrm{dn}\,u}-\frac{1}{k^2}.\frac{1-\mathrm{dn}\,u}{1+\mathrm{dn}\,u}\right)} + \sqrt{\left(\frac{1-\mathrm{cn}\,u}{1+\mathrm{dn}\,u}-\frac{1}{k^2}.\frac{1-\mathrm{dn}\,u}{1+\mathrm{dn}\,u}\right)}.$$

Es können diese Formeln auch also dargestellt werden:

$$\operatorname{cn} v = \sqrt{\frac{(1+\operatorname{cn} u)(\operatorname{dn} u+\operatorname{cn} u)}{(1+\operatorname{dn} u)^2}} - \sqrt{\frac{(1-\operatorname{cn} u)(\operatorname{dn} u-\operatorname{cn} u)}{(1+\operatorname{dn} u)^2}},$$

$$\operatorname{dn} v = \sqrt{\frac{(1+\operatorname{cn} u)(\operatorname{dn} u+\operatorname{cn} u)}{(1+\operatorname{dn} u)^2}} + \sqrt{\frac{(1-\operatorname{cn} u)(\operatorname{dn} u-\operatorname{cn} u)}{(1+\operatorname{dn} u)^2}}.$$

Da dem §. 32. *a.* gemäſs ist

$$1-\operatorname{dn} u = \frac{2k^2 \operatorname{sn}^2 \frac{u}{2} \operatorname{cn}^2 \frac{u}{2}}{1-k^2 \operatorname{sn}^4 \frac{u}{2}}, \qquad 1+\operatorname{dn} u = \frac{2 \operatorname{dn}^2 \frac{u}{2}}{1-k^2 \operatorname{sn}^4 \frac{u}{2}},$$

$$1+\operatorname{cn} u = \frac{2 \operatorname{cn}^2 \frac{u}{2}}{1-k^2 \operatorname{sn}^4 \frac{u}{2}}, \qquad 1-\operatorname{cn} u = \frac{2 \operatorname{sn}^2 \frac{u}{2} \operatorname{dn}^2 \frac{u}{2}}{1-k^2 \operatorname{sn}^4 \frac{u}{2}},$$

$$\operatorname{dn} u+\operatorname{cn} u = \frac{2 \operatorname{cn}^2 \frac{u}{2} \operatorname{dn}^2 \frac{u}{2}}{1-k^2 \operatorname{sn}^4 \frac{u}{2}}, \qquad \operatorname{dn} u-\operatorname{cn} u = \frac{2k'^2 \operatorname{sn}^2 \frac{u}{2}}{1-k^2 \operatorname{sn}^4 \frac{u}{2}},$$

so erhält man durch die Substitution dieser Werthe

$$\sqrt{\lambda}.\operatorname{sn} v = k \operatorname{sn} \frac{u}{2} \operatorname{snc} \frac{u}{2},$$

$$\operatorname{cn} v = \frac{\operatorname{cn}^2 \frac{u}{2}}{\operatorname{dn} \frac{u}{2}} - \frac{k' \operatorname{sn}^2 \frac{u}{2}}{\operatorname{dn} \frac{u}{2}} \qquad \operatorname{dn} v = \frac{\operatorname{cn}^2 \frac{u}{2}}{\operatorname{dn} \frac{u}{2}} + \frac{k' \operatorname{sn}^2 \frac{u}{2}}{\operatorname{dn} \frac{u}{2}},$$

oder nach einer geringen Abänderung:

$$10. \quad \begin{cases} \operatorname{sn} v = (1+k').\operatorname{sn} \frac{u}{2} \operatorname{snc} \frac{u}{2}, \\ \operatorname{cn} v = \operatorname{cn} \frac{u}{2} \operatorname{snc} \frac{u}{2} - \operatorname{sn} \frac{u}{2} \operatorname{cnc} \frac{u}{2}, \\ \operatorname{dn} v = \operatorname{cn} \frac{u}{2} \operatorname{snc} \frac{u}{2} + \operatorname{sn} \frac{u}{2} \operatorname{cnc} \frac{u}{2}. \end{cases}$$

Die mittlere von diesen Formeln kann auch also dargestellt werden:

$$\cos \operatorname{am} v = \sin \operatorname{amc} \frac{u}{2} \cos \operatorname{am} \frac{u}{2} - \cos \operatorname{amc} \frac{u}{2} \sin \operatorname{am} \frac{u}{2} = \sin\left(\operatorname{amc} \frac{u}{2} - \operatorname{am} \frac{u}{2}\right);$$

es ist also

$$11. \quad \operatorname{am} v = \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{amc} \frac{u}{2}\right) + \operatorname{am} \frac{u}{2},$$

und die letzte Formel ist einerlei mit $\operatorname{dn} u = \sin\left(\operatorname{amc} \frac{u}{2} + \operatorname{am} \frac{u}{2}\right)$. Es ist $\tang\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{amc} \frac{u}{2}\right) = \frac{1}{\tang \operatorname{amc} \frac{u}{2}} = \frac{1}{\operatorname{tnc} \frac{u}{2}} = k' \operatorname{tn} \frac{u}{2}$, daher ist die For-

mel (11.) einerlei mit

$$12. \quad \operatorname{am} v = \operatorname{am}\frac{u}{2} + \operatorname{arc\,tang}\left(k' \operatorname{tn}\frac{u}{2}\right).$$

Aus den Formeln $\operatorname{dn}^2\frac{u}{2} = k'^2 + k^2\operatorname{cn}^2\frac{u}{2} = 1 - k^2\operatorname{sn}^2\frac{u}{2}$ folgt

$$\operatorname{cn}^2\frac{u}{2} = \frac{\operatorname{dn}^2\frac{u}{2} - k'^2}{k^2} \quad \text{und} \quad \operatorname{sn}^2\frac{u}{2} = \frac{1 - \operatorname{dn}^2\frac{u}{2}}{k^2};$$

werden diese Werthe substituirt, so erhält man

$$13. \quad \operatorname{cn} v = \frac{\operatorname{dn}\frac{u}{2} - \operatorname{dnc}\frac{u}{2}}{1-k'} \quad \text{und} \quad \operatorname{dn} v = \frac{\operatorname{dn}\frac{u}{2} + \operatorname{dnc}\frac{u}{2}}{1+k'}.$$

Aus den Gleichungen

$$\operatorname{sn} v = (1+k')\frac{\operatorname{sn}\frac{u}{2}\operatorname{cn}\frac{u}{2}}{\operatorname{dn}\frac{u}{2}} \quad \text{und} \quad \operatorname{cn} v = \frac{\operatorname{cn}^2\frac{u}{2} - k'\operatorname{sn}^2\frac{u}{2}}{\operatorname{dn}\frac{u}{2}}$$

folgt

$$14. \quad \operatorname{tn} v = \frac{(1+k')\operatorname{tn}\frac{u}{2}}{1 - k'\operatorname{tn}^2\frac{u}{2}}.$$

Führt man in diese Gleichung den Modul λ statt k' ein, so erhält man

zunächst $\operatorname{tn} v = \dfrac{2\operatorname{sn}\frac{u}{2}\operatorname{cn}\frac{u}{2}}{(1+\lambda)\operatorname{cn}^2\frac{u}{2} - (1-\lambda)\operatorname{sn}^2\frac{u}{2}}$, und es ist also

$$15. \quad \operatorname{tn} v = \frac{\sin 2\operatorname{am}\frac{u}{2}}{\cos 2\operatorname{am}\frac{u}{2} + \lambda}.$$

Da $v = (1+k').\frac{u}{2}$ ist, so ist $v > \frac{u}{2}$, und also v zwischen den Grenzen $\frac{u}{2}$ und u enthalten.

§. 53.

Kehrt man die Gleichung $\sqrt{\lambda}.\operatorname{sn} v = \sqrt{\frac{1-\operatorname{dn} u}{1+\operatorname{dn} u}}$ um, so erhält man:

$$16. \quad \operatorname{dn} u = \frac{1-\lambda\operatorname{sn}^2 v}{1+\lambda\operatorname{sn}^2 v}.$$

Da $\operatorname{dn}^2 u = 1 - k^2\operatorname{sn}^2 u$ ist, so findet man $k\operatorname{sn} u = \frac{2\sqrt{\lambda}.\operatorname{sn} v}{1+\lambda\operatorname{sn}^2 v}$, oder, weil $k = \frac{2\sqrt{\lambda}}{1+\lambda}$ ist,

$$17. \quad \operatorname{sn} u = \frac{(1+\lambda)\operatorname{sn} v}{1+\lambda \operatorname{sn}^2 v}.$$

Hieraus folgt $1-\operatorname{sn} u = \frac{(1-\operatorname{sn} v)(1-\lambda \operatorname{sn} v)}{1+\lambda \operatorname{sn}^2 v}$ und $1+\operatorname{sn} u = \frac{(1+\operatorname{sn} v)(1+\lambda \operatorname{sn} v)}{1+\lambda \operatorname{sn}^2 v}$, also

$$18. \quad \sqrt{\frac{1+\operatorname{sn} u}{1-\operatorname{sn} u}} = \sqrt{\frac{1+\operatorname{sn} v}{1-\operatorname{sn} v}} \cdot \sqrt{\frac{1+\lambda \operatorname{sn} v}{1-\lambda \operatorname{sn} v}} \quad \text{und}$$

$$19. \quad \operatorname{cn} u = \frac{\operatorname{cn} v \operatorname{dn} v}{1+\lambda \operatorname{sn}^2 v} = \frac{(1-\lambda)\operatorname{snc} v}{1-\lambda \operatorname{snc}^2 v}.$$

Aus (17.) und (19.) erhält man durch Division

$$20. \quad \operatorname{tn} u = (1+\lambda) \cdot \frac{\operatorname{tn} v}{\operatorname{dn} v} = \frac{1}{1-\lambda} \cdot \frac{\operatorname{dnc} v}{\operatorname{tnc} v}.$$

Ferner erhält man

$$21. \quad \operatorname{snc} u = \frac{\operatorname{cn} v \operatorname{dn} v}{1-\lambda \operatorname{sn}^2 v} = \frac{(1+\lambda)\operatorname{snc} v}{1+\lambda \operatorname{snc}^2 v},$$

Da $\operatorname{cnc} u = \frac{k' \operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}$ ist, so erhält man, wenn der Werth $k' = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}$ substituirt wird,

$$22. \quad \operatorname{cnc} u = \frac{(1-\lambda)\operatorname{sn} v}{1-\lambda \operatorname{sn}^2 v}.$$

Hieraus folgt aber leicht:

$$23. \quad \sqrt{\frac{1+\operatorname{cnc} u}{1-\operatorname{cnc} u}} = \sqrt{\frac{1+\operatorname{sn} v}{1-\operatorname{sn} v}} \cdot \sqrt{\frac{1-\lambda \operatorname{sn} v}{1+\lambda \operatorname{sn} v}}.$$

Aus (18.) und (23.) folgt durch Multiplication:

$$24. \quad \sqrt{\frac{1+\operatorname{sn} u}{1-\operatorname{sn} u}} \cdot \sqrt{\frac{1+\operatorname{cnc} u}{1-\operatorname{cnc} u}} = \frac{1+\operatorname{sn} v}{1-\operatorname{sn} v}.$$

Nimmt man die natürlichen Logarithmen auf beiden Seiten dieser Gleichung, so hat man:

$$25. \quad \begin{cases} \mathfrak{L} \operatorname{am} v = \dfrac{\mathfrak{L} \operatorname{am} u + \mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{amc} u\right)}{2}; \text{ eben so findet man:} \\[2ex] \mathfrak{L} \operatorname{amc} v = \dfrac{\mathfrak{L} \operatorname{amc} u + \mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{am} u\right)}{2}. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (13.), nämlich $\operatorname{dn}\frac{u}{2} - \operatorname{dnc}\frac{u}{2} = \frac{2\lambda}{1+\lambda}\operatorname{cn} v$ und $\operatorname{dn}\frac{u}{2} + \operatorname{dnc}\frac{u}{2} = \frac{2}{1+\lambda}\operatorname{dn} v$ folgt durch Addition und Subtraction

$$26. \quad \operatorname{dn}\frac{u}{2} = \frac{\operatorname{dn} v + \lambda \operatorname{cn} v}{1+\lambda}, \qquad \operatorname{dnc}\frac{u}{2} = \frac{\operatorname{dn} v - \lambda \operatorname{cn} v}{1+\lambda};$$

und hieraus findet sich

$$27. \quad \begin{cases} \operatorname{sn}\frac{u}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\operatorname{dn} v \operatorname{cn} v + \lambda \operatorname{sn}^2 v}{2}}; \quad \operatorname{snc}\frac{u}{2} = \sqrt{\dfrac{1+\operatorname{dn} v \operatorname{cn} v + \lambda \operatorname{sn}^2 v}{2}}; \\[2ex] \operatorname{cn}\frac{u}{2} = \sqrt{\dfrac{1+\operatorname{dn} v \operatorname{cn} v - \lambda \operatorname{sn}^2 v}{2}}; \quad \operatorname{cnc}\frac{u}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\operatorname{dn} v \operatorname{cn} v - \lambda \operatorname{sn}^2 v}{2}}; \end{cases}$$

28. $\cos 2\,\mathrm{am}\,\frac{u}{2} = \mathrm{dn}\,v\,\mathrm{cn}\,v - \lambda\,\mathrm{sn}^2 v;\quad \cos 2\,\mathrm{amc}\,\frac{u}{2} = -\mathrm{dn}\,v\,\mathrm{cn}\,v - \lambda\,\mathrm{sn}^2 v,$

29. $\sin 2\,\mathrm{am}\,\frac{u}{2} = \mathrm{sn}\,v(\mathrm{dn}\,v + \lambda\,\mathrm{cn}\,v);\quad \sin 2\,\mathrm{amc}\,\frac{u}{2} = \mathrm{sn}\,v(\mathrm{dn}\,v - \lambda\,\mathrm{cn}\,v).$

Aus der Gleichung (15.) folgt, wenn für $\mathrm{tn}\,v$ sein Werth $\frac{\mathrm{sn}\,v}{\mathrm{cn}\,v} = \frac{\sin \mathrm{am}\,v}{\cos \mathrm{am}\,v}$ gesetzt wird, nach Fortschaffung der Nenner

$$\sin\left(2.\mathrm{am}\,\frac{u}{2} - \mathrm{am}\,v\right) = \lambda\,\mathrm{sn}\,v, \text{ oder}$$

30. $$\mathrm{am}\,\frac{u}{2} = \tfrac{1}{2}\mathrm{am}\,v + \tfrac{1}{2}\arcsin(\lambda\,\mathrm{sn}\,v).$$

Nach Formel (12.) ist $\mathrm{am}\,v > \mathrm{am}\,\frac{u}{2}$ und dieser Formel gemäfs ist $\mathrm{am}\,v < 2\,\mathrm{am}\,\frac{u}{2}$, wenn $\mathrm{am}\,v < \pi$ ist, daher liegt dann $\mathrm{am}\,v$ zwischen den Grenzen $\mathrm{am}\,\frac{u}{2}$ und $2\,\mathrm{am}\,\frac{u}{2}$. Da $\cos\left(2\,\mathrm{am}\,\frac{u}{2} - \mathrm{am}\,v\right) = \mathrm{dn}\,v$ immer positiv ist, so lange u und also auch v reel sind, so mufs $2\,\mathrm{am}\,\frac{u}{2} - \mathrm{am}\,v$ immer zwischen den Grenzen $+\theta$ und $-\theta$ enthalten sein, wenn θ den Arcus des Moduls bezeichnet, welcher $< \frac{\pi}{2}$ ist; das Glied $\arcsin(\lambda\,\mathrm{sn}\,v)$ kann zwar bald positiv, bald negativ sein, jenachdem $\mathrm{sn}\,v$ positiv oder negativ ist, seine absolute Gröfse ist aber immer $< \frac{\pi}{2}$.

Die Formel (30.) kann auch also dargestellt werden:

31. $$\begin{cases} \mathrm{am}\,\frac{u}{2} = \tfrac{1}{2}\mathrm{am}\,v + \tfrac{1}{2}\mathrm{arctang}\left(\frac{\lambda\,\mathrm{sn}\,v}{\mathrm{dn}\,v}\right), \\ \mathrm{am}\,\frac{u}{2} = \tfrac{1}{2}\mathrm{am}\,v \pm \tfrac{1}{2}\arccos(\mathrm{dn}\,v). \end{cases}$$

Diese letzte Formel wäre die einfachste, aber sie läfst unbestimmt, ob das zweite Glied positiv oder negativ sei.

§. 54.

Bezeichnen wir die beiden neuen Modular-Quadranten, den zum Modul λ gehörigen mit L, und den zum Modul λ' gehörenden mit L', so findet sich am einfachsten die Gröfse von L nach der Formel (4.) im §. 51.; soll nämlich $\mathrm{cn}\,v = 0$ sein, so mufs $\mathrm{dn}\,u - k' = 0$, also $u = K$ sein; da aber immer $v = \frac{1+k'}{2}.u$ ist, so ist also:

32. $$\begin{cases} L = \frac{1+k'}{2}.K, \text{ oder umgekehrt} \\ K = \frac{2}{1+k'}.L. \end{cases}$$

Setzt man in der Formel (5.) $u = K$, also $\text{dn}\,u = k'$, so erhält man $\text{dn}\,v = \sqrt{\frac{4k'}{(1+k')^2}} = \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'} = \lambda'$, wie auch sein muſs.

Setzt man in der Formel (4.) ui für u und vi für v, so erhält man:

$$\text{cn}'v = \sqrt{\frac{1-k'}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1+\frac{1}{\text{snc}'u}}{\frac{1}{\text{snc}'u}-k'}}, \quad \text{oder} \quad \text{cn}'v = \sqrt{\frac{1-k'}{2}}\sqrt{\frac{1+\text{snc}'u}{1-k'\,\text{snc}'u}},$$

und die Gleichung $v = \frac{1+k'}{2}.u$ verwandelt sich in $vi = \frac{1+k'}{2}.ui$, oder $v = \frac{1+k'}{2}.u$ Der durch die Gleichung $\text{cn}'v = 0$ bestimmte Werth von v ist der zum Modul λ' gehörende Modular-Quadrant L'. Es muſs demnach $\text{snc}'u = -1$, also $K' \pm u = 3K'$ und $\pm u = 2K'$ sein; da u positiv sein soll, so ist also $u = 2K'$ und

$$33. \quad L' = \frac{(1+k')}{2}.2K' = (1+k')K'.$$

Alle übrigen Formeln bestätigen die Richtigkeit dieser Bestimmung. Aus den Gleichungen (32.) und (33.) folgt durch Division:

$$34. \quad \begin{cases} \frac{L}{L'} = \frac{1}{2}.\frac{K}{K'}, \text{ oder umgekehrt} \\ \frac{K}{K'} = 2.\frac{L}{L'}. \end{cases}$$

Wird also $\frac{1-k'}{1+k'}$ statt des Moduls k gesetzt, so verwandelt sich das Verhältniſs $\frac{K}{K'}$ in $\frac{1}{2}.\frac{K}{K'}$.

Die vier Modular-Gleichungen $k = \frac{2\sqrt{\lambda}}{1+\lambda}$, $k' = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}$, $\lambda = \frac{1-k'}{1+k'}$, und $\lambda' = \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}$ bieten einen bemerkenswerthen Umstand dar; setzen wir in ihnen k' für λ und bezeichnen den dadurch geänderten Werth des frühern Moduls k mit x, so haben wir $x = \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}$; und da auch $\lambda' = \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}$ ist, so ist also $x = \lambda'$; vertauschen wir also k' mit λ, so vertauschen wir auch k mit λ', und umgekehrt. Man kann also in allen vorhergehenden Formeln gleichzeitig setzen:

$$\lambda' \text{ für } k, \quad \lambda \text{ für } k', \quad k' \text{ für } \lambda \quad \text{und} \quad k \text{ für } \lambda',$$

ohne daſs jene Formeln dadurch unrichtig werden. Damit die cyklischen Modular-Functionen des Argumentes u sich demnächst wieder auf den Modul k, welcher $> \lambda$ ist, beziehen, so setzen wir gleichzeitig ui für v,

und weil dann auch das frühere Argument imaginär wird, so setzen wir wi für u.

Hiernach verwandelt sich die Gleichung $\operatorname{tn} u = (1+\lambda).\frac{\operatorname{tn} v}{\operatorname{dn} v}$ in $\operatorname{tn}'(wi) = (1+k').\frac{\operatorname{tn}'(ui)}{\operatorname{dn}'(ui)}$, oder auch

$$\operatorname{sn} w = (1+k').\frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}, \quad \text{oder} \quad \operatorname{sn} w = (1+k').\operatorname{sn} u \operatorname{snc} u.$$

In dieser Gleichung bezieht sich die Function $\operatorname{sn} w$ wieder auf den Modul λ, welcher $< k$ ist, und die Functionen $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{snc} u$ beziehen sich auf den Modul k; sie hat grofse Uebereinstimmung mit der Formel (10.) im §. 52., und wird einerlei damit, wenn man $\frac{u}{2}$ für u setzt. Die Gleichung $v = \frac{1+k'}{2}.u$ verwandelt sich nun in $ui = \frac{1+\lambda}{2}.wi$, oder $u = \frac{1+\lambda}{2}.w$, also ist $w = \frac{2}{1+\lambda}.u = (1+k')u$, und da $v = \frac{(1+k')}{2}u$ ist, so ist

$$w = 2v.$$

Die Formel $\operatorname{sn} w = (1+k').\operatorname{sn} u \operatorname{snc} u$ stimmt mit der ersten von den Formeln (10.) im §. 52. überein, wenn man darin $\frac{u}{2}$ für u und v für w setzt. Ueberhaupt darf man in den Formeln (10.) — (15.), wie auch in den Formeln (26.) — (31.) setzen u für $\frac{u}{2}$, wenn man gleichzeitig $w = (1+k')u$ setzt für v.

§. 55.

Einfache Berechnungs-Art des Modular-Quadranten K aus dem gegebenen Modul k.

Den vorhin entwickelten Formeln $\lambda = \frac{1-k'}{1+k'}$ und $\lambda' = \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}$, ferner $K = \frac{2}{1+k'}.L$ gemäfs kann man den gegebenen Modul k auf einen kleineren λ (oder den Modul k' auf einen gröfseren λ') zurückführen, zugleich aber auch den Quadranten K auf einen kleineren L. Bezeichnen wir die aus dem Modul k durch wiederholte Anwendung der angegebenen Formeln hergeleiteten, immer kleiner werdenden Modul der Reihe nach mit k_1, k_2, k_3, k_4, ... k_r, die conjugirten immer gröfser werdenden Modul aber mit k'_1, k'_2, k'_3, k'_4, ... k'_r; die den erstgenannten Moduln zugehörigen immer kleiner werdenden Modular-Quadranten aber mit K_1, K_2, K_3, K_4, ... K_r (die conjugirten immer gröfser werdenden Quadranten aber mit K'_1, K'_2, K'_3, K'_4, ... K'_r), so haben wir $\lambda = k_1$, also

$\lambda' = k'_1$ und $L = K_1$; es ist mithin $k_1 = \frac{1-k'}{1+k'}$, $k'_1 = \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}$ und $K = \frac{2}{1+k'} . K_1$. Setzen wir ferner

$$1. \quad k' = \frac{n}{m}; \quad k'_1 = \frac{n_1}{m_1}; \quad k'_2 = \frac{n_2}{m_2}; \quad k'_3 = \frac{n_3}{m_3}; \; \ldots . \quad k'_r = \frac{n_r}{m_r},$$

so können wir die sämmtlichen Nenner dieser Brüche willkürlich wählen, ihre Zähler werden dann aber völlig bestimmt sein.

Substituiren wir die beiden ersten Brüche in der Formel $k'_1 = \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}$, so wird sie

$$\frac{n_1}{m_1} = \frac{2\sqrt{(mn)}}{m+n};$$

setzen wir also

$$2. \begin{cases} m_1 = \frac{m+n}{2}, & \text{so ist} \quad n_1 = \sqrt{(mn)}, \quad \text{eben so} \\ m_2 = \frac{m_1+n_1}{2}, & \text{so ist} \quad n_2 = \sqrt{(m_1 . n_1)}, \\ m_3 = \frac{m_2+n_2}{2}, & \text{so ist} \quad n_3 = \sqrt{(m_2 . n_2)}, \\ m_4 = \frac{m_3+n_3}{2}, & \text{so ist} \quad n_4 = \sqrt{(m_3 . n_3)}, \\ \text{u. s. w.} & \qquad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Den ersten Nenner können wir noch beliebig wählen; setzen wir aber

$$m = 1, \quad \text{so ist} \quad n = k'.$$

Da jeder folgende Nenner das arithmetische, jeder folgende Zähler aber das geometrische Mittel zwischen dem Zähler und Nenner des vorhergehenden Bruches ist, so erhellet deutlich, dafs die auf einander folgenden Brüche $\frac{n}{m}$, $\frac{n_1}{m_1}$, $\frac{n_2}{m_2}$, $\frac{n_3}{m_3}$ etc. oder die Modul k', k'_1, k'_2, k'_3 etc. sich sehr rasch der Grenze Eins nähern. Ist aber $k'_r = \frac{n_r}{m_r} = 1$ (also $k_r = 0$), so setzen wir

$$m_r = n_r = \eta.$$

Wird auch in der Formel $K = \frac{2}{1+k'} . K_1$ für k' der Bruch $\frac{n}{m}$ substituirt, so verwandelt sie sich in $K = \frac{2m}{m+n} . K_1 = \frac{m}{m_1} . K_1$; daher ist

$$\frac{K}{m} = \frac{K_1}{m_1} = \frac{K_2}{m_2} \ldots . = \frac{K_r}{m_r}.$$

Wird auch in dieser Formel r so grofs genommen, dafs $m_r = n_r = \eta$, also

$k_r = 0$ ist, so ist $K_r = \frac{\pi}{2}$, und da $m = 1$ ist, so ist auch

$$3. \quad K = \frac{\frac{1}{2}\pi}{\eta}.$$

Bei Rechnungen in bestimmten Zahlen ist schon m_4 hinlänglich genau $= n_4$, und also jede dieser Zahlen $= \eta$, zumal da immer k als $< \sin\frac{\pi}{4}$, also $k' > \sin\frac{\pi}{4}$ angesehen werden darf, wie bald gezeigt werden soll. Aus der Formel (3.) folgt rückwärts $\eta = \frac{\pi}{2K}$, und es hat also η hier dieselbe Bedeutung, wie im §. 10. Die in den Formeln (2.) vorkommenden Gröſsen nennen wir die zum Modul k gehörigen Modular-Zahlen.

Zusatz. Ist der Quadrant K berechnet, so hat man auch $K_1 = m_1.K$; $K_2 = m_2.K$; $K_3 = m_3.K$; $K_4 = m_4.K$; u. s. w.

§. 56.

Berechnung des Quadranten K', wenn sein Modul k' wenig von Eins verschieden ist.

Wenn der Modul k sehr klein, also der zugehörige Modular-Quadrant K näherungsweise $= \frac{\pi}{2}$ ist, so ist bekanntlich der conjugirte Quadrant sehr groſs, und zwar desto gröſser, je weniger k' von Eins verschieden ist. Der Quadrant K' kann in einem solchen Falle nach einer Näherungs-Formel berechnet werden, welche ein desto richtigeres Resultat giebt, je kleiner der Modul k ist. Es hat mit dieser Berechnung eine ähnliche Bewandtniſs, wie mit der Berechnung der cyklischen Tangente eines Winkels, welcher vom rechten Winkel wenig verschieden ist.

Es ist $\quad \arg \operatorname{am}'(\phi) = \int_0 \frac{\partial\varphi}{\sqrt{(1-k'^2\sin^2\varphi)}} = \int_0 \frac{\partial\varphi\sqrt{(1-k'^2\sin^2\varphi)}}{1-k'^2\sin^2\varphi}$; setzen wir nun in dem im Zähler befindlichen Wurzelausdrucke, weil hier der Fehler den geringsten Einfluſs hat, $k' = 1$, so ist $\sqrt{(1-k'^2\sin^2\phi)} = \cos\phi$, und also näherungsweise

$$\arg \operatorname{am}'(\phi) = \int_0 \frac{\partial\varphi\cos\varphi}{1-k'^2\sin^2\varphi} = \frac{1}{k'}\int_0 \frac{\partial(k'\sin\varphi)}{1-k'^2\sin^2\varphi}, \quad \text{oder}$$

$$\arg \operatorname{am}'(\phi) = \frac{1}{k'}\,\mathfrak{ArcTang}(k'\sin\phi) = \frac{1}{k'}\log\sqrt{\frac{1+k'\sin\varphi}{1-k'\sin\varphi}}.$$

Setzt man in dieser Formel $\phi = \frac{\pi}{2}$, so erhält man ebenfalls näherungsweise:

$$K' = \frac{1}{k'}\log\sqrt{\frac{1+k'}{1-k'}} = \frac{1}{k'}\log\frac{1+k'}{k}.$$

Auch diese Formel zeigt, daſs K' desto gröſser wird, je kleiner k genommen wird, da $\log\frac{1}{k}$ dieselbe Eigenschaft hat. Wir stellen diese Formel vor unter

$$K' = \log\frac{\alpha}{k} = \log\alpha + \log\frac{1}{k},$$

und richten sie also ein, daſs sie auch auf den Modul $\frac{1}{k'}$ paſst, da auch der Modul $\frac{1}{k'}$ wenig von Eins verschieden ist, wenn k' selbst davon wenig verschieden ist. Setzt man aber $\frac{1}{k'}$ statt des Moduls k', also $\frac{ik}{k'}$ statt k, so verwandelt sich (dem §. 31. Zusatz 1. gemäſs) der Modul K' in $k'(K'-iK) = K' - \frac{\pi i}{2}$, wegen der Kleinheit von k; daher haben wir

$$K' - \frac{\pi i}{2} = \log\frac{\alpha k'}{ik} = \log\frac{\alpha k'}{k} - \log i,$$

oder, weil $\log i = \frac{\pi i}{2}$ ist, $K' = \log\frac{\alpha k'}{k}$. Nehmen wir das arithmetische Mittel zwischen diesem Resultate und dem vorigen $K' = \log\frac{\alpha}{k}$, so erhalten wir die Form

$$K' = \log\left(\frac{\alpha\sqrt{k'}}{k}\right).$$

Setzen wir jetzt hierin $\frac{1}{k'}$ statt k', und $\frac{ik}{k'}$ statt k, so erhalten wir

$$K' - \frac{\pi i}{2} = \log\left(\frac{\alpha\sqrt{\frac{1}{k'}}\,.\,k'}{ik}\right) = \log\left(\frac{\alpha\sqrt{k'}}{k}\right) - \log i \quad \text{oder}$$

$$K' = \log\left(\frac{\alpha\sqrt{k'}}{k}\right),$$

d. h. der Ausdruck für den Quadranten K' paſst nun nicht bloſs auf den Modul k', sondern auch auf den Modul $\frac{1}{k'}$, weil der Ausdruck sich wieder in sich selbst verwandelt, wenn $\frac{1}{k'}$ statt des Moduls k' gesetzt wird. Es bleibt noch die Constante α zu ermitteln übrig, und zu diesem Ende verkleinern wir den Modul k noch einmal. Dem §. 54. gemäſs ist $2.\frac{K'}{K} = \frac{L'}{L}$, oder da wegen der Kleinheit von k und λ ist $K = L = \frac{\pi}{2}$, so muſs $2K' = L'$ sein, und also auch

$$2K' = L' = \log\left(\frac{\alpha\sqrt{\lambda'}}{\lambda}\right) \quad \text{oder} \quad 2\log\left(\frac{\alpha\sqrt{k'}}{k}\right) = \log\left(\frac{\alpha\sqrt{\lambda'}}{\lambda}\right),$$

folglich

$$\frac{\alpha^2 k'}{k^2} = \frac{\alpha\sqrt{\lambda'}}{\lambda} \quad \text{und also} \quad \alpha = \frac{k^2}{k'}.\frac{\sqrt{\lambda'}}{\lambda}.$$

Da aber $k^2 = \frac{4\lambda}{(1+\lambda)^2}$ und $k' = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}$, also $\frac{k^2}{k'} = \frac{4\lambda}{\lambda'^2}$ ist, so ist $\alpha = \frac{4\lambda}{\lambda'^2} \cdot \frac{\sqrt{\lambda'}}{\lambda} = \frac{4}{(\sqrt{\lambda'})^3}$, und dieser Ausdruck reducirt sich auf $\alpha = 4$, da der Modul λ' noch weniger von Eins verschieden ist, als der Modul k'. Hiernach haben wir also die Formel

$$K' = \log\left(\frac{4\sqrt{k'}}{k}\right)$$

zum Ausdrucke des Modular-Quadranten K', wenn der zugehörige Modul k' wenig von Eins verschieden ist, und es ist diese Formel desto richtiger, je kleiner der Modul k ist. Bei sehr groſser Kleinheit von k kann der Ausdruck auf $K' = \log\frac{4}{k}$ beschränkt werden.

Anmerkung. Der so eben gefundene Ausdruck $K' = \log\left(\frac{4\sqrt{k'}}{k}\right)$ oder $K' = \log\left(\frac{4}{k}\right)$ kann als das Anfangsglied einer so rasch convergirenden Reihe betrachtet werden, daſs die darauf folgenden Glieder ihrer groſsen Kleinheit wegen auf das zu findende Resultat keinen Einfluſs mehr haben.

§. 57.

Berechnung des Quadranten K' aus denselben Modularzahlen, welche zur Berechnung des Quadranten K dienten.

Wenden wir dieselbe Bezeichnung an, wie im §. 55., so ist nach §. 54.:

$$2 \cdot \frac{K'}{K} = \frac{K'_1}{K_1}; \text{ eben so ist } 2 \cdot \frac{K'_1}{K_1} = \frac{K'_2}{K_2}; \; \ldots \; 2 \cdot \frac{K'_{(r-1)}}{K_{(r-1)}} = \frac{K'_r}{K_r}.$$

Werden diese r Gleichungen mit einander multiplicirt, so erhält man

$$2^r \cdot \frac{K'}{K} = \frac{K'_r}{K_r}.$$

Ist der zum Quadranten K_r gehörende Modul k_r hinlänglich genau $= 0$ geworden, so ist $K_r = \frac{\pi}{2}$ und also

$$K'_r \cdot \frac{2}{\pi} = 2^r \cdot \frac{K'}{K},$$

oder da $K'_r = \log\frac{4\sqrt{k'_r}}{k_r}$ ist, so ist

$$2^r \cdot \frac{K'}{K} = \frac{2}{\pi} \log\frac{4\sqrt{k'_r}}{k_r} = \frac{1}{\pi} \log\left(\frac{16 k'_r}{k_r^2}\right),$$

also

$$\frac{\pi K'}{K} = \log \sqrt[2^r]{\left(\frac{16 k'_r}{k_r^2}\right)},$$

oder auch

$$1.\quad e^{-\frac{\pi K'}{K}} = \sqrt[2^r]{\left(\frac{k_r^2}{16 k'_r}\right)}.$$

Da $k^2 = \frac{4k_1}{(1+k_1)^2}$ und $k' = \frac{1-k_1}{1+k_1}$ ist, so ist $\frac{k^2}{k'} = \frac{4k_1}{k_1'^2}$, und also $\frac{k^2}{16k'} = \sqrt{\frac{k_1^2}{16 k_1'^4}}$, oder auch

$$\frac{k^2}{16k'} \cdot (\sqrt{k'_1})^3 = \sqrt{\frac{k_1^2}{16 k'_1}};$$

eben so ist

$$\frac{k_1^2}{16k'_1} \cdot (\sqrt{k'_2})^3 = \sqrt{\frac{k_2^2}{16 k'_2}},$$

oder

$$\sqrt{\frac{k_1^2}{16k'_1}} \cdot (\sqrt[4]{k'_2})^3 = \sqrt[4]{\frac{k_2^2}{16 k'_2}},$$

$$\sqrt[4]{\frac{k_2^2}{16k'_2}} \cdot (\sqrt[8]{k'_3})^3 = \sqrt[8]{\frac{k_3^2}{16 k'_3}},$$

u. s. w.

Werden diese Gleichungen mit einander multiplicirt, und diejenigen Factoren weggelassen, welche sich, weil sie sich auf beiden Seiten befinden, aufheben, so erhält man die Formel

$$\sqrt[2^r]{\frac{k_r^2}{16 k'_r}} = \frac{k^2}{16k'}(\sqrt[2]{k'_1} \cdot \sqrt[4]{k'_2} \cdot \sqrt[8]{k'_3} \ldots . \sqrt[2^r]{k'_r})^3.$$

Wird dieser Werth in der Gleichung (1.) substituirt, und dann r als unendlich groſs angesehen, so hat man die Formel

$$2.\quad e^{-\frac{\pi K'}{K}} = \frac{k^2}{16k'} \cdot (k'_1)^{\frac{3}{2}} \cdot (k'_2)^{\frac{3}{4}} \cdot (k'_3)^{\frac{3}{8}} \cdot (k'_4)^{\frac{3}{16}} \ldots .,$$

wodurch die Exponential-Gröſse $e^{-\frac{\pi K'}{K}}$ als ein Product unendlich vieler Factoren dargestellt worden ist; diese Factoren nähern sich aber sehr rasch der Grenze Eins, und aus diesem Grunde geben schon einige erste Factoren des Productes, etwa bis zum Factor $(k'_4)^{\frac{3}{16}}$, bei wirklichen Anwendungen ein hinlänglich genaues Resultat.

Man kann rückwärts sehr leicht zeigen, daſs die Exponential-Gröſse $e^{-\frac{\pi K'}{K}}$ durch das gefundene Product vollkommen characterisirt wird. Vertauschen wir nämlich in jenem Producte den Modul k mit k_1, also auch k' mit k'_1, wie auch K mit K_1 und K' mit K'_1, so erhalten wir:

$$e^{-\frac{\pi K'_1}{K_1}} = \frac{k_1^2}{16k'_1}(k'_2)^{\frac{3}{2}}.(k'_3)^{\frac{3}{4}}.(k'_4)^{\frac{3}{8}}.(k'_5)^{\frac{3}{16}}\ldots;$$

wird das Quadrat der Gleichung (2.) hierdurch dividirt, so entsteht die Gleichung:

$$e^{-\frac{2\pi K'}{K}+\frac{\pi K'_1}{K_1}} = \left(\frac{k^2}{16k'}\right)^2.(k'_1)^3.\frac{16k'_1}{k_1^2},$$

und der Ausdruck auf der rechten Seite reducirt sich auf Eins, wenn darin die Werthe $k=\frac{2\sqrt{k_1}}{1+k_1}$ und $k'=\frac{1-k_1}{1+k_1}$ substituirt werden: der Exponent der Potenz von e ist also $=0$, oder auch $2.\frac{K'}{K}=\frac{K'_1}{K'}$, was mit der Formel (34.) im §. 54. übereinstimmt.

Werden für k'_1, k'_2, k'_3, k'_4 etc. die im §. 55. angegebenen Brüche substituirt, und wird auch jetzt wieder $\frac{\pi}{2K}=\eta$ gesetzt, so erhält man, wenn auf beiden Seiten die natürlichen Logarithmen genommen werden, die rasch convergirende Reihe

$$3.\quad \eta.K' = \log\left(\frac{4\sqrt{k'}}{k}\right)+\tfrac{3}{4}\log\left(\frac{m_1}{n_1}\right)+\tfrac{3}{8}\log\left(\frac{m_2}{n_2}\right)+\tfrac{3}{16}\log\left(\frac{m_3}{n_3}\right)$$
$$+\tfrac{3}{32}\log\left(\frac{m_4}{n_4}\right)+\ldots.$$

Hiernach kann also der Quadrant K' aus denselben Modular-Zahlen berechnet werden, welche zur Berechnung von η oder K dem §. 55. gemäfs dienten. Die Reihe (3.) convergirt desto rascher, je gröfser der Modul k' ist, und die Berechnung von η oder K nach dem im §. 55. angegebenen Verfahren geht ebenfalls desto rascher von Statten, je gröfser k' ist. Man vereinigt also beide Vortheile, wenn man nach dem Verfahren des §. 55. denjenigen Quadranten berechnet, dessen Modul $<\sin 45^0$ ist, und nach der so eben gefundenen Reihe den conjugirten Quadranten, dessen Modul $>\sin 45^0$ ist.

§. 58.

Darstellung der Functionen $\sin(\eta u)$, $\cos(\eta u)$ und $\tang(\eta u)$, wenn $\text{am}\,u$ gegeben ist, und der Functionen $\text{Sin}(\eta u)$, $\text{Cos}(\eta u)$ und $\text{Tang}(\eta u)$, wenn $\text{am}'u$ gegeben ist, als Producte unendlich vieler Factoren in Anwendung derselben Modular-Zahlen, welche zur Berechnung von K oder η dienen.

Ist in den Formeln des §. 51. bis §. 54. $v=u_1$, so kann man eine ganze Reihe von Argumenten u_1, u_2, u_3, u_4, ... u_r, die sich auf die Modul k_1, k_2, k_3, ...k_r beziehen, herleiten, deren jedes von dem vor-

hergehenden eben so abhängt, wie das Argument u_1 oder v von u abhängt. Es sei ferner $\operatorname{am} u = \varphi$, $\operatorname{am} u_1 = \varphi_1$, $\operatorname{am} u_2 = \varphi_2$, $\operatorname{am} u_3 = \varphi_3$, $\operatorname{am} u_4 = \varphi_4$, u. s. w., bis $\operatorname{am} u_r = \varphi_r$, indem wir die successiven Modul k_1, k_2, k_3, ... k_r, worauf sich diese Amplituden beziehen, der Kürze wegen in der Bezeichnung weglassen. Es ist nun $\operatorname{dn} u = \sqrt{(\cos^2\varphi + k'^2 \sin^2\varphi)}$, und wenn wir überhaupt die Bezeichnung des §. 55. anwenden,

$$\operatorname{dn} u = \sqrt{\left(\cos^2\varphi + \frac{n^2}{m^2}\sin^2\varphi\right)} = \frac{\sqrt{(m^2\cos^2\varphi + n^2\sin^2\varphi)}}{m}.$$

Setzen wir also:

$$\triangle = \sqrt{(m^2\cos^2\varphi + n^2\sin^2\varphi)}, \qquad \triangle_1 = \sqrt{(m_1^2\cos^2\varphi_1 + n_1^2\sin^2\varphi_1)},$$
$$\triangle_2 = \sqrt{(m_2^2\cos^2\varphi_2 + n_2^2\sin^2\varphi_2)} \quad \text{u. s. w.,}$$

so ist

$$\operatorname{dn} u = \frac{\triangle}{m}, \quad \operatorname{dn} u_1 = \frac{\triangle_1}{m_1}, \quad \operatorname{dn} u_2 = \frac{\triangle_2}{m_2}, \quad \operatorname{dn} u_3 = \frac{\triangle_3}{m_3}, \quad \ldots, \quad \operatorname{dn} u_r = \frac{\triangle_r}{m_r}.$$

Substituiren wir in der Formel (5.) des §. 51. die angenommenen Zeichen, so haben wir, da $v = u_1$ sein soll, die Formel

$$\frac{\triangle_1}{m_1} = \sqrt{\frac{2m}{m+n}}\sqrt{\frac{\frac{n+\triangle}{m}}{1+\frac{\triangle}{m}}} = \sqrt{\frac{2m}{2m_1}}\cdot\sqrt{\frac{n+\triangle}{m+\triangle}},$$

oder auch

$$1. \quad \begin{cases} \triangle_1 = \sqrt{\left(\dfrac{n+\triangle}{m+\triangle}\cdot m m_1\right)}, \quad \text{eben so ist} \\ \triangle_2 = \sqrt{\left(\dfrac{n_1+\triangle_1}{m_1+\triangle_1}\cdot m_1 m_2\right)}, \\ \triangle_3 = \sqrt{\left(\dfrac{n_2+\triangle_2}{m_2+\triangle_2}\cdot m_2 m_3\right)}, \\ \quad \text{u. s. w.,} \end{cases}$$

und nach diesen ziemlich einfachen Formeln müssen die Gröfsen $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$, $\triangle_4$, ... $\triangle_r$ berechnet werden. Auch diese Gröfsen nähern sich der Grenze η, welcher sich die Modular-Zahlen im §. 55. nähern; denn da $\triangle_r = \sqrt{(m_r^2\cos^2\varphi_r + n_r^2\sin^2\varphi_r)}$ ist, so ist, wenn $m_r = n_r = \eta$ wird, $\triangle_r = \eta\sqrt{(\cos^2\varphi_r + \sin^2\varphi_r)} = \eta$.

Nach Formel (2.) des §. 51. ist $u = \frac{2}{1+k'}\cdot u_1 = \frac{2m}{m+n}\cdot u_1 = \frac{m}{m_1}u_1$, also $\frac{u}{m} = \frac{u_1}{m_1} = \frac{u_2}{m_2} \ldots = \frac{u_r}{m_r}$, oder wenn $m_r = \eta$ ist, so ist $u = \frac{u_r}{\eta}$, oder auch

$$u_r = \eta u,$$

d. h. die Argumente u, u_1, u_2, u_3, ... u_r nähern sich der Grenze ηu.

Da ferner $\varphi_r = \text{am}\, u_r$ ist, so ist auch, wenn k_r hinlänglich genau $= 0$ ist, $\varphi_r = u_r = \eta u$, d. h. die Amplituden $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots \varphi_r$ nähern sich eben so schnell derselben Grenze ηu.

Der Formel (20.) im §. 53. gemäſs ist $\text{tn}\, u = (1+\lambda).\frac{\text{tn}\, u_1}{\text{dn}\, u_1} = \frac{2}{1+k'}.\frac{\text{tn}\, u_1}{\text{dn}\, u_1}$ $= \frac{m\,\text{tn}\, u_1}{m_1\, \text{dn}\, u_1}$, oder auch

$\text{tn}\, u = \frac{m}{\triangle_1}\text{tn}\, u_1$; eben so ist $\text{tn}\, u_1 = \frac{m_1}{\triangle_2}\text{tn}\, u_2$, $\text{tn}\, u_2 = \frac{m_2}{\triangle_3}.\text{tn}\, u_3$, u. s. w.

Da nun $\text{tn}\, u_r = \text{tang}\, u_r = \text{tang}(\eta u)$ wird, wenn r hinlänglich groſs oder lieber unendlich groſs genommen wird, so erhält man durch die Multiplication der vorstehenden Gleichungen die Formel

$$2.\quad \begin{cases} \text{tang}(\eta u) = \text{tang}\,\varphi.\left(\frac{\triangle_1}{m}.\frac{\triangle_2}{m_1}.\frac{\triangle_3}{m_2}.\frac{\triangle_4}{m_3}\ldots\right), \text{ oder auch, da } m = 1 \text{ ist,} \\ \text{tang}(\eta u) = \eta\,\text{tang}\,\varphi.\left(\frac{\triangle_1}{m_1}.\frac{\triangle_2}{m_2}.\frac{\triangle_3}{m_3}.\frac{\triangle_4}{m_4}\ldots\right). \end{cases}$$

Die Factoren dieses Productes convergiren nun sehr rasch gegen die Grenze Eins, da $\triangle_r = m_r = \eta$ ist, und zwar desto rascher, je kleiner der Modul k ist.

Der Formel $\text{sn}\, u_1 = \frac{1+k'}{1+\text{dn}\, u}.\text{sn}\, u$ des §. 51. gemäſs ist $\text{sn}\, u_1 =$ $\frac{2m_1}{m+\triangle}\text{sn}\, u$, eben so $\text{sn}\, u_2 = \frac{2m_2}{m_1+\triangle_1}\text{sn}\, u_1$, $\text{sn}\, u_3 = \frac{2m_3}{m_2+\triangle_2}\text{sn}\, u_2$, u. s. w.

Da nun $\text{sn}\, u_r = \sin(\eta u)$ wird bei gehöriger Kleinheit von k_r oder Gröſse von r, so erhält man durch die Multiplication jener Gleichungen

$$3.\quad \sin(\eta u) = \sin\varphi.\left(\frac{2m_1}{m+\triangle}.\frac{2m_2}{m_1+\triangle_1}.\frac{2m_3}{m_2+\triangle_2}.\frac{2m_4}{m_3+\triangle_3}\ldots\right).$$

Der Formel (7.) des §. 51. gemäſs ist $\text{snc}\, u_1 = \frac{\text{cn}\, u_1}{\text{dn}\, u_1} = \frac{(1+k')\,\text{cn}\, u}{k'+\text{dn}\, u}$ $= \frac{2m_1}{n+\triangle}\text{cn}\, u$, und also

$\text{cn}\, u_1 = \frac{2\triangle_1}{n+\triangle}\text{cn}\, u$; eben so ist $\text{cn}\, u_2 = \frac{2\triangle_2}{n_1+\triangle_1}\text{cn}\, u_1$, u. s. w.

Aus diesen Gleichungen erhält man eben so, wie vorhin

$$4.\quad \cos(\eta u) = \cos\varphi.\left(\frac{2\triangle_1}{n+\triangle}.\frac{2\triangle_2}{n_1+\triangle_1}.\frac{2\triangle_3}{n_2+\triangle_2}.\frac{2\triangle_4}{n_3+\triangle_3}\ldots\right).$$

Im Allgemeinen hat keine der drei Formeln (2.), (3.), (4.) einen Vorzug vor der anderen; die eine convergirt so rasch als die andere; die sämmtlichen briggischen Logarithmen, welche bei ihrer Anwendung vorkommen, kamen auch schon bei der recurrirenden Berechnung der Gröſsen $\triangle_1, \triangle_2, \triangle_3, \triangle_4$ etc. vor, und die Modular-Zahlen des §. 55., welche

hier wieder gebraucht werden, dienten schon zur Berechnung von η; ist ηu nach einer von diesen Formeln berechnet worden, so erhält man durch Division die Gröfse von u selbst. Die Berechnung von $\triangle_1 = \sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)}$ kann durch ein bekanntes Verfahren erleichtert werden.

Zusatz. Setzen wir in den obigen Formeln ui, $u_1 i$, $u_2 i$ etc. für u, u_1, u_2 etc., ohne den Modul mit dem conjugirten zu vertauschen, so verwandelt sich $\triangle = \mathrm{dn}\, u$ in $\triangle = \frac{\mathrm{dn}' u}{\mathrm{cn}' u} = \sqrt{(1 + k^2 \mathrm{tn}'^2 u)}$; setzen wir nun $\mathrm{am}' u = \psi$, so ist $\triangle = \sqrt{(1 + k^2 \mathrm{tang}^2 \psi)} = \frac{\sqrt{(1 - k'^2 \sin^2 \psi)}}{\cos \psi}$. Die Modular-Zahlen bleiben nun dieselben, wie im §. 55., auch bleiben die Formeln (1.) ungeändert, welche zur Berechnung von $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$ etc. aus $\triangle = \sqrt{(1 + k^2 \mathrm{tang}^2 \psi)}$ dienen, obgleich diese Gröfsen selbst nun andere Werthe erhalten.

Da $\triangle_r = \frac{\sqrt{(m_r^2 - n_r^2 \sin^2 \psi_r)}}{\cos \psi_r}$ ist, so erhalten wir auch nun, wenn $m_r = n_r = \eta$ geworden ist,

$$\triangle_r = \eta . \frac{\sqrt{(1 - \sin^2 \psi_r)}}{\cos \psi_r} = \eta.$$

Da sich nun aber $\mathrm{tang}\, \varphi = \mathrm{tn}\, u$ in $i\, \mathrm{sn}' u = i \sin \psi$; $\cos \varphi = \mathrm{cn}\, u$ in $\frac{1}{\mathrm{cn}' u} = \frac{1}{\cos \psi}$ und $\sin \varphi = \mathrm{sn}\, u$ in $i\, \mathrm{tn}' u = i\, \mathrm{tang}\, \psi$ abändert, so erhalten wir die Formeln:

$$5. \quad \mathfrak{Tang}(\eta u) = \sin \psi . \left(\frac{\triangle_1}{m} . \frac{\triangle_2}{m_1} . \frac{\triangle_3}{m_2} . \frac{\triangle_4}{m_3} \ldots . \right),$$

$$6. \quad \mathfrak{Sin}(\eta u) = \mathrm{tang}\, \psi . \left(\frac{2 m_1}{m + \triangle} . \frac{2 m_2}{m_1 + \triangle_1} . \frac{2 m_3}{m_2 + \triangle_2} \ldots . \right),$$

$$7. \quad \mathfrak{Cos}(\eta u) = \frac{1}{\cos \psi} . \left(\frac{2 \triangle_1}{n + \triangle} . \frac{2 \triangle_2}{n_1 + \triangle_1} . \frac{2 \triangle_3}{n_2 + \triangle_2} \ldots . \right).$$

Die Anwendung der ersten Formel für $\mathfrak{Tang}(\eta u)$ ist nicht zu empfehlen, wenn u beträchtlich grofs ist, weil der $\mathfrak{Arcus}(\eta u)$ aus dem bekannten Werthe von $\mathfrak{Tang}(\eta u)$ dann nicht scharf genug bestimmt werden kann.

§. 59.

Die Gröfse ηu dargestellt in rasch convergirenden Reihen, wenn $\mathrm{am}\, u$ oder $\mathrm{am}' u$ gegeben ist, in Anwendung derselben Modular-Zahlen, welche zur Berechnung von η oder K dienen.

Setzt man in den Formeln des §. 52., wie auch in der Formel (2.) des §. 51. und der Formel (30.) des §. 53. jetzt u für $\frac{u}{2}$, u_1 für v und k_1 für λ, so erhält man

$$u = \frac{1}{1+k'}.u_1,$$

$$\operatorname{dn} u_1 = \frac{\operatorname{dn} u + \operatorname{dnc} u}{1+k'},$$

$$\operatorname{cn} u_1 = \frac{\operatorname{dn} u - \operatorname{dnc} u}{1-k'},$$

$$\operatorname{sn} u_1 = (1+k') \operatorname{sn} u \operatorname{snc} u \quad \text{und}$$

$$\operatorname{am} u = \tfrac{1}{2} \operatorname{am} u_1 + \tfrac{1}{2} \arcsin(k_1 \operatorname{sn} u_1) = \tfrac{1}{2} \operatorname{am} u_1 + \tfrac{1}{2} \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{k_1 \operatorname{sn} u_1}{\operatorname{dn} u_1}\right).$$

Wenden wir dieselben Modular-Zahlen, wie in §. 55. an, so haben wir, $u = \frac{m}{m+n} u_1$ oder $\frac{2u}{m} = \frac{u_1}{m_1}$; eben so ist $2.\frac{u_1}{m_1} = \frac{u_2}{m_2}$, $2.\frac{u_2}{m_2} = \frac{u_3}{m_3}$ u. s. w. Werden diese Gleichungen mit einander multiplicirt, so erhält man $2^r.u = \frac{u_r}{m_r}$. Da sich nun m_r der Grenze η nähert, so nähert sich also $\frac{u_r}{2_r}$ der Grenze ηu, und $\frac{\operatorname{am} u_r}{2^r}$ derselben Grenze ηu, da sich der Modul k_r der Grenze Null nähert.

Setzt man wieder $\operatorname{dn} u = \frac{\nabla}{m}$, $\operatorname{dn} u_1 = \frac{\nabla_1}{m_1}$, $\operatorname{dn} u_2 = \frac{\nabla_2}{m_2}$; ... ... $\operatorname{dn} u_r = \frac{\nabla_r}{m_r}$, so ist $\frac{\nabla_1}{m_1} = \frac{\left(\frac{\nabla}{m} + \frac{n}{\nabla}\right) m}{2m_1}$ oder $\nabla_1 = \frac{1}{2}\left(\nabla + \frac{mn}{\nabla}\right)$. Da $mn = n_1^2$ ist, so kann die Formel auch also geschrieben werden:

$$1. \begin{cases} \nabla_1 = \frac{1}{2}\left(\nabla + \frac{n_1^2}{\nabla}\right); \quad \text{eben so ist} \\ \nabla_2 = \frac{1}{2}\left(\nabla_1 + \frac{n_2^2}{\nabla_1}\right), \\ \nabla_3 = \frac{1}{2}\left(\nabla_2 + \frac{n_3^2}{\nabla_2}\right) \\ \quad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Ferner ist $\operatorname{cn} u_1 = \frac{\left(\frac{\nabla}{m} - \frac{n}{\nabla}\right).m}{m-n}$, und also

$$\frac{m-n}{2}.\operatorname{cn} u_1 = \tfrac{1}{2}\left(\nabla - \frac{n_1^2}{\nabla}\right).$$

Aus dieser Gleichung und der vorhin hergeleiteten erhält man durch Addition $\frac{m-n}{2}.\operatorname{cn} u_1 + \nabla_1 = \nabla$ und also rückwärts:

$$\frac{m-n}{2}.\operatorname{cn} u_1 = \nabla - \nabla_1.$$

Wir wenden noch die folgende Bezeichnung an:

$$\delta_1 = \frac{m-n}{2}.\operatorname{sn} u_1, \qquad \delta_2 = \frac{m_1-n_1}{2}.\operatorname{sn} u_2,$$

$$\delta_3 = \frac{m_2-n_2}{2}.\operatorname{sn} u_3, \qquad \delta_4 = \frac{m_3-n_3}{2}.\operatorname{sn} u_4,$$

u. s. w.

und entwickeln, ehe wir weiter gehen, die Formeln, welche zu einer scharfen Berechnung der Gröſsen δ_1, δ_2, δ_3, δ_4, etc. dienen. Es ist zunächst $\delta_1 = \frac{1-k'}{2}.\operatorname{sn} u_1$ und $\operatorname{sn} u_1 = \frac{(1+k').\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u} = \frac{(1+k')\sin\varphi\cos\varphi}{\nabla}$, wenn $\operatorname{am} u = \varphi$, also $\nabla = \sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}$ gesetzt wird; daher ist

$$2. \quad \delta_1 = \frac{k^2\sin\varphi\cos\varphi}{2\nabla}.$$

Die folgenden Coëfficienten δ_2, δ_3, δ_4, δ_5 etc. können bequemer berechnet werden.

Es ist $\frac{\delta_2}{\delta_1} = \frac{m_1-n_1}{m-n}.\frac{\operatorname{sn} u_2}{\operatorname{sn} u_1}$; da aber $\operatorname{sn} u_2 = \frac{(1+k_1')}{\operatorname{dn} u_1}\operatorname{sn} u_1 \operatorname{cn} u_1 = \frac{m_1+n_1}{\nabla_1}\operatorname{sn} u_1 \operatorname{cn} u_1$ ist, so ist

$$\frac{\delta_2}{\delta_1} = \frac{m_1^2-n_1^2}{m-n}.\frac{\operatorname{cn} u_1}{\nabla_1},$$

da aber $\operatorname{cn} u_1 = \frac{2(\nabla-\nabla_1)}{m-n}$ ist, so entsteht

$$\frac{\delta_2}{\delta_1} = \frac{2(m_1^2-n_1^2)}{(m-n)^2}.\frac{\nabla-\nabla_1}{\nabla_1}.$$

Dieser Ausdruck gestattet noch eine Reduction.

Aus den Gleichungen $m_1 = \frac{m+n}{2}$ und $n_1 = \sqrt{(mn)}$ folgt auf der Stelle $m_1^2 - n_1^2 = \frac{(m-n)^2}{4}$, und es ist also

$$3. \begin{cases} \delta_2 = \frac{\nabla-\nabla_1}{2\nabla_1}.\delta_1 = \frac{(\nabla-\nabla_1).k^2\sin\varphi\cos\varphi}{2\nabla.2\nabla_1}; \text{ eben so ist} \\ \delta_3 = \frac{\nabla_1-\nabla_2}{2\nabla_2}.\delta_2 = \frac{(\nabla-\nabla_1)(\nabla_1-\nabla_2).k^2\sin\varphi\cos\varphi}{2\nabla.2\nabla_1.2\nabla_2}, \\ \delta_4 = \frac{\nabla_2-\nabla_3}{2\nabla_3}.\delta_3 = \frac{(\nabla-\nabla_1)(\nabla_1-\nabla_2)(\nabla_2-\nabla_3).k^2\sin\varphi\cos\varphi}{2\nabla.2\nabla_1.2\nabla_2.2\nabla_3}, \\ \delta_5 = \frac{\nabla_3-\nabla_4}{2\nabla_4}.\delta_4 = \frac{(\nabla-\nabla_1)(\nabla_1-\nabla_2)(\nabla_2-\nabla_3)(\nabla_3-\nabla_4).k^2\sin\varphi\cos\varphi}{2\nabla.2\nabla_1.2\nabla_2.2\nabla_3.2\nabla_4} \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Die Gröſsen δ_2, δ_3, δ_4, δ_5 etc. werden nicht alle positiv sein, wenn auch δ_1 positiv ist, weil auch die Differenzen $\nabla-\nabla_1$, $\nabla_1-\nabla_2$, $\nabla_2-\nabla_3$,

$\nabla_3 - \nabla_4$ etc. nicht immer positiv sein werden. Uebrigens nähern sich die Gröſsen ∇, ∇_1, ∇_2, ∇_3, ∇_4 etc. sehr rasch dem Verhältnisse der Gleichheit, und es wird $\nabla_r = \eta$, wenn $m_r = n_r = \eta$ wird. Eine Folge hiervon ist aber, daſs die Gröſsen δ_2, δ_3, δ_4, δ_5 etc. eine überaus rasch convergirende Reihe bilden; in den meisten Fällen ist schon δ_4 hinlänglich genau $= 0$.

Nach diesen Vorbereitungen ist es nun leicht, ηu in einer rasch convergirenden Reihe darzustellen. Es ist $\operatorname{am} u = \frac{1}{2}\operatorname{am} u_1 + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,sin}(k_1 \operatorname{sn} u_1)$, da aber $k_1 = \frac{1-k'}{1+k'} = \frac{m-n}{2m_1}$ ist, so haben wir

$$\operatorname{am} u = \tfrac{1}{2}\operatorname{am} u_1 + \tfrac{1}{2}\operatorname{arc\,sin}\left(\frac{\delta_1}{m_1}\right); \text{ eben so ist:}$$

$$\tfrac{1}{2}\operatorname{am} u_1 = \tfrac{1}{4}\operatorname{am} u_2 + \tfrac{1}{4}\operatorname{arc\,sin}\left(\frac{\delta_2}{m_2}\right),$$

$$\tfrac{1}{4}\operatorname{am} u_2 = \tfrac{1}{8}\operatorname{am} u_3 + \tfrac{1}{8}\operatorname{arc\,sin}\left(\frac{\delta_3}{m_3}\right)$$

u. s. w.

Durch die Addition dieser Gleichungen erhält man

$$\operatorname{am} u = \frac{1}{2^r}\operatorname{am} u_r + \tfrac{1}{2}\operatorname{arc\,sin}\left(\frac{\delta_1}{m_1}\right) + \tfrac{1}{4}\operatorname{arc\,sin}\left(\frac{\delta_2}{m_2}\right) + \tfrac{1}{8}\operatorname{arc\,sin}\left(\frac{\delta_3}{m_3}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{2^r}\operatorname{arc\,sin}\left(\frac{\delta_r}{m_r}\right).$$

Vergröſsert man aber r hinlänglich, so nähert sich $\frac{1}{2_r}\operatorname{am} u_r$ der Grenze ηu, und es ist also

$$4.\quad \eta u = \Phi - \tfrac{1}{2}\operatorname{arc\,sin}\left(\frac{\delta_1}{m_1}\right) - \tfrac{1}{4}\operatorname{arc\,sin}\left(\frac{\delta_2}{m_2}\right) - \tfrac{1}{8}\operatorname{arc\,sin}\left(\frac{\delta_3}{m_3}\right) - \tfrac{1}{16}\operatorname{arc\,sin}\left(\frac{\delta_4}{m_4}\right)$$
$$- \tfrac{1}{32}\operatorname{arc\,sin}\left(\frac{\delta_5}{m_5}\right) - \text{etc.}$$

Da $\operatorname{arc\,sin}(k_1 \operatorname{sn} u_1) = \pm \operatorname{arc\,cos}(\operatorname{dn} u_1) = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{k_1 \operatorname{sn} u_1}{\operatorname{dn} u_1}\right) = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta_1}{m_1 \,.\, \operatorname{dn} u_1}\right)$ $= \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta_1}{\nabla_1}\right)$ ist, so kann die vorige Reihe auch also dargestellt werden:

$$5.\quad \eta u = \Phi - \tfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta_1}{\nabla_1}\right) - \tfrac{1}{4}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta_2}{\nabla_2}\right) - \tfrac{1}{8}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta_3}{\nabla_3}\right)$$
$$- \tfrac{1}{16}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta_4}{\nabla_4}\right) - \tfrac{1}{32}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta_5}{\nabla_5}\right) - \text{etc.}$$

Die einzelnen Glieder, welche in diesen Reihen auf Φ folgen, haben ungeachtet der Vorzeichen $(-)$ vor ihnen nicht jedesmal eine Verminderung zur Folge, da unter den Gröſsen δ_1, δ_2, δ_3, δ_4, δ_5 etc. einige auch negativ sein werden.

Den so eben entwickelten Formeln gemäfs müssen, um ηu zu berechnen, aufser den Modular-Zahlen des §. 55. und den Gröfsen ∇, ∇_1, ∇_2, ∇_3, ∇_4 etc., auch noch die Gröfsen δ_1, δ_2, δ_3, δ_4, δ_5 etc. berechnet werden; die Berechnung der zuletzt genannten Gröfsen kann man umgehen, wenn man, da $\arcsin(k_1 \operatorname{sn} u_1) = \pm \arccos(\operatorname{dn} u_1) = \pm \arccos\left(\frac{\nabla_1}{m_1}\right)$, die Formel also schreibt:

$$6. \qquad \eta u = \varphi + \tfrac{1}{2}\alpha_1 . \arccos\left(\frac{\nabla_1}{m_1}\right) + \tfrac{1}{4}\alpha_2 . \arccos\left(\frac{\nabla_2}{m_2}\right) + \tfrac{1}{8}\alpha_3 . \arccos\left(\frac{\nabla_3}{m_3}\right) + \text{ etc.},$$

und unter jedem von den Zeichen α_1, α_2, α_3, α_4 etc. versteht entweder $+1$ oder -1. Vergleicht man diese Reihe mit den vorigen, so sieht man, dafs die unbekannten Vorzeichen sich lediglich nach den Zählern der Ausdrücke δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 etc. richten. Ist, wie wir hier annehmen, $\operatorname{am} u$ oder $\varphi < \frac{\pi}{2}$, so ist

$$\alpha_1 = -1.$$

Ferner haben die übrigen Gröfsen α_2, α_3, α_3, α_4 etc., deren jede $= \pm 1$ ist, dieselben Vorzeichen:

α_2 mit $-(\nabla - \nabla_1)$,

α_3 mit $-(\nabla - \nabla_1)(\nabla_1 - \nabla_2)$,

α_4 mit $-(\nabla - \nabla_1)(\nabla_1 - \nabla_2)(\nabla_2 - \nabla_3)$,

α_5 mit $-(\nabla - \nabla_1)(\nabla_1 - \nabla_2)(\nabla_2 - \nabla_3)(\nabla_3 - \nabla_4)$

u. s. w.

Hiernach lassen sich die Vorzeichen α_2, α_3, α_4, α_4 etc., auch ohne die angegebenen Producte wirklich zu berechnen, schon aus der blofsen Ansicht der Gröfsen ∇, ∇_1, ∇_2, ∇_3, ∇_4 etc. bestimmen, wenn man nur darauf achtet, ob diese Gröfsen, statt abzunehmen, zunehmen. Jedesmal findet ein Zeichenwechsel Statt, wenn eine folgende von diesen Gröfsen gröfser ist, als die ihr zunächst vorhergehende, und durch diese einfache Bemerkung sind alle Vorzeichen in der Reihe (6.) völlig bestimmt.

Da die in der Reihe (6.) vorkommenden Arcus im Fortgange sehr rasch immer kleiner und kleiner werden, und also mittelst der Cosinus nicht scharf zu bestimmen sind, so wird man die Reihe (6.) endlich also darstellen:

$$7. \quad \eta u = \varphi + \alpha_1 \operatorname{arc\,tang}\left(\sqrt{\frac{m_1 - \nabla_1}{m_1 + \nabla_1}}\right) + \frac{\alpha_2}{2} \cdot \operatorname{arc\,tang}\left(\sqrt{\frac{m_2 - \nabla_2}{m_2 + \nabla_2}}\right)$$
$$+ \frac{\alpha_3}{4} \cdot \operatorname{arc\,tang}\left(\sqrt{\frac{m_3 - \nabla_3}{m_3 + \nabla_3}}\right) + \frac{\alpha_4}{8} \cdot \operatorname{arc\,tang}\left(\sqrt{\frac{m_4 - \nabla_4}{m_4 + \nabla_4}}\right)$$
$$+ \frac{\alpha_5}{16} \cdot \operatorname{arc\,tang}\left(\sqrt{\frac{m_5 - \nabla_5}{m_5 + \nabla_5}}\right) + \text{etc.}$$

Zusatz. Setzt man ui für u, $u_1 i$ für u_1, $u_2 i$ für u_2, u. s. w., so bleiben die Gröſsen ∇, ∇_1, ∇_2 etc. reell, nur ändern sie ihre Bedeutungen. Setzt man $\operatorname{am}' u = \psi$, so verwandelt sich $\nabla = \sqrt{(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u)}$ in $\nabla = \sqrt{(1 + k^2 \operatorname{tn}'^2 u)}$ oder $\nabla = \sqrt{(1 + k^2 \operatorname{tang}^2 \psi)}$.

Die Formeln (1.), welche zur Berechnung von ∇_1, ∇_2, ∇_3, ∇_4 etc. dienen, bleiben ungeändert, wie auch die Modular-Zahlen des §. 55. Die Gröſse $\delta_1 = \frac{k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{2\nabla}$ verwandelt sich nun in $i\delta_1 = \frac{i k^2 \operatorname{tn}' u}{2\nabla \operatorname{cn}' u}$; setzt man auſserdem noch $i\delta_2$ für δ_2, $i\delta_3$ für δ_3, $i\delta_4$ für δ_4 etc., so hat man

$$8. \begin{cases} \delta_1 = \dfrac{k^2 \operatorname{tang}\psi}{2\nabla \cos\psi}, \\ \delta_2 = \dfrac{\nabla - \nabla_1}{2\nabla_1} \cdot \delta_1 = \dfrac{(\nabla - \nabla_1)}{2\nabla \cdot 2\nabla_1} \cdot \dfrac{k^2 \operatorname{tang}\psi}{\cos\psi}, \\ \delta_3 = \dfrac{\nabla_1 - \nabla_2}{2\nabla_2} \cdot \delta_2 = \dfrac{(\nabla - \nabla_1)(\nabla_1 - \nabla_2)}{2\nabla \cdot 2\nabla_1 \cdot 2\nabla_2} \cdot \dfrac{k^2 \operatorname{tang}\psi}{\cos\psi}, \\ \delta_4 = \dfrac{\nabla_2 - \nabla_3}{2\nabla_3} \cdot \delta_3 = \dfrac{(\nabla - \nabla_1)(\nabla_1 - \nabla_2)(\nabla_2 - \nabla_3)}{2\nabla \cdot 2\nabla_1 \cdot 2\nabla_2 \cdot 2\nabla_3} \cdot \dfrac{k^2 \operatorname{tang}\psi}{\cos\psi}, \\ \delta_5 = \dfrac{\nabla_3 - \nabla_4}{2\nabla_4} \cdot \delta_4 = \dfrac{(\nabla - \nabla_1)(\nabla_1 - \nabla_2)(\nabla_2 - \nabla_3)(\nabla_3 - \nabla_4)}{2\nabla \cdot 2\nabla_1 \cdot 2\nabla_2 \cdot 2\nabla_3 \cdot 2\nabla_4} \cdot \dfrac{k^2 \operatorname{tang}\psi}{\cos\psi} \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Da nun auſserdem $\operatorname{am} ui = i\,\mathfrak{Am}\, u = i\mathfrak{L} \operatorname{am}' u = i\mathfrak{L}\psi$ ist, so haben wir also zur Berechnung von u aus $\operatorname{am}' u = \psi$ die Reihen:

$$9. \quad \eta u = \mathfrak{L}\psi - \tfrac{1}{2}\, \mathfrak{Arc\,Sin}\left(\frac{\delta_1}{m_1}\right) - \tfrac{1}{4}\, \mathfrak{Arc\,Sin}\left(\frac{\delta_2}{m_2}\right) - \tfrac{1}{8}\, \mathfrak{Arc\,Sin}\left(\frac{\delta_3}{m_3}\right)$$
$$- \tfrac{1}{16}\, \mathfrak{Arc\,Sin}\left(\frac{\delta_4}{m_4}\right) - \tfrac{1}{32}\, \mathfrak{Arc\,Sin}\left(\frac{\delta_5}{m_5}\right) - \text{etc.},$$

$$10. \quad \eta u = \mathfrak{L}\psi - \tfrac{1}{2}\, \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\delta_1}{\nabla_1}\right) - \tfrac{1}{4}\, \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\delta_2}{\nabla_2}\right) - \tfrac{1}{8}\, \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\delta_3}{\nabla_3}\right)$$
$$- \tfrac{1}{16}\, \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\delta_4}{\nabla_4}\right) - \tfrac{1}{32}\, \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\delta_5}{\nabla_5}\right) - \text{etc.}$$

Anmerkung 1. Es ist ein bemerkenswerther Umstand, daſs sowohl die unendlichen Producte im §. 58. als auch die so eben gefunde-

nen Reihen einen im Ganzen gleichen Grad der Convergenz haben, welcher nicht von der Gröfse der Amplituden φ und ψ, sondern lediglich von der Gröfse des Moduls k oder k' abhängt. Ist der Modul der gegebenen Amplitude $< \sin\frac{\pi}{4}$, so wird man sie $= \varphi = \operatorname{am} u$ setzen, und also die Formeln (2.), (3.), (4.) des §. 58. oder die Formeln (4.), (5.), (7.) des §. 59. anwenden; ist aber der Modul der gegebenen Amplitude $> \sin\frac{\pi}{4}$, so wird man sie $= \psi = \operatorname{am}' u$ setzen, und dann überhaupt die Formeln (5.), (6.), (7.) des §. 58. oder die Formeln (9.) und (10.) des §. 59. anwenden, wenn in beiden Fällen die Rechnung so kurz, als möglich, sein soll. Wir werden, wie hier, so in der Zukunft immer uns den Modul k als $< \sin\frac{\pi}{4}$, und den Modul k' als $> \sin\frac{\pi}{4}$ vorstellen, wenn das Gegentheil nicht ausdrücklich erwähnt wird.

Anmerkung 2. Wenn man in der viel gebrauchten Modular-Gleichung $\lambda = \frac{1-k'}{1+k'}$ statt des Moduls k setzt $\frac{1}{k}$, so erhält man $\lambda = \frac{k-ik'}{k+ik'}$, wie im §. 49., und es kann dieser Ausdruck auch also dargestellt werden: $\lambda = \left(\frac{\sqrt{(1+k)} - i\sqrt{(1-k)}}{\sqrt{(1+k)} + i\sqrt{(1-k)}}\right)^2$. Wenn man gleichzeitig ku für u setzt, so verwandeln sich die Formeln des §. 51., §. 52., §. 53. in die des §. 48. und §. 49.

Fünfter Abschnitt.

§. 60.

Von der Integration der Modular-Functionen.

Differenzürt man den Ausdruck $t = \frac{1}{k}$ Arc Tang $(k \operatorname{sn} a \operatorname{sn} u)$, indem man u als veränderlich betrachtet, so erhält man $\partial t = \frac{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \,.\, \partial u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u}$. Dieser Ausdruck kann auch also dargestellt werden: $\frac{\operatorname{sn}(a+u) + \operatorname{sn}(a-u)}{2} . \partial u$ und es ist also

$$1.\quad \int_0 \frac{\operatorname{sn}(a+u) + \operatorname{sn}(a-u)}{2} . \partial u = \frac{1}{k} \text{Arc Tang} (k \operatorname{sn} a \operatorname{sn} u).$$

Setzt man in dieser Formel $a + iK'$ für a, so verwandelt sie sich zunächst in

$$\int_0 \frac{\frac{\partial u}{k\,\mathrm{sn}(a+u)}+\frac{\partial u}{k\,\mathrm{sn}(a-u)}}{2} = \frac{1}{k}\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{sn}\,a}\right),$$

und es ist also

$$2.\quad \int_0 \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\mathrm{sn}(a+u)}+\frac{\partial u}{\mathrm{sn}(a-u)}\right) = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{sn}\,a}\right).$$

Setzt man in der Formel (1.) zuerst $K-a$ für a, so verwandelt sie sich in:

$$\int_0 \frac{\mathrm{snc}(a-u)+\mathrm{snc}(a+u)}{2}\,\partial u = \frac{1}{k}\,\mathfrak{Arc\,Tang}(k\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{sn}\,u);$$

setzt man in dieser Formel nun $k'a$ für a und $k'u$ für u, ferner $\frac{ik}{k'}$ statt des Moduls k, so erhält man auf der Stelle:

$$3.\quad \begin{cases} \int_0 \frac{\mathrm{cn}(a-u)+\mathrm{cn}(a+u)}{2}.\partial u = \frac{1}{k}\,\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{k}{k'}\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cnc}\,u\right), \quad \text{oder} \\ \int \frac{\mathrm{cn}(a-u)+\mathrm{cn}(a+u)}{2}.\partial u = \frac{1}{k}\,\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{k\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}\right). \end{cases}$$

Vertauscht man in dieser Formel den Modul k mit k', indem man ai für a und ui für u setzt, so verwandelt sie sich in:

$$4.\quad \int_0 \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\mathrm{cn}(a-u)}+\frac{\partial u}{\mathrm{cn}(a+u)}\right) = \frac{1}{k'}\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{k'\,\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,u}\right)$$
$$= \frac{1}{k'}\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{cnc}\,u}{\mathrm{cn}\,a}\right).$$

Setzt man in der Formel (3.) ka für a, ku für u und $\frac{1}{k}$ statt des Moduls k, so verwandelt sie sich in:

$$5.\quad \int_0 \frac{\mathrm{dn}(a-u)+\mathrm{dn}(a+u)}{2}.\partial u = \mathrm{arc\,tang}(\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{tn}\,u),$$

was mit den Formeln (13.) und (14.) im §. 12. übereinstimmt. Setzt man in dieser Formel $K-a$ für a, so verwandelt sie sich in:

$$6.\quad \int_0 \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\mathrm{dn}(a+u)}+\frac{\partial u}{\mathrm{dn}(a-u)}\right) = \frac{1}{k'}\,\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{k'\,\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{dn}\,a}\right),$$

Vertauscht man in der Formel (1.) die beiden conjugirten Modul, und setzt man ai für a, wie auch ui für u, so erhält man:

$$7.\quad \int_0 \frac{\mathrm{tn}(a+u)+\mathrm{tn}(a-u)}{2}\,\partial u = \frac{1}{k'}\,\mathfrak{Arc\,Tang}(k'\,\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{tn}\,u),$$

und eben so erhält man aus der Formel (2.)

$$8.\quad \int_0 \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\mathrm{tn}(a+u)}+\frac{\partial u}{\mathrm{tn}(a-u)}\right) = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{tn}\,a}\right).$$

§. 61.

Der Formel $\partial \operatorname{am}(a \pm u) = \pm \operatorname{dn}(a \pm u) \partial u$ gemäſs ist rückwärts

$$\int_0 \operatorname{dn}(a+u).\partial u = \operatorname{am}(a+u) + \text{const.} \quad \text{und}$$

$$\int_0 -\operatorname{dn}(a-u).\partial u = \operatorname{am}(a-u) + \text{const.}$$

In beiden Fällen findet man die Constante $= -\operatorname{am} a$, und es ist also

$$1.\ \begin{cases} \int_0 \operatorname{dn}(a+u).\partial u = \operatorname{am}(a+u) - \operatorname{am} a = \operatorname{arc\,tang}(\operatorname{tn}(a+u)) - \operatorname{arc\,tang}(\operatorname{tn} a), \\ \int_0 -\operatorname{dn}(a-u).\partial u = \operatorname{am}(a-u) - \operatorname{am} a = \operatorname{arc\,tang}(\operatorname{tn}(a-u)) - \operatorname{arc\,tang}(\operatorname{tn} a). \end{cases}$$

Aus diesen beiden Formeln erhält man durch Addition:

$$\int_0 \frac{\operatorname{dn}(a+u) - \operatorname{dn}(a-u)}{2} \partial u = \frac{\operatorname{am}(a+u) + \operatorname{am}(a-u)}{2} - \operatorname{am} a.$$

und diese Formel verwandelt sich nach §. 12. in:

$$2.\ \int_0 \frac{\operatorname{dn}(a+u) - \operatorname{dn}(a-u)}{2} \partial u = \operatorname{arc\,tang}(\operatorname{tn} a \operatorname{dn} u) - \operatorname{arc\,tang}(\operatorname{tn} a),$$

oder auch in:

$$\int_0 \frac{\operatorname{dn}(a-u) - \operatorname{dn}(a+u)}{2} \partial u = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{tn} a(1 - \operatorname{dn} u)}{1 + \operatorname{tn}^2 a \operatorname{dn} u}\right).$$

Setzt man in den Formeln (1.) $K - a$ für a, so erhält man:

$$\int_0 \frac{\partial u}{\operatorname{dn}(a-u)} = \frac{1}{k'}\left[\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{1}{k' \operatorname{tn}(a-u)}\right) - \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{1}{k' \operatorname{tn} a}\right)\right],$$

oder auch

$$3.\ \begin{cases} \int_0 \frac{\partial u}{\operatorname{dn}(a-u)} = \frac{1}{k'}[\operatorname{arc\,tang}(k' \operatorname{tn} a) - \operatorname{arc\,tang}(k' \operatorname{tn}(a-u))], \\ \int_0 \frac{-\partial u}{\operatorname{dn}(a+u)} = \frac{1}{k'}[\operatorname{arc\,tang}(k' \operatorname{tn} a) - \operatorname{arc\,tang}(k' \operatorname{tn}(a+u))]. \end{cases}$$

Die Formel (2.) aber verwandelt sich in

$$4.\ \int_0 \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\operatorname{dn}(a-u)} - \frac{\partial u}{\operatorname{dn}(a+u)}\right) = \frac{1}{k'}\left[\operatorname{arc\,tang}(k' \operatorname{tn} a) - \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{k' \operatorname{tn} a}{\operatorname{dn} u}\right)\right].$$

Setzt man in den Gleichungen (1.) ka für a, ku für u, und $\frac{1}{k}$ statt des Moduls k, so erhält man:

$$5.\ \begin{cases} \int_0 \operatorname{cn}(a+u).\partial u = \frac{1}{k}\left[\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{k \operatorname{sn}(a+u)}{\operatorname{dn}(a+u)}\right) - \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{k \operatorname{sn} a}{\operatorname{dn} a}\right)\right], \\ \int_0 -\operatorname{cn}(a-u).\partial u = \frac{1}{k}\left[\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{k \operatorname{sn}(a-u)}{\operatorname{dn}(a-u)}\right) - \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{k \operatorname{sn} a}{\operatorname{dn} a}\right)\right], \end{cases}$$

und die Formel (2.) giebt eben so:

$$6.\ \int_0 \frac{-\operatorname{cn}(a-u) + \operatorname{cn}(a+u)}{2}.\partial u = \frac{1}{k}\left[\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{k \operatorname{sn} a \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} a}\right) - \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{k \operatorname{sn} a}{\operatorname{dn} a}\right)\right].$$

Setzt man in den Gleichungen (5.) ai für a, ui für u, nachdem man die beiden conjugirten Modul mit einander vertauscht hat, so erhält man:

$$7.\quad \begin{cases} \int_0 \frac{\partial u}{\mathrm{cn}(a+u)} = \frac{1}{k'}\left[\mathfrak{ArcTang}\left(\frac{k'\,\mathrm{sn}(a+u)}{\mathrm{dn}(a+u)}\right) - \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{k'\,\mathrm{sn}\,a}{\mathrm{dn}\,a}\right)\right], \\ \int_0 \frac{\partial u}{\mathrm{cn}(a-u)} = \frac{1}{k'}\left[\mathfrak{ArcTang}\left(\frac{k'\,\mathrm{sn}\,a}{\mathrm{dn}\,a}\right) - \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{k'\,\mathrm{sn}(a-u)}{\mathrm{dn}(a-u)}\right)\right], \end{cases}$$

und die Formel (6.) verwandelt sich in

$$8.\quad \int_0 \tfrac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\mathrm{cn}(a-u)} - \frac{\partial u}{\mathrm{cn}(a+u)}\right] = \frac{1}{k'}\left[\mathfrak{ArcTang}\left(\frac{k'\,\mathrm{sn}\,a}{\mathrm{dn}\,a}\right) - \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{k'\,\mathrm{sn}\,a}{\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{cn}\,u}\right)\right].$$

Setzt man in der Formel (5.) $K-a$ für a, so hat man zunächst

$$\int_0 \mathrm{cnc}(a-u).\partial u = \frac{1}{k}\left[\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{k}{k'}\,\mathrm{cn}(a-u)\right) - \mathrm{arc\,tang}\left(\frac{k}{k'}\,\mathrm{cn}\,a\right)\right].$$

Hieraus erhält man nach §. 31. sofort

$$9.\quad \begin{cases} \int_0 \mathrm{sn}(a-u).\partial u = \frac{1}{k}\left[\mathfrak{ArcTang}(k\,\mathrm{snc}(a-u)) - \mathfrak{ArcTang}(k\,\mathrm{snc}\,a)\right], \\ \int_0 \mathrm{sn}(a+u).\partial u = \frac{1}{k}\left[\mathfrak{ArcTang}(k\,\mathrm{snc}\,a) - \mathfrak{ArcTang}(k\,\mathrm{snc}(a+u))\right]. \end{cases}$$

Wird auch in der Formel (6.) gesetzt $K-a$ für a, so wird sie

$$\int_0 \frac{\mathrm{cnc}(a+u) - \mathrm{cnc}(a-u)}{2}.\partial u = \frac{1}{k}\left[\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{k}{k'}\,\mathrm{cn}\,a\right) - \mathrm{arc\,tang}\left(\frac{k}{k'}\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cn}\,u\right)\right],$$

und dem §. 31. gemäfs verwandelt sie sich in

$$10.\quad \int_0 \frac{\mathrm{sn}(a+u) - \mathrm{sn}(a-u)}{2}.\partial u$$
$$= \frac{1}{k}\left[\mathfrak{ArcTang}(k\,\mathrm{snc}\,a) - \mathfrak{ArcTang}(k\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{snc}\,u)\right].$$

Aus den Formeln (7.) erhält man in gleicher Weise:

$$11.\quad \begin{cases} \int_0 \frac{\partial u}{\mathrm{sn}(a+u)} = \mathfrak{ArcTang}(\mathrm{snc}\,a) - \mathfrak{ArcTang}(\mathrm{snc}(a+u)) \quad \text{und} \\ \int_0 \frac{\partial u}{\mathrm{sn}(a-u)} = \mathfrak{ArcTang}(\mathrm{snc}(a-u)) - \mathfrak{ArcTang}(\mathrm{snc}\,a), \end{cases}$$

und aus (8.) erhält man:

$$12.\quad \int_0 \tfrac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\mathrm{sn}(a-u)} - \frac{\partial u}{\mathrm{sn}(a+u)}\right] = \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\mathrm{snc}\,a}{\mathrm{snc}\,u}\right) - \mathfrak{ArcTang}(\mathrm{snc}\,a).$$

Vertauscht man die beiden conjugirten Modul, und setzt man ai für a, wie auch ui für u, so erhält man noch:

$$13.\quad \begin{cases} \int_0 \mathrm{tn}(a-u).\partial u = \frac{1}{k'}\left[\mathfrak{ArcTang}(\mathrm{dnc}\,a) - \mathfrak{ArcTang}(\mathrm{dnc}(a-u))\right], \\ \int_0 \mathrm{tn}(a+u).\partial u = \frac{1}{k'}\left[\mathfrak{ArcTang}(\mathrm{dnc}(a+u)) - \mathfrak{ArcTang}(\mathrm{dnc}\,a)\right], \end{cases}$$

$$14.\quad \int_0 \frac{\mathrm{tn}(a+u) - \mathrm{tn}(a-u)}{2}.\partial u = \frac{1}{k'}\left[\mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\mathrm{dnc}\,a}{\mathrm{dn}\,u}\right) - \mathfrak{ArcTang}(\mathrm{dnc}\,a)\right],$$

$$15.\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0 \frac{\partial u}{\mathrm{tn}\,(a+u)} = \mathfrak{ArcTang}\,(\mathrm{dn}\,a) - \mathfrak{ArcTang}\,(\mathrm{dn}\,(a+u)), \\ \displaystyle\int_0 \frac{\partial u}{\mathrm{tn}\,(a-u)} = \mathfrak{ArcTang}\,(\mathrm{dn}\,(a-u)) - \mathfrak{ArcTang}\,(\mathrm{dn}\,a), \end{cases}$$

$$16.\quad \int_0 \tfrac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\mathrm{tn}\,(a-u)} - \frac{\partial u}{\mathrm{tn}\,(a+u)}\right] = \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{dn}\,u}\right) - \mathfrak{ArcTang}\,(\mathrm{dn}\,a).$$

Zusatz. Aus den entwickelten Formeln machen wir nun noch folgende Zusammenstellung:

$$1.\quad \int \frac{\mathrm{sn}\,a\;\mathrm{cn}\,u\;\mathrm{dn}\,u\;\partial u}{1-k^2\;\mathrm{sn}^2 a\;\mathrm{sn}^2 u} = \frac{1}{k}\,\mathfrak{ArcTang}\,(k\;\mathrm{sn}\,a\;\mathrm{sn}\,u) + C,$$

$$2.\quad \int \frac{\mathrm{cn}\,a\;\mathrm{dn}\,a\;\mathrm{sn}\,u\;\partial u}{1-k^2\;\mathrm{sn}^2 a\;\mathrm{sn}^2 u} = -\frac{1}{k}\,\mathfrak{ArcTang}\,(k\;\mathrm{snc}\,a\;\mathrm{snc}\,u) + C,$$

$$3.\quad \int \frac{\mathrm{cn}\,a\;\mathrm{cn}\,u\;\partial u}{1-k^2\;\mathrm{sn}^2 a\;\mathrm{sn}^2 u} = \frac{1}{k}\,\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{k}{k'}\;\mathrm{cn}\,a\;\mathrm{cnc}\,u\right) + C,$$

$$4.\quad \int \frac{\mathrm{sn}\,a\;\mathrm{dn}\,a\;\mathrm{sn}\,u\;\mathrm{dn}\,u\;\partial u}{1-k^2\;\mathrm{sn}^2 a\;\mathrm{sn}^2 u} = \frac{1}{k}\,\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{k}{k'}\;\mathrm{cnc}\,a\;\mathrm{cn}\,u\right) + C,$$

$$5.\quad \int \frac{\mathrm{dn}\,a\;\mathrm{dn}\,u\,.\,\partial u}{1-k^2\;\mathrm{sn}^2 a\;\mathrm{sn}^2 u} = \mathrm{arc\,tang}\,(\mathrm{dn}\,a\;\mathrm{tn}\,u) + C,$$

$$6.\quad \int \frac{k^2\;\mathrm{sn}\,a\;\mathrm{cn}\,a\;\mathrm{sn}\,u\;\mathrm{cn}\,u\;\partial u}{1-k^2\;\mathrm{sn}^2 a\;\mathrm{sn}^2 u} = \mathrm{arc\,tang}\,(\mathrm{tn}\,a\;\mathrm{dn}\,u) + C,$$

$$7.\quad \int \frac{\mathrm{sn}\,a\;\mathrm{cn}\,a\;\mathrm{dn}\,u\,.\,\partial u}{\mathrm{cn}^2 a\;\mathrm{cn}^2 u - k'^2\;\mathrm{sn}^2 a\;\mathrm{sn}^2 u} = \frac{1}{k'}\,\mathfrak{ArcTang}\,(k'\;\mathrm{tn}\,a\;\mathrm{tn}\,u) + C,$$

$$8.\quad \int \frac{\mathrm{dn}\,a\;\mathrm{sn}\,u\;\mathrm{cn}\,u\,.\,\partial u}{\mathrm{cn}^2 a\;\mathrm{cn}^2 u - k'^2\;\mathrm{sn}^2 a\;\mathrm{sn}^2 u} = \frac{1}{k'}\,\mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\mathrm{dnc}\,a}{\mathrm{dn}\,u}\right) + C,$$

$$9.\quad \int \frac{\mathrm{cn}\,a\;\mathrm{dn}\,a\;\mathrm{cn}\,u\;\mathrm{dn}\,u\;\partial u}{\mathrm{cn}^2 a\;\mathrm{cn}^2 u - k'^2\;\mathrm{sn}^2 a\;\mathrm{sn}^2 u} = \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{snc}\,a}\right) + C,$$

$$10.\quad \int \frac{k'^2\;\mathrm{sn}\,a\;\mathrm{sn}\,u\,.\,\partial u}{\mathrm{cn}^2 a\;\mathrm{cn}^2 u - k'^2\;\mathrm{sn}^2 a\;\mathrm{sn}^2 u} = \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\mathrm{sn}\,a}{\mathrm{snc}\,u}\right) + C,$$

$$11.\quad \int \frac{\mathrm{sn}\,a\;\mathrm{cn}\,u\;\mathrm{dn}\,u\;\partial u}{\mathrm{sn}^2 a - \mathrm{sn}^2 u} = \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{sn}\,a}\right) + C,$$

$$12.\quad \int \frac{\mathrm{cn}\,a\;\mathrm{dn}\,a\;\mathrm{sn}\,u\;\partial u}{\mathrm{sn}^2 a - \mathrm{sn}^2 u} = \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\mathrm{snc}\,a}{\mathrm{snc}\,u}\right) + C,$$

$$13.\quad \int \frac{\mathrm{cn}\,a\;\mathrm{cn}\,u\;\partial u}{\mathrm{cn}^2 a\;\mathrm{cn}^2 u - k'^2\;\mathrm{sn}^2 a\;\mathrm{sn}^2 u} = \frac{1}{k'}\,\mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\mathrm{cnc}\,u}{\mathrm{cn}\,a}\right) + C,$$

$$14.\quad \int \frac{\mathrm{sn}\,a\;\mathrm{dn}\,a\;\mathrm{sn}\,u\;\mathrm{dn}\,u\;\partial u}{\mathrm{cn}^2 a\;\mathrm{cn}^2 u - k'^2\;\mathrm{sn}^2 a\;\mathrm{sn}^2 u} = \frac{1}{k'}\,\mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\mathrm{cnc}\,a}{\mathrm{cn}\,u}\right) + C,$$

15. $$\int \frac{\operatorname{dn} a \operatorname{dn} u \, \partial u}{\operatorname{dn}^2 a \operatorname{dn}^2 u + k^2 k'^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u} = \frac{1}{k'} \operatorname{arc\,tang}(\operatorname{dnc} a \operatorname{tn} u) + C,$$

16. $$\int \frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \, \partial u}{\operatorname{dn}^2 a \operatorname{dn}^2 u + k^2 k'^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u} = \frac{1}{k'} \operatorname{arc\,tang}(\operatorname{dnc} u \operatorname{tn} a) + C,$$

17. $$\int \frac{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} u \, \partial u}{\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2 u} = \operatorname{ArcTang}\left(\frac{\operatorname{tn} u}{\operatorname{tn} a}\right) + C,$$

18. $$\int \frac{\operatorname{dn} a \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \, \partial u}{\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2 u} = \operatorname{ArcTang}\left(\frac{\operatorname{dn} a}{\operatorname{dn} u}\right) + C.$$

Alle vorhin betrachtete Integrale lassen sich also als Amplituden, oder auch entweder als cyklische oder als hyperbolische Arcus darstellen.

§. 62.

Zweite Differenziale der cyklischen Modular-Functionen und ihrer natürlichen Logarithmen.

Differenziirt man die Gleichung $\partial \operatorname{sn} u = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u . \partial u$ noch einmal, so erhält man $\partial^2 \operatorname{sn} u = (-k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn}^2 u - \operatorname{sn} u \operatorname{dn}^2 u) \, \partial u^2$, und es ist also

1. $$\frac{\partial^2 \operatorname{sn} u}{\partial u^2} = -(1+k^2) \operatorname{sn} u + 2k^2 \operatorname{sn}^3 u.$$

Eben so findet man noch die Formeln:

2. $$\frac{\partial^2 \operatorname{cn} u}{\partial u^2} = (-1+2k^2) \operatorname{cn} u - 2k^2 \operatorname{cn}^3 u,$$

3. $$\frac{\partial^2 \operatorname{tn} u}{\partial u^2} = (1+k'^2) \operatorname{tn} u + 2k'^2 \operatorname{tn}^3 u,$$

4. $$\frac{\partial^2 \operatorname{dn} u}{\partial u^2} = (1+k'^2) \operatorname{dn} u - 2 \operatorname{dn}^3 u.$$

Ist also z irgend eine Modular-Function des Argumentes u, so hat ihr zweites Differenzial-Verhältniſs jeden Falles die Form

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = \alpha . z + \beta z^3.$$

Da überhaupt $\partial \log P = \frac{\partial P}{P}$ ist, so erhält man

$$\frac{\partial \log \operatorname{sn} u}{\partial u} = \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u} = \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{tn} u} = \frac{k' \operatorname{cn} u}{\operatorname{cnc} u},$$

$$\frac{\partial \log \operatorname{cn} u}{\partial u} = \frac{-\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u} = \frac{-\operatorname{sn} u}{\operatorname{snc} u} = -\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \operatorname{am} 2u = -\operatorname{tn} u \operatorname{dn} u,$$

$$\frac{\partial \log \mathrm{dn}\, u}{\partial u} = -\frac{k^2 \,\mathrm{sn}\, u \,\mathrm{cn}\, u}{\mathrm{dn}\, u} = -k^2 \,\mathrm{sn}\, u \,\mathrm{snc}\, u,$$

$$\frac{\partial \log \mathrm{tn}\, u}{\partial u} = \frac{\mathrm{dn}\, u}{\mathrm{cn}^2 u \,\mathrm{tn}\, u} = \frac{\mathrm{dn}\, u}{\mathrm{sn}\, u \,\mathrm{cn}\, u} = \frac{1}{\mathrm{sn}\, u \,\mathrm{snc}\, u}.$$

Differenziirt man diese Formeln noch einmal, so erhält man nach einer leichten Reduction:

$$5.\quad \frac{\partial^2 \log \mathrm{sn}\, u}{\partial u^2} = k^2 \,\mathrm{sn}^2 u - \frac{1}{\mathrm{sn}^2 u},$$

$$6.\quad \frac{\partial^2 \log \mathrm{cn}\, u}{\partial u^2} = -k^2 \,\mathrm{cn}^2 u - \frac{k'^2}{\mathrm{cn}^2 u},$$

$$7.\quad \frac{\partial^2 \log \mathrm{dn}\, u}{\partial u^2} = -\,\mathrm{dn}^2 u + \frac{k'^2}{\mathrm{dn}^2 u},$$

$$8.\quad \frac{\partial^2 \log \mathrm{tn}\, u}{\partial u^2} = k'^2 \,\mathrm{tn}^2 u - \frac{1}{\mathrm{tn}^2 u}.$$

Da $1 - k'^2 - k^2 = 0$ ist, so kann die Formel (6.) auch also geschrieben werden:

$$9.\quad \frac{\partial^2 \log \mathrm{cn}\, u}{\partial u^2} = 1 - \mathrm{dn}^2 u - \frac{\mathrm{dn}^2 u}{\mathrm{cn}^2 u}.$$

Zum Beschlusse entwickeln wir noch das zweite Differenzial-Verhältnifs von $\mathrm{dn}^2 u$. Es ist

$$\frac{\partial\, \mathrm{dn}^2 u}{\partial u} = -2k^2 \,\mathrm{sn}\, u \,\mathrm{cn}\, u \,\mathrm{dn}\, u,$$

also

$$\frac{\partial^2 \mathrm{dn}^2 u}{\partial u^2} = 2k^2 \,\mathrm{dn}^2 u \,\mathrm{sn}^2 u + 2k^4 \,\mathrm{sn}^2 u \,\mathrm{cn}^2 u - 2k^2 \,\mathrm{cn}^2 u \,\mathrm{dn}^2 u.$$

Setzen wir der Kürze wegen $\mathrm{dn}^2 u = t$, also $k^2 \,\mathrm{sn}^2 u = 1 - t$ und $k^2 \,\mathrm{cn}^2 u = t - k'^2$, so ist

$$\frac{\partial^2 t}{\partial u^2} = 2t(1-t) + 2(1-t)(t-k'^2) - 2t(t-k'^2),$$

oder, wenn man nach Potenzen von t ordnet,

$$\frac{\partial^2 t}{\partial u^2} = -2k'^2 + 4(1+k'^2)\,t - 6t^2, \quad \text{für} \quad t = \mathrm{dn}^2 u.$$

Sechster Abschnitt.

Von den Modular-Integralen der ersten Art.

§. 63.

Von den Modular-Integralen der ersten Art und den elliptischen Quadranten überhaupt.

Wenn man eine Modular-Function des Argumentes u oder $a \pm u$ mit ∂u multiplicirt und dann integrirt, so läſst sich das Integral jedesmal als eine Amplitude, nämlich entweder als ein hyperbolischer oder cyklischer Arcus darstellen, und es bieten diese Integrationen, welche im vorigen Abschnitte sehr ausführlich behandelt, und aus der Formel $\mathrm{am}\, u = \int_0 \mathrm{dn}\, u\, \partial u$ hergeleitet wurden, wenig oder gar keine Schwierigkeiten dar. Wenn wir aber das Quadrat einer Modular-Function des Argumentes u mit ∂u multipliciren, und die Integration versuchen, so kann dieselbe durch die bisherigen Hülfsmittel nicht gefunden werden, und es ist also die Wahl einer transcendenten Function erforderlich, welche, weil die Amplituden die Aushülfe versagen, an ihre Stelle treten muſs, und worauf nun die gesuchten Integrale zurückgeführt werden müssen.

Die drei Integrale $\int_0 \mathrm{sn}^2 u.\partial u$, $\int_0 \mathrm{cn}^2 u.\partial u$ und $\int_0 \mathrm{dn}^2 u.\partial u$ können sehr leicht auf einander zurückgeführt werden; wir nennen sie *Modular-Integrale der ersten Art,* und werden demnächst noch einige zu ihnen hinzufügen.

Da das Integral $\mathrm{am}\, u = \int_0 \mathrm{dn}\, u.\partial u$ unter den ihm ähnlichen das einfachste ist, so wählen wir jetzt ebenfalls das Integral $\int_0 \mathrm{dn}^2 u.\partial u$ zur Grundform, worauf die ihm ähnlichen zurückzuführen sind. Da die Rectification der ebenen Ellipsen von diesem Integrale abhängt, und durch dasselbe im Grunde ein Bogen einer Ellipse, wie wir nachher zeigen werden, ausgedrückt wird, so setzen wir:

$$1.\quad \mathrm{el}\, u = \int_0 \mathrm{dn}^2 u.\partial u.$$

Die durch dieses Integral vorgestellte transcendente Function nennen wir *vorzugsweise das cyklische Modular-Integral der ersten Art.*

Wird $u = K$ gesetzt, so haben wir ein bestimmtes Integral, welches wir durch E bezeichnen. Hiernach ist:

$$2. \quad E = \int_0^K \mathrm{dn}^2 u . \partial u.$$

Die Gröfse el$u$ hängt von dem Modul k und dem Argumente u zugleich ab, die Gröfse E hängt lediglich von dem Modul k ab.

Wird statt des Moduls k der conjugirte k' genommen, so dient die Bezeichnung

$$3. \quad \mathrm{el}' u = \int_0 \mathrm{dn}'^2 u . \partial u \text{ und } E' = \int_0^{K'} \mathrm{dn}'^2 u . \partial u.$$

Die Gröfsen E und E' nennen wir aus dem schon angeführten Grunde die den Moduln k und k' zugehörigen und insofern conjugirten *elliptischen Quadranten*, wodurch sie von den conjugirten Modular-Quadranten K und K' hinlänglich unterschieden werden.

Wird die Function el$u$ auf das Argument $K-u$ bezogen, und also $K-u$ für u gesetzt, so setzen wir $\mathrm{elc}\, u = \mathrm{el}(K-u)$, und eben so ist $\mathrm{elc}' u = \mathrm{el}'(K'-u)$.

Setzt man in der Gleichung (1.) $-u$ für u, also $-\partial u$ für u, so hat man $\mathrm{el}(-u) = -\int_0 \mathrm{dn}^2 u . \partial u$ oder $\mathrm{el}(-u) = -\mathrm{el}\, u$.

Da $\mathrm{dn}\, u . \partial u = \partial\, \mathrm{am}\, u$ ist, so kann die Formel (1.) auch also dargestellt werden:

$$4. \quad \mathrm{el}\, u = \int_0 \mathrm{dn}\, u . \partial\, \mathrm{am}\, u.$$

Setzen wir $\mathrm{am}\, u = \varphi$, so ist also

$$\mathrm{el}\, u = \int_0 \partial \varphi . \sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)}.$$

Nehmen wir hierin zuerst den Modul $k = 0$, so ist das Integral $\int_0 \partial \varphi = \varphi$; setzen wir aber $k = 1$, so ist das Integral $\int_0 \partial \varphi . \cos \varphi = \sin \varphi$, daher ist *das Modular-Integral* el$u$ *immer zwischen den Grenzen* φ *und* $\sin \varphi$, *oder also zwischen den Grenzen* am$u$ *und* sn$u$ *enthalten.*

Da immer $\varphi > \sin \varphi$, also auch $\mathrm{am}\, u > \mathrm{sn}\, u$ ist, so verkleinert sich also bei der Vergröfserung des Moduls k die Function el$u$, wenn u ungeändert bleibt. Für den elliptischen Quadranten haben wir die Formel

$$E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \partial \varphi . \sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)}.$$

Der Quadrant E ist also immer zwischen den Grenzen $\frac{\pi}{2}$ und 1 enthalten, und er verkleinert sich also bei der Vergröfserung des Moduls.

§. 64.

Zurückführung aller cyklischen Modular-Integrale der ersten Art auf das einzige el$u$.

Da $\mathrm{dn}^2 u = 1 - k^2.\mathrm{sn}^2 u$ ist, so ist $\int_0 \mathrm{dn}^2 u.\partial u = u - k^2.\int_0 \mathrm{sn}^2 u.\partial u$, und also rückwärts

$$1.\quad \int_0 \mathrm{sn}^2 u.\partial u = \frac{u - \mathrm{el}\, u}{k^2}.$$

Da $\mathrm{dn}^2 u = k'^2 + k^2 \mathrm{cn}^2 u$ ist, so ist $\int_0 \mathrm{dn}^2 u.\partial u = k'^2.u + k^2 \int_0 \mathrm{cn}^2 u.\partial u$, und also

$$2.\quad \int_0 \mathrm{cn}^2 u.\partial u = \frac{\mathrm{el}\, u - k'^2.u}{k^2} = u - \frac{u - \mathrm{el}\, u}{k^2}.$$

Multiplicirt man die Gleichung $\frac{\partial^2 \log \mathrm{dn}\, u}{d u^2} = -\mathrm{dn}^2 u + \frac{k'^2}{\mathrm{dn}^2 u}$ mit ∂u und integrirt man, so erhält man:

$$-k^2 \mathrm{sn}\, u\, \mathrm{snc}\, u = -\mathrm{el}\, u + k'^2.\int_0 \frac{\partial u}{\mathrm{dn}^2 u},$$

oder

$$3.\quad \int_0 \frac{\partial u}{\mathrm{dn}^2 u} = \frac{\mathrm{el}\, u - k^2\, \mathrm{sn}\, u\, \mathrm{snc}\, u}{k'^2}.$$

Es kann diese Formel auch also dargestellt werden: $\int_0^u \mathrm{dnc}^2 u.\partial u = \mathrm{el}\, u - k^2 \mathrm{sn}\, u\, \mathrm{snc}\, u$. Nimmt man nun zwei Argumente u und u' so, daſs $u + u' = K$ ist, so haben wir

$$E = \int_0^K \mathrm{dn}^2 u.\partial u = \int_0^u \mathrm{dn}^2 u.\partial u + \int_u^K \mathrm{dn}^2 u.\partial u$$

oder

$$E = \mathrm{el}\, u + \int_u^K \mathrm{dn}^2 u.\partial u = \mathrm{el}\, u - \int_K^u \mathrm{dn}^2 u.\partial u.$$

Führt man nun die Gröſse $u' = K - u$ ein, so hat man $\partial u = -\partial u'$, und da für $u = K$ ist $u' = 0$, so hat man $E = \mathrm{el}\, u + \int_0^{u'} \mathrm{dnc}^2 u'.\partial u'$. Eben so ist $E = \mathrm{el}\, u' + \int_0^u \mathrm{dnc}^2 u.\partial u$, also $E - \mathrm{elc}\, u = \int_0^u \mathrm{dnc}^2 u.\partial u$, und wird dieser Werth in der obigen Gleichung substituirt, so erhält man die Formel

$$4.\quad E = \mathrm{el}\, u + \mathrm{elc}\, u - k^2 \mathrm{sn}\, u\ \mathrm{snc}\, u,$$

wodurch die Functionen elc$u$ und el$u$ auf einander zurückgeführt sind. Bald nachher werden wir diese Formel aus einer noch allgemeineren herleiten.

Multiplicirt man die Gleichung $\frac{\partial^2 \log \mathrm{cn}\, u}{\partial u^2} = -k^2 \mathrm{cn}^2 u - \frac{k'^2}{\mathrm{cn}^2 u}$ mit ∂u, und integrirt man hierauf, so erhält man zunächst

$$\text{tn}\,u\,\text{dn}\,u = k^2\int_0 \text{cn}^2 u.\partial u + k'^2.\int_0 \frac{\partial u}{\text{cn}^2 u},$$

und substituirt man hierin den Werth aus Formel (2.), so hat man

$$5.\quad \int_0 \frac{\partial u}{\text{cn}^2 u} = \frac{\text{tn}\,u\,\text{dn}\,u - \text{el}\,u + k'^2.u}{k'^2},$$

woraus, wenn $K-u$ für u gesetzt wird, noch folgt

$$\int_0 \frac{\partial u}{\text{cnc}^2 u} = \frac{k'^2.u - \text{el}\,u - \frac{\text{dn}\,u}{\text{tn}\,u}}{k'^2} + \text{const.}$$

Da $\text{tn}^2 u = \frac{1-\text{cn}^2 u}{\text{cn}^2 u} = \frac{1}{\text{cn}^2 u} - 1$ ist, so ist

$$6.\quad \begin{cases} \int_0 \text{tn}^2 u.\partial u = \frac{\text{tn}\,u\,\text{dn}\,u - \text{el}\,u}{k'^2}, \quad \text{und also} \\ \int_0 \frac{\partial u}{\text{tnc}^2 u} = \text{tn}\,u\,\text{dn}\,u - \text{el}\,u. \end{cases}$$

Da der Formel (1.) gemäfs $\text{snc}^2 u.\partial u = -\partial\left(\frac{K-u-\text{elc}\,u}{k^2}\right) = \frac{\partial u + \partial\,\text{elc}\,u}{k^2}$ ist, so erhält man durch die Integration

$$\int_0 \text{snc}^2 u.\partial u = \frac{u+\text{elc}\,u}{k^2} + \text{const.}$$

Setzt man wirklich $u=0$, so hat man $0 = \frac{E}{k^2} + \text{const.}$ und also

$$7.\quad \int_0 \text{snc}^2 u.\partial u = \frac{u-(E-\text{elc}\,u)}{k^2};$$

diese Formel kann mit Benutzung der Formel (4.) auch also geschrieben werden:

$$\int_0 \text{snc}^2 u.\partial u = \frac{u + k^2\,\text{sn}\,u\,\text{snc}\,u - \text{el}\,u}{k^2}.$$

Der Formel (2.) gemäfs ist

$$\text{cnc}^2 u.\partial u = -\partial\left(\frac{\text{elc}\,u - k'^2 K + k'^2.u}{k^2}\right) = \frac{-\partial(\text{elc}\,u) - k'^2\,\partial u}{k^2};$$

daher ist

$$\int_0 \text{cnc}^2 u.\partial u = \text{const.} - \frac{\text{elc}\,u + k'^2.u}{k^2}.$$

Wird wirklich $u=0$ gesetzt, so hat man $0 = \text{const.} - \frac{E}{k^2}$, und also

$$8.\quad \int_0 \text{cnc}^2 u.\partial u = \frac{E - \text{elc}\,u - k'^2.u}{k^2} = \frac{\text{el}\,u - k^2\,\text{sn}\,u\,\text{snc}\,u - k'^2.u}{k^2}.$$

Setzt man in der Gleichung $\frac{\partial^2 \log \text{sn}\,u}{\partial u^2} = k^2\text{sn}^2 u - \frac{1}{\text{sn}^2 u}$ für u an die Stelle $K-u$, so wird sie $\frac{\partial^2 \log \text{snc}\,u}{\partial u^2} = k^2\,\text{snc}^2 u - \frac{1}{\text{snc}^2 u}$. Wird diese Gleichung

mit ∂u multiplicirt und dann integrirt, so erhält man: $\frac{\partial \log \operatorname{snc} u}{\partial u} = \frac{-\operatorname{cnc} u \operatorname{dnc} u}{\operatorname{snc} u} = -\frac{k'^2 \operatorname{tn} u}{\operatorname{dn} u} = k^2 \int_0 \operatorname{snc}^2 u\, \partial u - \int_0 \frac{\partial u}{\operatorname{snc}^2 u}$; daher ist

$$\int_0 \frac{\partial u}{\operatorname{snc}^2 u} = -\operatorname{el} u + k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{snc} u + \frac{k'^2 \operatorname{tn} u}{\operatorname{dn} u} + u;$$

da aber

$$\frac{k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u} + \frac{k'^2 \operatorname{tn} u}{\operatorname{dn} u} = \frac{\operatorname{tn} u}{\operatorname{dn} u}(k^2 \operatorname{cn}^2 u + k'^2) = \operatorname{tn} u \operatorname{dn} u$$

ist, so reducirt sich die Formel auf

$$9. \quad \int_0 \frac{\partial u}{\operatorname{snc}^2 u} = \operatorname{tn} u \operatorname{dn} u + u - \operatorname{el} u.$$

Man gelangt zu eben dieser Formel kürzer auf folgende Art. Nach §. 62. Formel 9. ist $\frac{\partial^2 \log \operatorname{cn} u}{\partial u^2} = 1 - \operatorname{dn}^2 u - \frac{\operatorname{dn}^2 u}{\operatorname{cn}^2 u}$; multiplicirt man diese Formel mit ∂u, und integrirt man, so erhält man auf der Stelle

$$\int_0 \frac{\partial u}{\operatorname{snc}^2 u} = \int_0 \frac{\operatorname{dn}^2 u}{\operatorname{cn}^2 u} \partial u = \operatorname{tn} u \operatorname{dn} u + u - \operatorname{el} u.$$

Die Function $\operatorname{el} u$ wird nicht unschicklich die elliptische Function des Argumentes u genannt.

§. 65.

Allgemeine Relation unter den Functionen $\operatorname{el}(a \pm u)$, $\operatorname{el} a$ und $\operatorname{el} u$. Entwickiung der elliptischen Function eines Trinoms.

Das Modular-Integral $\operatorname{el}(a \pm u)$ des Binoms $a \pm u$ läſst sich aus den Modular-Integralen $\operatorname{el} a$ und $\operatorname{el} u$ der Theile des Binoms zusammensetzen, und zu der Entwickelung der dazu dienenden allgemeinen Formel gehen wir jetzt über. Es ist nach §. 34.

$$\operatorname{dn}(a+u) + \operatorname{dn}(a-u) = \frac{2 \operatorname{dn} a \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u} \quad \text{und}$$

$$\operatorname{dn}(a-u) - \operatorname{dn}(a+u) = \frac{2k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u},$$

werden diese beiden Formeln mit einander multiplicirt, so erhält man

$$\operatorname{dn}^2(a-u) - \operatorname{dn}^2(a+u) = \frac{4k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a . \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u)^2}.$$

Differenziirt man den Bruch $\frac{1}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u}$, so erhält man

$$\partial \left(\frac{1}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u}\right) = \frac{2k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u . \partial u}{(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u)^2}$$

und es kann also die vorige Formel auch also dargestellt werden:

$$\mathrm{dn}^2(a-u).\partial u - \mathrm{dn}^2(a+u).\partial u = \frac{2\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{sn}\,a}\,\partial\left(\frac{1}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u}\right);$$

da ferner $\partial\,\mathrm{el}(a-u) = -\mathrm{dn}^2(a-u).\partial u$ und $\partial\,\mathrm{el}(a+u) = \mathrm{dn}^2(a+u).\partial u$ ist, so erhält man durch Integration

$$\text{const.} - \mathrm{el}(a-u) - \mathrm{el}(a+u) = \frac{2\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{sn}\,a}\cdot\frac{1}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u}.$$

Setzt man, um die Constante zu bestimmen, $u = 0$, so ist

$$\text{const.} - 2.\mathrm{el}\,a = \frac{2\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{sn}\,a}$$

und wird diese Gleichung von der vorigen subtrahirt, so erhält man

$$2\,\mathrm{el}\,a - \mathrm{el}(a-u) - \mathrm{el}(a+u) = \frac{2\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{sn}\,a}.\left(\frac{1}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u} - 1\right),$$

oder, da $\frac{1}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u} - 1 = \frac{k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u}$ ist, so findet man die Gleichung:

$$1.\quad \frac{\mathrm{el}(a+u)+\mathrm{el}(a-u)}{2} = \mathrm{el}\,a - \frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}^2 u}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u},$$

wodurch schon ein Zusammenhang zwischen den drei sich auf denselben Modul k beziehenden Functionen $\mathrm{el}(a+u)$, $\mathrm{el}(a-u)$ und $\mathrm{el}\,a$ ausgedrückt wird.

Beachtet man, daſs $\mathrm{el}(u-a) = \mathrm{el}(-(a-u)) = -\mathrm{el}(a-u)$ ist, und vertauscht man in der vorigen Gleichung a mit u, so erhält man sogleich noch die Formel:

$$2.\quad \frac{\mathrm{el}(a+u)-\mathrm{el}(a-u)}{2} = \mathrm{el}\,u - \frac{k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u},$$

welche man übrigens auch gerade eben so hätte herleiten können, wie die Gleichung (1.) hergeleitet worden ist. Werden die beiden Gleichungen (1.) und (2.) addirt, so erhält man:

$$\mathrm{el}(a+u) = \mathrm{el}\,a + \mathrm{el}\,u - k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,u.\frac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u + \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u},$$

welche Formel noch einfacher also dargestellt werden kann:

$$3.\quad \mathrm{el}(a+u) = \mathrm{el}\,a + \mathrm{el}\,u - k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}(a+u).$$

Setzt man hierin $-u$ für u, so erhält man:

$$4.\quad \mathrm{el}(a-u) = \mathrm{el}\,a - \mathrm{el}\,u + k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}(a-u),$$

und dieselbe Formel findet man auch, wenn man (2.) von (1.) subtrahirt.

Aus den vorigen Formeln leiten wir noch durch Zusammensetzung einige allgemeinere Formeln her. Es ist

$$\mathrm{el}(u+v+a) = \mathrm{el}\,a + \mathrm{el}(u+v) - k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}(u+v)\,\mathrm{sn}(u+v+a) \quad \text{und}$$

$$\mathrm{el}(u+v) = \mathrm{el}\,u + \mathrm{el}\,v - k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}(u+v), \quad \text{also}$$

$$\mathrm{el}(u+v+a)$$
$$= \mathrm{el}\,u + \mathrm{el}\,v + \mathrm{el}\,a - k^2 \mathrm{sn}(u+v).(\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v + \mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}(u+v+a)),$$

und da nach §. 44.

$$\frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v + \mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}(u+v+a)}{\mathrm{sn}(u+a)\,\mathrm{sn}(v+a)} = 1 + k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}(u+v+a)$$

ist, so erhalten wir:

$$5. \quad \mathrm{el}(u+v+a) =$$
$$\mathrm{el}\,u + \mathrm{el}\,v + \mathrm{el}\,a - k^2 \mathrm{sn}(u+a)\,\mathrm{sn}(v+a)\,\mathrm{sn}(u+v)\,(1+k^2 \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}(u+v+a)).$$

Diese Formel ist symmetrisch in Ansehung der drei Elemente u, v und a. Setzen wir $-a$ für a, so verwandelt sie sich in

$$\mathrm{el}(u+v-a) =$$
$$\mathrm{el}\,u + \mathrm{el}\,v - \mathrm{el}\,a - k^2 \mathrm{sn}(u-a)\,\mathrm{sn}(v-a)\,\mathrm{sn}(u+v)\,(1-k^2 \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}(u+v-a)).$$

Wird in dieser Formel $u+a$ für u und $v+a$ für v gesetzt, so verwandelt sie sich in:

$$\mathrm{el}(u+v+a) = \mathrm{el}(u+a) + \mathrm{el}(v+a) - \mathrm{el}\,a$$
$$-k^2 \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}(u+v+2a).(1-k^2 \mathrm{sn}(u+a)\,\mathrm{sn}(v+a)\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}(u+v+a)).$$

Da aber der Schlufsformel des §. 44. gemäfs ist:

$$1-k^2 \mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2(u+v+a) =$$
$$(1-k^2 \mathrm{sn}(u+a)\,\mathrm{sn}(v+a)\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}(u+v+a))(1+k^2 \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}(u+v+a)),$$

ferner

$$u+v+2a = (u+v+a)+a, \quad \text{also}$$
$$\mathrm{sn}(u+v+2a) = \frac{\mathrm{sn}(u+v+a)\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a + \mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}(u+v+a)\,\mathrm{dn}(u+v+a)}{1-k^2 \mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2(u+v+a)}$$

ist, so reducirt sich die vorige Formel auf:

$$6. \quad \mathrm{el}(u+v+a) = \mathrm{el}(u+a) + \mathrm{el}(v+a) - \mathrm{el}\,a$$
$$-\frac{k^2 \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}(u+v+a)\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a + k^2 \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}(u+v+a)\,\mathrm{dn}(u+v+a)}{1+k^2 \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}(u+v+a)}$$

und sie kann noch einfacher also dargestellt werden

$$\mathrm{el}(u+v+a) = \mathrm{el}(u+a) + \mathrm{el}(v+a) - \mathrm{el}\,a - \frac{\partial \log(1+k^2 \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}(u+v+a))}{\partial a},$$

wenn man u und v als constant und a als veränderlich betrachtet.

§. 66.

Setzt man in der Formel (3.) $a = K-u$, so ist $\mathrm{el}(a+u) = \mathrm{el}\,K = E$, und man erhält also

$$5. \quad E = \mathrm{elc}\,u + \mathrm{el}\,u - k^2 \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u,$$

welche dieselbe ist mit der im §. 64. gefundenen Formel (4.).

Setzen wir aber $\frac{K}{2}+u$ für a und $\frac{K}{2}-u$ für u, so erhalten wir

$$6.\quad E = \mathrm{el}\left(\frac{K}{2}+u\right)+\mathrm{el}\left(\frac{K}{2}-u\right)-k^2\,\mathrm{sn}\left(\frac{K}{2}+v\right).\mathrm{sn}\left(\frac{K}{2}-u\right).$$

Wenn wir in der Formel (2.) des §. 37. setzen $a=\frac{K}{2}$ und $b=u$, so erhalten wir

$$k^2\,\mathrm{sn}\left(\frac{K}{2}+u\right).\mathrm{sn}\left(\frac{K}{2}-u\right) = \frac{\mathrm{dn}\,2u-\mathrm{dn}\,K}{\mathrm{cn}\,2u-\mathrm{cn}\,K} = \frac{\mathrm{dn}\,2u-k'}{\mathrm{cn}\,2u},$$

und es ist also auch

$$7.\quad E = \mathrm{el}\left(\frac{K}{2}+u\right)+\mathrm{el}\left(\frac{K}{2}-u\right)-\frac{1}{\mathrm{snc}\,2u}+\frac{k'}{\mathrm{cn}\,2u}.$$

Den Formeln (6.) und (7.) gemäfs kann man die Werthe von $\mathrm{el}\,u$, wenn $u>\frac{K}{2}$ aus solchen Werthen von $\mathrm{el}\,u$, für welche $u<\frac{K}{2}$ ist, herleiten.

Setzt man in der Formel (6.) $u=0$, so erhält man

$$8.\quad \mathrm{el}\,\frac{K}{2} = \frac{E}{2}+\frac{1-k'}{2}.$$

Wenn man in der Formel (5.) setzt $-u$ für u, so erhält man:

$$E = \mathrm{el}(K+u)-\mathrm{el}\,u+k^2\,\mathrm{sn}\,u\;\mathrm{snc}\,u,$$

und wird diese Gleichung zu (5.) addirt, so bekommt man

$$9.\quad \mathrm{el}(K+u)+\mathrm{el}(K-u) = 2E.$$

Will man also die Werthe von $\mathrm{el}\,u$ in eine Tabelle bringen, so kann man sich auf die Ausdehnung dieser Tafel zwischen den Grenzen $u=0$ und $u=K$ beschränken, weil die Werthe von $\mathrm{el}\,u$, wenn $u>K$ ist, leicht aus den in den Tafeln enthaltenen Werthen zusammengesetzt werden können.

Setzt man in der vorigen Formel $K-u$ für u, so wird sie

$$\mathrm{el}(2K-u)+\mathrm{el}\,u = 2E,$$

und wird u entgegengesetzt genommen, so hat man

$$\mathrm{el}(2K+u) = \mathrm{el}\,u+2E.$$

Wird also das Argument u um $2K$ vergröfsert, so vergröfsert sich die Function $\mathrm{el}\,u$ jedesmal um $2E$.

Eine unmittelbare Folge von der so eben bewiesenen ist die Formel

$$10.\quad \mathrm{el}(u+2mK) = \mathrm{el}\,u+2mE, \quad \text{oder} \quad \mathrm{el}(u-2mK) = \mathrm{el}\,u-2mE,$$

worin unter m eine beliebige ganze Zahl verstanden wird.

§. 67.

Entwicklung von $\mathrm{el}(K\pm ui)$ und $\mathrm{el}(u\pm iK')$.

Der Ausdruck $E-\mathrm{elc}\,u$ ist $=0$ für $u=0$, daher wird die Function $\frac{E-\mathrm{elc}(ui)}{i}$ wieder reel sein; setzen wir $y=\frac{E-\mathrm{elc}(ui)}{i}$, so erhalten wir durchs Differenziiren $\partial y=\mathrm{dnc}^2(ui).\partial u=k'^2.\mathrm{snc}'^2 u.\partial u$, und es ist also, wenn wir nun wieder so integriren, daſs das Integral auf beiden Seiten für $u=0$ verschwindet,

$$y=k'^2.\int_0 \mathrm{snc}'^2 u.\partial u.$$

Vertauschen wir aber in der Formel (7.) des §. 64. den Modul k mit k', so haben wir

$$\int_0 \mathrm{snc}'^2 u.\partial u=\frac{u-(E'-\mathrm{elc}'u)}{k'^2}=\frac{u+k'^2\,\mathrm{sn}'u\,\mathrm{snc}'u-\mathrm{el}'u}{k'^2},$$

und wird dieser Werth substituirt, so entsteht die Formel:

$$\frac{E-\mathrm{elc}(ui)}{i}=u-(E'-\mathrm{elc}'u)=u+k'^2\mathrm{sn}'u\,\mathrm{snc}'u-\mathrm{el}'u,$$

oder

$$11.\ \begin{cases}\mathrm{el}(K-ui)=E-i(u+\mathrm{elc}'u-E')=E-i(u+k'^2\mathrm{sn}'u\,\mathrm{snc}'u-\mathrm{el}'u)\\ \mathrm{el}(K+ui)=E+i(u+\mathrm{elc}'u-E')=E+i(u+k'^2\mathrm{sn}'u\,\mathrm{snc}'u-\mathrm{el}'u).\end{cases}$$

Aus dieser Function können wir bequem den Werth von $\mathrm{el}\,u$ herleiten, wenn $u=K+iK'$ gesetzt wird, denn zu diesem Ende brauchen wir in der Formel (11.) nur $u=K'$ zu setzen; da dann aber $\mathrm{elc}'u=0$ wird, so erhalten wir:

$$12.\quad \mathrm{el}(K-iK')=E-i(K'-E') \text{ und } \mathrm{el}(K+iK')=E+i(K'-E').$$

Wird auch in der Formel (5.) des §. 66. gesetzt ui für u, so erhält man:

$$E-\mathrm{elc}(ui)=\mathrm{el}(ui)-k^2\mathrm{sn}(ui)\,\mathrm{snc}(ui),$$

und es ist also:

$$13.\quad \mathrm{el}(u)i-k^2\mathrm{sn}(ui)\,\mathrm{snc}(ui)=i(u-(E'-\mathrm{elc}'u))$$
$$=i(u+k'^2\mathrm{sn}'u\,\mathrm{snc}'u-\mathrm{el}'u).$$

Setzen wir jetzt $y=\mathrm{el}(u+iK')$, so erhalten wir durchs Differenziiren $\partial y=\mathrm{dn}^2(u+iK').\partial u$, und da $\mathrm{dn}(u+iK')=\frac{-i}{\mathrm{tn}\,u}$ nach §. 28. ist, so ist also $\partial y=-\frac{\partial u}{\mathrm{tn}^2 u}$, folglich $y=\mathrm{const.}+\int\frac{-\partial u}{\mathrm{tn}^2 u}$. Setzen wir in der zweiten von den Formeln (6.) des §. 64. aber $K-u$ für u, so erhalten wir $\frac{-\partial u}{\mathrm{tn}^2 u}=\partial(\mathrm{tnc}\,u\,\mathrm{dnc}\,u-\mathrm{elc}\,u)$, und es ist also

$$\mathrm{el}(u+iK')=\mathrm{tnc}\,u\,\mathrm{dnc}\,u-\mathrm{elc}\,u+\mathrm{const.}$$

Die Constante können wir nun nicht dadurch bestimmen, dafs wir $u=0$ setzen, weil $\mathrm{tnc}\,0=\mathrm{tn}\,K=\frac{1}{0}$ ist, wohl aber dadurch, dafs wir $u=K$ setzen; der obigen Formel (12.) gemäfs erhalten wir nun

$$\mathrm{el}(K+iK') = E+i(K'-E') = \text{const.},$$

und es ist also

$$14.\quad \begin{cases} \mathrm{el}(u+iK') = E-\mathrm{elc}\,u+\mathrm{tnc}\,u\,\mathrm{dnc}\,u+i(K'-E'), \\ \mathrm{el}(u-iK') = E-\mathrm{elc}\,u+\mathrm{tnc}\,u\,\mathrm{dnc}\,u-i(K'-E'). \end{cases}$$

Es lassen sich diese Formeln noch etwas einfacher darstellen: da nämlich

$$E-\mathrm{elc}\,u = \mathrm{el}\,u-\frac{k^2\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u},\quad \mathrm{tnc}\,u\,\mathrm{dnc}\,u = \frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}$$

und

$$\frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}-\frac{k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u} = \frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}\left(\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}\,u}\right) = \frac{\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{sn}\,u} = \frac{\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{tn}\,u}$$

ist, so erhalten wir:

$$15.\quad \begin{cases} \mathrm{el}(u+iK') = \mathrm{el}\,u+\frac{\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{tn}\,u}+i(K'-E'), \\ \mathrm{el}(u-iK') = \mathrm{el}\,u+\frac{\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{tn}\,u}-i(K'-E'). \end{cases}$$

Setzen wir in dieser Formel $u=0$, so erhalten wir für $\mathrm{el}(iK')$ einen Ausdruck, dessen reeller Theil unendlich ist; dasselbe findet Statt, wenn u irgend ein Vielfaches von $2K$ ist, daher ist überhaupt

$$16.\quad \mathrm{el}(2mK\pm iK') = \tfrac{1}{0}.$$

Setzen wir noch einmal $u+iK'$ für u, so erhalten wir zunächst

$$\mathrm{el}(u+2iK') = \mathrm{el}\,u+\frac{\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{tn}\,u}+\frac{\mathrm{dn}\,(u+iK')}{\mathrm{tn}\,(u+iK')}+2i(K'-E').$$

Da aber nach §. 28. ist $\frac{\mathrm{dn}(u+iK')}{\mathrm{tn}(u+iK')} = -\frac{\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{tn}\,u}$ ist, so reducirt sich die Formel auf

$$17.\quad \mathrm{el}\,(u+2iK') = \mathrm{el}\,u+2i(K'-E') \text{ und } \mathrm{el}\,(u-2iK') = \mathrm{el}\,u-2i(K'-E').$$

Wird also u *um* $2iK'$ *vergröfsert oder vermindert, so vermehrt oder vermindert sich* $\mathrm{el}\,u$ *um* $2i(K'-E')$. Aus diesen Formeln leiten wir sofort die allgemeinere

$$\mathrm{el}\,(u+2niK') = \mathrm{el}\,u+2ni(K'-E'),$$

oder, wenn man noch $u+2mK$ für u setzt, die folgende her

$$18.\quad \mathrm{el}\,(u+2mK+2niK') = \mathrm{el}\,u+2mE+2ni(K'-E'),$$

in welcher m und n beliebige positive oder negative ganze Zahlen sind.

§. 68.

Zurückführung des Modular-Integrals el u mit einem der Modul $\frac{1}{k}$ und $\frac{ik}{k'}$ auf eine solche Function mit dem Modul k.

Bezeichnet $\text{el}\left(ku, \frac{1}{k}\right)$ das Modular-Integral bezogen auf das Argument ku und den Modul $\frac{1}{k}$, so ist

$$\text{el}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = k.\int_0 \text{dn}^2\left(ku, \frac{1}{k}\right).\partial u.$$

Da aber nach §. 30. ist $\text{dn}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = \text{cn}\, u$, so erhalten wir $\text{el}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = k.\int_0 \text{cn}^2 u \partial u$, und wird hierin der Werth aus Formel (2.) des §. 64. substituirt, so erhält man:

$$1. \quad \text{el}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = \frac{\text{el}\, u - k'^2 u}{k}.$$

Wollen wir den elliptischen Quadranten für den Modul $\frac{1}{k}$ erhalten, so haben wir in dieser Formel nur für ku den zum Modul $\frac{1}{k}$ gehörigen Modular-Quadranten $k(K-iK')$, zu substituiren. Ist aber $ku = k(K-iK')$, so ist $u = K-iK'$; daher ist der gesuchte elliptische Quadrant

$$\frac{\text{el}(K-iK') - k'^2(K-iK')}{k}.$$

Da aber $\text{el}(K-iK') = E-i(K'-E')$ ist, so erhalten wir

$$2. \quad \frac{E-k'^2 K + i(E'-k^2 K')}{k}$$

zum Ausdrucke des elliptischen Quadranten, welcher zum Modul $\frac{1}{k}$ *gehört.*

Der Ausdruck $\text{el}\left(k'u, \frac{ik}{k'}\right)$ bezeichne das Modular-Integral bezogen auf das Argument $k'u$ und auf den Modul $\frac{ik}{k'}$; dann ist $\text{el}\left(k'u, \frac{ik}{k'}\right) = k'\int_0 \text{dn}^2\left(k'u, \frac{ik}{k'}\right).\partial u = k'.\int_0 \frac{\partial u}{\text{dn}^2 u}$, und also nach §. 64.

$$3. \quad \text{el}\left(k'u, \frac{ik}{k'}\right) = \frac{\text{el}\, u - k^2 \,\text{sn}\, u\, \text{snc}\, u}{k'} = \frac{E - \text{elc}\, u}{k'}.$$

Den elliptischen Quadranten für den Modul $\frac{ik}{k'}$ erhalten wir, wenn wir in dieser Formel nur $k'.u = k'.K$, also $u = K$ setzen; daher ist dieser elliptische Quadrant für den Modul $\frac{ik}{k'}$ gleich

$$4. \quad \frac{E}{k'}.$$

Wir fassen die gefundenen Resultate in die beiden folgenden Lehrsätze zusammen:

I. Wird statt des Moduls k gesetzt $\frac{1}{k}$ $\left(\text{also } \frac{ik'}{k} \text{ für } k\right)$, so verwandelt sich

$$E \text{ in } \frac{E - k'^2 K + i(E' - k^2.K')}{k}, \quad E' \text{ in } \frac{E'}{k}, \text{ also}$$

$$K' - E' \text{ in } \frac{k^2 K' - E'}{k} \quad \text{und} \quad \frac{E}{K' - E'} \text{ in } \frac{E - k'^2 K}{k^2 K' - E'} - i,$$

und wird außerdem noch gesetzt ku für u, so verwandelt sich:

$$\text{el}\, u \text{ in } \frac{\text{el}\, u - k'^2.u}{k}.$$

II. Wird $\frac{ik}{k'}$ statt des Moduls k $\left(\text{also } \frac{1}{k'} \text{ statt } k'\right)$ gesetzt, so verwandelt sich

$$E \text{ in } \frac{E}{k'}, \quad \text{ferner } E' \text{ in } \frac{E' - k^2 K' + i(E - k'^2 K)}{k'}, \text{ also}$$

$$K' - E' \text{ in } \frac{K' - E' - iE}{k'} \text{*)} \text{ und } \frac{K' - E'}{E} \text{ in } \frac{K' - E'}{E} - i;$$

und setzt man außerdem noch $k'u$ für u, so verwandelt sich

$$\text{el}\, u \text{ in } \frac{E - \text{elc}\, u}{k'} \quad \text{und} \quad E - \text{elc}\, u \text{ in } \frac{\text{el}\, u}{k'}.$$

Diese Lehrsätze sind also als ein Nachtrag zu denen des §. 30. und §. 31. anzusehen.

§. 69.

Entwicklung von $\text{el}\left(\frac{K}{2} \pm \frac{iK'}{2}\right)$ und $\text{el}\left(u \pm \frac{iK'}{2}\right)$.

Der Formel $\text{el}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = \frac{\text{el}\, u - k'^2 u}{k}$ gemäß ist auch rückwärts

$$\text{el}\, u = k.\text{el}\left(ku, \frac{1}{k}\right) + k'^2 u, \text{ und also zunächst}$$

$$\text{el}\left(\frac{K - iK'}{2}\right) = k.\text{el}\left[k\left(\frac{K - iK'}{2}\right), \frac{1}{k}\right] + k'^2\left(\frac{K - iK'}{2}\right).$$

Da nach Formel (8.) des §. 66. ist $\text{el}\left(\frac{K}{2}\right) = \frac{E}{2} + \frac{1 - k'}{2}$, so verwandelt sich diese Formel, wenn in ihr $\frac{1}{k}$ statt des Moduls k gesetzt wird, in:

$$\text{el}\left(\frac{k(K - iK')}{2}, \frac{1}{k}\right) = \frac{E - k'^2 K + i(E' - k^2 K')}{2k} + \frac{k - ik'}{2k},$$

*) Es verwandelt sich nämlich K' in $k'.(K' - iK)$, und hiervon muſs der Ausdruck, in welchen E' übergeht, subtrahirt werden.

und wird dieser Werth in der früheren Gleichung substituirt, so erhält man:

$$\mathrm{el}\left(\frac{K}{2}-\frac{iK'}{2}\right)=\frac{E-k'^2K+i(E'-k^2K')}{2}+\frac{k'^2(K-iK')}{2}+\frac{k-ik'}{2}.$$

Dieser Ausdruck reducirt sich auf den einfachern

$$1.\quad\begin{cases}\mathrm{el}\left(\frac{K}{2}-\frac{iK'}{2}\right)=\frac{E-i(K'-E')}{2}+\frac{k-ik'}{2}, & \text{eben so ist}\\ \mathrm{el}\left(\frac{K}{2}+\frac{iK'}{2}\right)=\frac{E+i(K'-E')}{2}+\frac{k+ik'}{2}.\end{cases}$$

Man kann zu diesen Formeln auch auf folgende Art gelangen. Setzt man in der Formel (3.) des §. 65. das Argument $a=u$, so erhält man:

$$\mathrm{el}\,u=\frac{\mathrm{el}(2u)}{2}+\frac{k^2\,\mathrm{sn}^2u\,\mathrm{sn}\,2u}{2}.$$

Da ferner nach §. 32. *a.* ist $k^2\,\mathrm{sn}^2u=\frac{1-\mathrm{dn}\,2u}{1+\mathrm{cn}\,2u}$, so verwandelt sich diese Formel in

$$\mathrm{el}\,u=\frac{\mathrm{el}(2u)}{2}+\frac{1-\mathrm{dn}\,2u}{2}\cdot\sqrt{\frac{1-\mathrm{cn}\,2u}{1+\mathrm{cn}\,2u}}$$

oder

$$2.\quad \mathrm{el}\left(\frac{u}{2}\right)=\frac{\mathrm{el}\,u}{2}+\frac{1-\mathrm{dn}\,u}{2}\sqrt{\frac{1-\mathrm{cn}\,u}{1+\mathrm{cn}\,u}}.$$

Setzt man in dieser Formel $u=K+iK'$, so ist $\mathrm{dn}\,u=0$, $\mathrm{cn}\,u=\frac{-ik'}{k}$ und $\mathrm{sn}\,u=\frac{1}{k}$, und da $\sqrt{\frac{1-\mathrm{cn}\,u}{1+\mathrm{cn}\,u}}=\frac{1-\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{sn}\,u}=k+ik'$ ist, so erhalten wir

$$\mathrm{el}\left(\frac{K+iK'}{2}\right)=\frac{E+i(K'-E')}{2}+\frac{k+ik'}{2},$$

wenn der Werth von $\mathrm{el}\,u$ nach Formel (12.) im §. 67. substituirt wird, und also dasselbe Resultat, wie vorhin.

Setzen wir in der Formel (2.) $u+iK'$ für u, so erhalten wir, da dann $\mathrm{dn}\,u$ sich in $\frac{-i}{\mathrm{tn}\,u}$, $\mathrm{sn}\,u$ in $\frac{1}{k\,\mathrm{sn}\,u}$ und $\mathrm{cn}\,u$ in $\frac{-i\,\mathrm{dn}\,u}{k\,\mathrm{sn}\,u}$ verwandelt, für $\frac{(1-\mathrm{dn}\,u)(1-\mathrm{cn}\,u)}{\mathrm{sn}\,u}$ den Ausdruck

$$\left(\frac{\mathrm{sn}\,u+i\,\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{sn}\,u}\right).(k\,\mathrm{sn}\,u+i\,\mathrm{dn}\,u)=\frac{k\,\mathrm{sn}^2u-\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u+i\,\mathrm{sn}\,u(\mathrm{dn}\,u+k\,\mathrm{cn}\,u)}{\mathrm{sn}\,u}$$
$$=k\,\mathrm{sn}\,u-\frac{\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{tn}\,u}+i(\mathrm{dn}\,u+k\,\mathrm{cn}\,u),$$

und da der Formel (15.) im §. 67. gemäfs

$$\mathrm{el}(u+iK')=\mathrm{el}\,u+\frac{\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{tn}\,u}+i(K'-E')$$

ist, so erhalten wir also

$$\mathrm{el}\left(\frac{u}{2}+\frac{iK'}{2}\right)=\frac{\mathrm{el}\,u}{2}+\frac{k\,\mathrm{sn}\,u}{2}+i\,\frac{(K'-E'+\mathrm{dn}\,u+k\,\mathrm{cn}\,u)}{2},$$

oder auch

$$3.\quad \begin{cases} \mathrm{el}\left(u+\frac{iK'}{2}\right)=\frac{\mathrm{el}(2u)}{2}+\frac{k\,\mathrm{sn}(2u)}{2}+\frac{i(K'-E'+\mathrm{dn}\,2u+k\,\mathrm{cn}\,2u)}{2}, \\ \mathrm{el}\left(u-\frac{iK'}{2}\right)=\frac{\mathrm{el}(2u)}{2}+\frac{k\,\mathrm{sn}(2u)}{2}-\frac{i(K'-E'+\mathrm{dn}\,2u+k\,\mathrm{cn}\,2u)}{2}. \end{cases}$$

Setzt man in dieser Formel $u=0$, so erhält man:

$$4.\quad \mathrm{el}\left(\frac{iK'}{2}\right)=\frac{i(K'-E'+1+k)}{2},$$

und dieses particuläre Resultat konnte aus der Formel (2.), indem man $u=iK'$ setzte, nicht unmittelbar hergeleitet werden, weil dann $\mathrm{el}\,u$ unendlich wird.

Setzen wir in den Formeln (3.) $u=K$, so wird $\mathrm{el}\,2u=2E$, $\mathrm{sn}\,2u=0$, $\mathrm{cn}\,2u=-1$ und $\mathrm{dn}\,2u=1$, daher haben wir

$$5.\quad \mathrm{el}\left(K\pm\frac{iK'}{2}\right)=E\pm\frac{i(K'-E')}{2}\pm\frac{(1-k)i}{2}.$$

§. 70.

Von den Werthen der Function $\mathfrak{El}\,u=\frac{\mathrm{el}(ui)}{i}$.

Setzt man in der Gleichung $\mathrm{el}\,u=\int_0 \mathrm{dn}^2 u.\partial u$ jetzt ui für u, so erhält man: $\mathrm{el}(ui)=i.\int_0 \mathfrak{Dn}^2 u.\partial u$. Das Integral

$$1.\quad \mathfrak{El}\,u=\int_0 \mathfrak{Dn}^2 u.\,\partial u$$

ist das hyperbolische Modular-Integral der ersten Art, und auf dasselbe können die Integrale $\int \mathfrak{Sn}^2 u\,\partial u$, $\int \mathfrak{Cn}^2 u\,\partial u$, $\int \mathfrak{Tn}^2 u\,\partial u$, $\int\frac{\partial u}{\mathfrak{Sn}^2 u}$, $\int\frac{\partial u}{\mathfrak{Cn}^2 u}$, $\int\frac{\partial u}{\mathfrak{Dn}^2 u}$ und $\int\frac{\partial u}{\mathfrak{Tn}^2 u}$ in ähnlicher Weise zurückgeführt werden, wie dieses an den cyklischen Modular-Integralen in Beziehung auf die Function $\mathrm{el}\,u$ gezeigt worden ist. So wie

$$2.\quad \frac{\mathrm{el}(ui)}{i}=\mathfrak{El}\,u \text{ ist, so ist auch umgekehrt } \frac{\mathfrak{El}(ui)}{i}=\mathrm{el}\,u.$$

Die Integrale $\mathfrak{El}\,u$ und $\mathrm{el}\,u$ können auch also dargestellt werden:

$$3.\quad \mathfrak{El}\,u=\int_0 \frac{\mathrm{dn}'^2 u}{\mathrm{cn}'^2 u}\partial u=\int_0\frac{\partial u}{\mathrm{snc}'^2 u},\quad \mathrm{el}\,u=\int_0\frac{\mathfrak{Dn}'^2 u}{\mathfrak{Cn}'^2 u}\partial u.$$

Wird statt des Moduls k der Modul k' gesetzt, so schreiben wir $\mathfrak{El}'u$ für $\mathfrak{El}\,u$. Setzt man in der Gleichung (3.) des §. 65. ai für a und ui für u, so verwandelt sie sich sofort in:

$$4.\quad \begin{cases} \mathfrak{El}(a+u) = \mathfrak{El}a + \mathfrak{El}u + k^2.\mathfrak{Sn}a\,\mathfrak{Sn}u\,\mathfrak{Sn}(a+u) \quad \text{und} \\ \mathfrak{El}(a-u) = \mathfrak{El}a - \mathfrak{El}u - k^2\mathfrak{Sn}a\,\mathfrak{Sn}u\,\mathfrak{Sn}(a-u). \end{cases}$$

Der Gleichung am Schlusse des §. 64. gemäfs ist:

$$5.\quad \begin{cases} \mathfrak{El}'u + \operatorname{el} u = u + \operatorname{tn} u \operatorname{dn} u = u + \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\operatorname{am} 2u \quad \text{und} \\ \mathfrak{El}\,u + \operatorname{el}'u = u + \operatorname{tn}'u\operatorname{dn}'u = u + \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\operatorname{am}'2u \\ \qquad\qquad = u + \mathfrak{Tn}u\,\mathfrak{Dn}u = u + \mathfrak{Tang}\tfrac{1}{2}\mathfrak{Am}\,2u. \end{cases}$$

Also

$$\frac{\operatorname{el}'(ui)}{i} + \operatorname{el} u = u + \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{snc} u} \quad \text{oder} \quad \frac{\operatorname{el}(ui)}{i} + \operatorname{el}'u = u + \frac{\operatorname{sn}'u}{\operatorname{snc}'u}.$$

Setzt man in der letzten Formel $u = K'$, also $\operatorname{am}'2u = \pi$, so erhält man:

$$6.\quad \mathfrak{El}K' = K' - E' + \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\pi = \tfrac{1}{0}.$$

Die Function $\mathfrak{El}u$ wächst also zwischen den Grenzen $u = 0$ und $u = K'$ sehr rasch und zwar immer mehr beschleunigt, wenn sich u der Grenze K' nähert. Setzt man $K' - u$ für u, so erhält man, da $\operatorname{am}'(2K' - 2u) = \pi - \operatorname{am}'2u$ ist, die Formel:

$$7.\quad \mathfrak{El}(K'-u) + \operatorname{el}'(K'-u) = K' - u + \frac{1}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\operatorname{am}'2u},$$

welche sich, wenn $-u$ für u genommen wird, verwandelt in

$$8.\quad \mathfrak{El}(K'+u) = K' + u - \operatorname{el}'(K'+u) - \frac{1}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\operatorname{am}'2u},$$

und eine bemerkenswerthe Eigenschaft der Function $\mathfrak{El}u$ erkennen läfst. Nimmt man nämlich u sehr klein, so hat das letzte Glied dieser Formel einen sehr grofsen Werth, und da dasselbe negativ ist, so erhellet, dafs auch $\mathfrak{El}(K'+u)$ selbst negativ ist. Setzt man $u = K'$, so wird das Glied $\frac{1}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\operatorname{am}'2u} = 0$ und man erhält also:

$$9.\quad \mathfrak{El}(2K') = 2K' - 2E' = 2(K' - E').$$

Da nun $E' < \frac{1}{2}\pi$ und $K' > \frac{1}{2}\pi$, folglich $K' > E'$ ist, so ist also $\mathfrak{El}(2K')$ positiv. Hiernach ist also die Function $\mathfrak{El}u$ zwischen den Grenzen $u = K'$ und $u = 2K'$ zuerst negativ und nachher wieder positiv, und eine Folge hiervon ist, dafs es zwischen eben diesen Grenzen einen Werth u giebt, für welchen $\mathfrak{El}u = 0$ ist. Da nun $\operatorname{el}(ui) = i.\mathfrak{El}u$ ist, *so ist die Function* $\operatorname{el}(ui) = 0$ *nicht blofs für* $u = 0$, *sondern auch für einen zwischen den Grenzen* $u = K'$ *und* $u = 2K'$ *enthaltenen Werth von* u, *welcher unfehlbar von dem Modul* k *abhangen wird.*

Dasselbe läfst sich auch aus der ersten von den Gleichungen (15.) im §. 67. herleiten, wenn man darin ui für u setzt. Aus den Gleichun-

gen (7.) und (8.) erhält man durch Addition die Formel:

$$\mathfrak{El}(K'-u)+\mathfrak{El}(K'+u)+\mathrm{el}'(K'-u)+\mathrm{el}'(K'+u)=2K',$$

welche sich, da $\mathrm{el}'(K'-u)+\mathrm{el}'(K'+u)=2E'$ ist, zusammenzieht auf

$$10.\quad \mathfrak{El}(K'+u)+\mathfrak{El}(K'-u) = 2(K'-E').$$

Multiplicirt man die Gleichung

$$\mathrm{el}(u+2nK-2miK')=\mathrm{el}\,u+2nE-2mi(K'-E')$$

mit i, so erhält man

$$\mathfrak{El}(ui+2mK'+2niK) = \mathfrak{El}(ui)+2m(K'-E')+2niE,$$

und setzt man hierin $\frac{u}{i}$ für u, so wird sie

$$11.\quad \mathfrak{El}(u+2mK'+2niK) = \mathfrak{El}\,u+2m(K'-E')+2niE,$$

und also für $n=0$ insbesondere

$$\mathfrak{El}(u+2mK') = \mathfrak{El}\,u+2m(K'-E').$$

Zusatz. So wie es zwischen den Grenzen K' und $2K'$ einen Werth von u giebt, für welchen $\mathrm{el}(ui)=0$ ist, so giebt es zwischen den Grenzen $3K'$ und $4K'$ einen zweiten, zwischen $5K'$ und $6K'$ einen dritten, zwischen $7K'$ und $8K'$ einen vierten u. s. w. Werth von u, für welchen $\mathrm{el}(ui)=0$ ist. Diese auf einander folgenden Werthe von u, für welche $\mathrm{el}(ui)=0$ ist, und deren Anzahl unendlich ist, bilden aber keine arithmetische Progression, sondern befolgen ein anderes sehr verwickeltes Gesetz.

§. 71.

Reduction der Integrale von der Form $\int x^n.\partial u$, in welcher x eine Modular-Function des Argumentes u ist, auf Modular-Integrale und auf Amplituden.

Es sei der Kürze wegen $R=a+2bx^2+cx^4$, und durch $[n]$ werde bezeichnet das Integral $\int\frac{x^n.\partial x}{\sqrt{R}}$. Differenziirt man den Ausdruck $y=x^{n-3}.\sqrt{R}$, so erhält man zunächst:

$$\partial y = \left((n-3)x^{n-4}.\sqrt{R}+\frac{x^{n-3}.\frac{\partial R}{2\partial x}}{\sqrt{R}}\right)\partial x.$$

oder da $\frac{\partial R}{\partial x}=4bx+4cx^3$ ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{(n-3)(ax^{n-4}+2bx^{n-2}+cx^n)+2bx^{n-2}+2cx^n}{\sqrt{R}}.$$

Wird dieses Differenzial im Zähler nach Potenzen von x geordnet, so entsteht:

$$\partial y = \frac{(n-3)\,a x^{n-4}.\partial x + (n-2).2b.x^{n-2}\partial x + (n-1)\,c x^n \partial x}{\sqrt{R}},$$

und wenn man gliedweise integrirt, so erhält man die Reductionsformel:

$$x^{n-3}.\sqrt{R} = (n-3)a.[n-4] + 2(n-2)b.[n-2] + (n-1)c.[n].$$

Ist, wie wir hier voraussetzen, n eine *positive* ganze Zahl, so wird das Integral $[n] = \int \frac{x^n.\partial x}{\sqrt{R}}$ durch diese Formel auf die beiden Integrale $[n-2]$ und $[n-4]$ zurückgeführt.

Ist nun $x = \operatorname{sn} u$, so ist $\partial u = \frac{\partial x}{\sqrt{(1-(1+k^2)x^2+k^2x^4)}}$ nach §. 8. Da nun $1-(1+k^2)x^2+k^2x^4 = \operatorname{cn}^2 u \operatorname{dn}^2 u = R = a+2bx^2+cx^4$ ist, so hat man $a=1$, $2b=-(1+k^2)$ und $c=k^2$; daher verwandelt sich die allgemeine Formel in

$$1.\quad (n-1)k^2.\int \operatorname{sn}^n u\,\partial u$$
$$= (n-2)(1+k^2).\int \operatorname{sn}^{n-2} u.\partial u - (n-3).\int \operatorname{sn}^{n-4} u.\partial u + \operatorname{cn} u.\operatorname{dn} u \operatorname{sn}^{n-3} u.$$

Setzt man $x = \operatorname{cn} u$, so ist $\partial x = -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u.\partial u$, also $-\partial u = \frac{\partial x}{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u} = \frac{\partial x}{\sqrt{(k'^2+(k^2-k'^2)x^2-k^2x^4)}}$; folglich

$$\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u = \sqrt{R} = \sqrt{(a+2bx^2+cx^4)},$$

und also $a=k'^2$, $2b=k^2-k'^2$, $c=-k^2$. Werden diese Werthe in der allgemeinen Formel substituirt, so verwandelt sie sich in

$$2.\quad (n-1)k^2.\int \operatorname{cn}^n u\,\partial u$$
$$= (n-2)(k^2-k'^2).\int \operatorname{cn}^{n-2} u.\partial u + (n-3)k'^2.\int \operatorname{cn}^{n-4} u.\partial u + \operatorname{sn} u.\operatorname{dn} u.\operatorname{cn}^{n-3} u.$$

Wird $x = \operatorname{dn} u$ gesetzt, also $\partial x = -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u.\partial u$, so ist $-\partial u = \frac{\partial x}{k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u} = \frac{\partial x}{\sqrt{(-k'^2+(1+k'^2)x^2-x^4)}}$, also $\sqrt{R} = k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u$, ferner $a=-k'^2$, $2b=1+k'^2$, $c=-1$; die Reductions-Formel ist also

$$3.\quad (n-1).\int \operatorname{dn}^n u.\partial u$$
$$= (n-2)(1+k'^2).\int \operatorname{dn}^{n-2} u.\partial u - (n-3)k'^2.\int \operatorname{dn}^{n-4} u.\partial u + k^2 \operatorname{sn} u.\operatorname{cn} u.\operatorname{dn}^{n-3} u.$$

Setzt man in der Formel (1.) k' für k, ferner ui für u, so verwandelt sie sich sofort in

$$4.\quad (n-1)k'^2.\int \operatorname{tn}^n u.\partial u$$
$$= -(n-2)(1+k'^2).\int \operatorname{tn}^{n-2} u.\partial u - (n-3).\int \operatorname{tn}^{n-4} u.\partial u + \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn}^2 u} \operatorname{tn}^{n-3} u.$$

Ist nun n in diesen Gleichungen eine gerade Zahl, so werden die auf der linken Seite in diesen Gleichungen stehenden Integrale durch wie-

derholte Anwendung derselben Reductions-Formeln zuletzt zurückgebracht auf solche zwei Integrale, in welchen der Exponent $n=0$ und $=2$ ist. Für $n=0$ hat man aber das Integral $\int \partial u = u$ und für $n=2$ kann das Integral dem §. 64. gemäfs immer auf das Modular-Integral el u zurückgebracht werden. Ist n aber eine ungerade Zahl, so können die Integrale sämmtlich auf solche zurückgebracht werden, für welche $n=1$ und $n=3$ ist. Der Exponent $n=3$ kann aber noch auf den Exponenten $n=1$ zurückgebracht werden; denn man kann die Gleichungen (1.) bis (4.) im §. 62. multipliciren mit ∂u, und gliederweise integriren, wodurch man erhält:

$$2k^2.\int \text{sn}^3 u.\partial u = (1+k^2)\int \text{sn}\, u.\partial u + \text{cn}\, u\ \text{dn}\, u,$$

$$2k^2.\int \text{cn}^3 u.\partial u = (k^2-k'^2).\int \text{cn}\, u.\partial u + \text{sn}\, u\ \text{dn}\, u,$$

$$2.\int \text{dn}^3 u.\partial u = (1+k'^2).\int \text{dn}\, u.\partial u + k^2\, \text{sn}\, u\ \text{cn}\, u,$$

$$2k'^2.\int \text{tn}^3 u.\partial u = -(1+k'^2).\int \text{tn}\, u.\partial u + \frac{\text{dn}\, u}{\text{cn}^2 u},$$

und dieselben Resultate erhält man auch, wenn man in den früheren allgemeinen Formeln nur $n=3$ setzt. Die Integrale für $n=1$ lassen sich aber durch cyklische oder hyperbolische Arcus, d. h. durch Amplituden ausdrücken.

Setzt man in der Formel (1.) $u+iK'$ für u, so verwandelt sie sich sofort in

$$(n-1).\int \frac{\partial u}{\text{sn}^n u} = (n-2)(1+k^2).\int \frac{\partial u}{\text{sn}^{n-2} u} - (n-3)k^2.\int \frac{\partial u}{\text{sn}^{n-4} u} - \frac{\text{cn}\, u\ \text{dn}\, u}{\text{sn}^{n-1} u},$$

oder, wenn man $K-u$ für u setzt, in die folgende

$$5.\quad (n-1).\int \frac{\partial u}{\text{snc}^n u}$$
$$= (n-2)(1+k^2).\int \frac{\partial u}{\text{snc}^{n-2} u} - (n-3)k^2.\int \frac{\partial u}{\text{snc}^{n-4} u} + \frac{\text{cnc}\, u.\text{dnc}\, u}{\text{snc}^{n-1} u}.$$

Vertauscht man in der Formel (2.) die beiden conjugirten Modul und setzt man dann ui für u, so verwandelt sie sich in

$$6.\quad (n-1)k'^2.\int \frac{\partial u}{\text{cn}^n u}$$
$$= (n-2)(k'^2-k^2).\int \frac{\partial u}{\text{cn}^{n-2} u} + (n-3)\,k^2.\int \frac{\partial u}{\text{cn}^{n-4} u} + \frac{\text{sn}\, u\ \text{dn}\, u}{\text{cn}^{n-1} u}.$$

Die Formeln (3.) und (4.) können in ähnliche umgesetzt werden für negative Exponenten, indem man nur $K-u$ für u setzt, da dnc u

$= \frac{k'}{\operatorname{du} u}$ und $\operatorname{tnc} u = \frac{1}{k' \operatorname{tn} u}$ ist. Hierdurch verwandelt sich die Formel (3.) in

$$7. \quad (n-1)k'^2.\int \frac{\partial u}{\operatorname{dn}^n u}$$
$$= (n-2)(1+k'^2).\int \frac{\partial u}{\operatorname{dn}^{n-2} u} - (n-3).\int \frac{\partial u}{\operatorname{dn}^{n-4} u} - \frac{k^2 . \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn}^{n-1} u}.$$

Siebenter Abschnitt.

§. 72.

Von den Modular-Logarithmen $\operatorname{lm} u$ und $\mathfrak{Lm} u$.

Die beiden im vorigen Abschnitte behandelten Modular-Integrale $\operatorname{el} u$ und $\mathfrak{El} u$, auf welche wir später noch oft zurückkommen werden, sind nur erste Differenziale einer neuen Function, wovon es ebenfalls zwei Nebenformen giebt, die sich, wie die cyklischen und hyperbolischen Functionen, gegenüberstehen und daher auch als zwei Functionen zu behandeln sind, damit man im Stande sei, die imaginären Formen auf reelle zurückzubringen. Es haben diese neuen Functionen eine *logarithmische Natur*, denn fast in alle sie betreffende Relationen mischen sich die natürlichen Logarithmen ein, und da sie nicht blofs von dem Argumente u, sondern auch von einem Modul abhängen, so werden wir sie *cyklische* und *hyperbolische Modular-Logarithmen* nennen, und durch $\operatorname{lm} u$ *) den cyklischen, sowie durch $\mathfrak{Lm} u$ den hyperbolischen Modular-Logarithmen des Argumentes u bezeichnen, wenn der Modul k ist, hingegen jenen mit $\operatorname{lm}' u$ und diesen mit $\mathfrak{Lm}' u$, wenn der Modul k' ist. Der vorhergehenden Erklärung gemäfs ist also

$$1. \quad \operatorname{lm} u = \int_0 \partial u . \operatorname{el} u, \text{ oder umgekehrt } \operatorname{el} u = \frac{\partial \operatorname{lm} u}{\partial u}, \text{ und}$$

$$2. \quad \mathfrak{Lm} u = \int_0 \partial u . \mathfrak{El} u, \text{ oder umgekehrt } \mathfrak{El} u = \frac{\partial \mathfrak{Lm} u}{\partial u}.$$

Aus diesen einfachen Formeln müssen alle Eigenschaften der Modular-Logarithmen hergeleitet werden.

---

*) Die Buchstaben l und m der Characteristik $\operatorname{lm} u$ sind die Anfangs-Buchstaben von logarithmus modularis. Die Charaktere lm und $\mathfrak{Lm}$ sind hinlänglich unterschieden von den einfachen Zeichen l und $\mathfrak{L}$, wodurch nach §. 37. des ersten Theiles hyperbolische Arcus auf cyklische und umgekehrt zurückgebracht werden.

Setzt man in der Formel (1.) $-u$ für u, so erhält man $\text{lm}(-u) = \int_0 \text{el}(-u).\partial(-u)$; und da $\text{el}(-u) = -\text{el}\,u$ ist, so erhält man:

3. $\quad \text{lm}(-u) = \text{lm}\,u,$ und eben so $\mathfrak{Lm}(-u) = \mathfrak{Lm}\,u.$

Wird also statt eines Argumentes das gleich grofse entgegengesetzte genommen, so wird der Modular-Logarithme desselben nicht geändert.

Setzt man ui für u, so hat man $\text{lm}(ui) = \int_0 i\partial u.\text{el}(ui)$; da aber $\text{el}(ui) = i.\mathfrak{El}\,u$ und $i^2 = -1$ ist, so erhalten wir:

$$\text{lm}(ui) = -\int_0 \partial u.\mathfrak{El}\,u,$$

und also der Formel (2.) gemäfs:

4. $\quad \text{lm}(ui) = -\mathfrak{Lm}\,u;$ eben so findet man $\mathfrak{Lm}(ui) = -\text{el}\,u.$

Die Modular-Logarithmen werden also nicht imaginär, wenn man auch ui statt des Argumentes u setzt; sie befolgen in dieser Beziehung ein ähnliches Gesetz wie die Functionen $\log\frac{1}{\cos u}$ und $\log \mathfrak{Cos}\,u$, denn es ist bekanntlich $\log\frac{1}{\cos(ui)} = \log\frac{1}{\mathfrak{Cos}\,u}$, oder

$$\log\frac{1}{\cos(ui)} = -\log\mathfrak{Cos}\,u \quad \text{und} \quad \log\mathfrak{Cos}(ui) = -\log\frac{1}{\cos u}.$$

Multiplicirt man die Gleichungen (5.) des §. 70. mit ∂u, und integrirt man gliedweise, so erhält man die Formeln:

$$5. \quad \begin{cases} \mathfrak{Lm}'u + \text{lm}\,u = \frac{u^2}{2} + \log\frac{1}{\text{cn}\,u} = \frac{u^2}{2} + \log\mathfrak{Cn}'u, \\ \mathfrak{Lm}\,u + \text{lm}'u = \frac{u^2}{2} + \log\mathfrak{Cn}\,u = \frac{u^2}{2} + \log\frac{1}{\text{cn}'u}, \end{cases}$$

wodurch die beiden Nebenformen der Modular-Logarithmen, wenn ihre Modul conjugirt sind, ohne Hülfe des Imaginären auf einander zurückgebracht sind. Schon in diesen Relationen zeigen sich die natürlichen Logarithmen.

Wegen der Einfachheit des durch die Formeln (4.) und (5.) ausgedrückten Zusammenhanges unter den cyklischen und hyperbolischen Modular-Logarithmen, werden wir uns im Folgenden gröfsten Theiles auf die Betrachtung der cyklischen Modular-Logarithmen beschränken.

Multiplicirt man die zweite der Formeln (5.) mit -1, und setzt man für $-\mathfrak{Lm}\,u$ seinen Werth $\text{lm}(ui)$ der Formel (4.) gemäfs an die Stelle, so hat man

$$6. \quad \text{lm}(ui) = \text{lm}'u - \frac{u^2}{2} - \log\frac{1}{\text{cn}'u},$$

und diese Formel dient als Fundamental-Formel für die nachfolgende Betrachtung der cyklischen Modular-Logarithmen solcher Argumente, welche ganz oder zum Theil imaginär sind.

§. 73.

Relation unter den Modular-Logarithmen $\mathrm{lm}(a \pm u)$, $\mathrm{lm}\, a$ und $\mathrm{lm}\, u$. Entwicklung des Modular-Logarithmen eines Trinoms.

Es ist nach §. 65.

$$\mathrm{el}(a+u) - \mathrm{el}(a-u) = 2\,\mathrm{el}\, u + \frac{-2k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u};$$

wird diese Gleichung mit ∂u multiplicirt, so erhält man

$$\partial u.\,\mathrm{el}(a+u) - \partial u.\,\mathrm{el}(a-u) = 2\partial\, \mathrm{lm}\, u + \partial \log(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u).$$

Da ferner $\partial\, \mathrm{lm}(a+u) = \partial u.\,\mathrm{el}(a+u)$ und $\partial\, \mathrm{lm}(a-u) = -\mathrm{el}(a-u).\partial u$ ist, so erhält man durch Integration

$$\mathrm{lm}(a+u) + \mathrm{lm}(a-u) = \text{const.} + 2\,\mathrm{lm}\, u + \log(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u).$$

Setzt man, um die Constante zu bestimmen, $u = 0$, so findet sich const. $= 2\,\mathrm{lm}\, a$; es ist also

$$1.\quad \mathrm{lm}(a+u) + \mathrm{lm}(a-u) = 2\,\mathrm{lm}\, a + 2\,\mathrm{lm}\, u + \log(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u).$$

Setzt man in dieser Formel $a = K$, so hat man

$$2.\quad \mathrm{lm}(K+u) + \mathrm{lm}(K-u) = 2\,\mathrm{lm}\, K + 2\,\mathrm{lm}\, u + 2\log \operatorname{dn} u,$$

und setzt man $a = u$, so entsteht

$$3.\quad \mathrm{lm}\, 2u = 4\,\mathrm{lm}\, u + \log(1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u).$$

Nach §. 66. ist $\mathrm{el}(K+u) + \mathrm{el}(K-u) = 2E$. Multiplicirt man diese Gleichung mit ∂u, und integrirt man, so entsteht, da $\partial u = \partial(K+u) = -\partial(K-u)$ ist, die Gleichung

$$4.\quad \frac{\mathrm{lm}(K+u) - \mathrm{lm}(K-u)}{2} = E.u.$$

Eine Constante braucht nicht hinzugefügt zu werden, da jede Seite der Gleichung für $u = 0$ verschwindet.

Setzen wir in dieser Formel $u = K$, so erhalten wir

$$5.\quad \mathrm{lm}(2K) = 2E.K.$$

Setzen wir aber ui für u, so entsteht die Gleichung

$$6.\quad \frac{\mathrm{lm}(K+ui) - \mathrm{lm}(K-ui)}{2i} = E.u.$$

Setzt man in der Gleichung (3.) $u = K$, so erhält man $\mathrm{lm}(2K) = 4\,\mathrm{lm}\, K + 2\log k'$, daher ist

$$7.\quad \mathrm{lm}\, K = \frac{EK}{2} + \log \sqrt{\frac{1}{k'}}.$$

Wird die Gleichung (2.) durch 2 dividirt, und der so eben gefundene Werth substituirt, so erhält man

$$8.\quad \frac{\mathrm{lm}(K+u)+\mathrm{lm}(K-u)}{2} = \frac{EK}{2} + \mathrm{lm}\,u + \log\left(\frac{\mathrm{dn}\,u}{\sqrt{k'}}\right).$$

Hieraus und aus (4.) erhält man durch Addition und Subtraction

$$9.\quad \begin{cases} \mathrm{lm}(K-u) = \mathrm{lmc}\,u = \frac{EK}{2} + \mathrm{lm}\,u + \log\left(\frac{\mathrm{dn}\,u}{\sqrt{k'}}\right) - E.u \quad \text{und} \\ \mathrm{lm}(K+u) = \mathrm{lmc}(-u) = \frac{EK}{2} + \mathrm{lm}\,u + \log\left(\frac{\mathrm{dn}\,u}{\sqrt{k'}}\right) + E.u. \end{cases}$$

Eine Relation unter Modular-Logarithmen, welche noch allgemeiner als die Formel (1.) ist, läſst sich auf folgende Art herleiten. Multiplicirt man die Gleichung (6.) des §. 65. mit ∂a und integrirt man, so erhält man

$$\mathrm{lm}(u+v+a) =$$
$$\mathrm{lm}(u+a) + \mathrm{lm}(v+a) - \mathrm{lm}\,a - \log(1 + k^2 \mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}(u+v+a)) + \text{const.}$$

Setzt man, um die Constante zu finden, $a=0$, so hat man

$$\mathrm{lm}(u+v) = \mathrm{lm}\,u + \mathrm{lm}\,v + \text{const.}$$

und also

$$10.\quad \mathrm{lm}(u+v+a) = \mathrm{lm}(u+a) + \mathrm{lm}(v+a) + \mathrm{lm}(u+v) - \mathrm{lm}\,u - \mathrm{lm}\,v - \mathrm{lm}\,a$$
$$- \log(1 + k^2 \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}(u+v+a)).$$

Setzt man in dieser Formel $u=b$ und $v=-b$, so verwandelt sie sich in die frühere Formel (1.); setzt man $-a$ für a, und beachtet man, daſs $\mathrm{lm}(-a) = \mathrm{lm}(+a)$ ist, so erhält man

$$\mathrm{lm}(u+v-a) = \mathrm{lm}(u-a) + \mathrm{lm}(v-a) + \mathrm{lm}(u+v) - \mathrm{lm}\,u - \mathrm{lm}\,v - \mathrm{lm}\,a$$
$$- \log(1 - k^2 \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}(u+v-a)).$$

Wird diese Gleichung von der früheren subtrahirt, so erhält man

$$11.\quad [\mathrm{lm}(u+v+a) - \mathrm{lm}(u+a) - \mathrm{lm}(v+a)]$$
$$- [\mathrm{lm}(u+v-a) - \mathrm{lm}(u-a) - \mathrm{lm}(v-a)]$$
$$= -\log \frac{1 + k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}(u+v+a)}{1 - k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}(u+v-a)}.$$

Zusatz. Setzt man in der Formel (3.) $u = \frac{1}{2}K$, so erhält man zunächst $4.\mathrm{lm}\frac{1}{2}K = \mathrm{lm}\,K + \log\left(\frac{1}{1-k^2\,\mathrm{sn}^4\frac{1}{2}K}\right)$; da aber $\mathrm{sn}^2\frac{1}{2}K = \frac{1}{1+k'}$, also $k^2\,\mathrm{sn}^4\frac{1}{2}K = \frac{1-k'^2}{(1+k')^2} = \frac{1-k'}{1+k'}$ und $1 - k^2\,\mathrm{sn}^4\frac{1}{2}K = \frac{2k'}{1+k'}$ ist, so erhalten wir

$$4.\mathrm{lm}\frac{K}{2} = \frac{EK}{2} + \log\sqrt{\frac{1}{k'}} + \log\frac{1+k'}{2k'} \quad \text{oder} \quad \mathrm{lm}\frac{K}{2} = \frac{EK}{8} + \tfrac{1}{4}\log\left(\frac{1+k'}{2\sqrt{k'^3}}\right).$$

§. 74.

Entwicklung von $\mathrm{lm}(u \pm 2mK)$ und reelles periodisches Verhalten des Ausdrucks

$$\mathrm{lm}\,u - \frac{E}{K} \cdot \frac{u^2}{2}.$$

Setzt man in der Formel (4.) des §. 73. jetzt $K \mp u$ für u, so verwandelt sie sich in:

1. $\mathrm{lm}(2K - u) = \mathrm{lm}\,u + 2E(K - u)$ und $\mathrm{lm}(2K + u) = \mathrm{lm}\,u + 2E(K + u)$.

Aus der letzten Formel leiten wir noch eine allgemeinere her, indem wir darin nach einander $u + 2K$, $u + 4K$, $u + 6K$ etc. für u setzen; addiren wir aber die Gleichungen:

$$\mathrm{lm}(u + 2K) = \mathrm{lm}\,u + 2E.(u + K),$$
$$\mathrm{lm}(u + 4K) = \mathrm{lm}(u + 2K) + 2E.(u + 3K),$$
$$\mathrm{lm}(u + 6K) = \mathrm{lm}(u + 4K) + 2E.(u + 5K),$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$\mathrm{lm}(u + 2mK) = \mathrm{lm}(u + 2(m-1)K) + 2E.(u + (2m-1)K),$$

in welchen die unter einander stehenden zweiten Glieder, welche den gemeinschaftlichen Factor $2E$ haben, eine arithmetische Progression ausmachen und also dadurch summirt werden, daſs man die halbe Summe der beiden äuſsersten Glieder mit der Anzahl der Glieder multiplicirt. So erhält man die Formel:

$$2. \quad \mathrm{lm}(u + 2mK) = \mathrm{lm}\,u + 2E.(mu + m^2K),$$

in welcher m eine beliebige positive oder negative *ganze* Zahl vorstellt. Daſs diese Formel nämlich auch dann gilt, wenn m eine negative ganze Zahl bedeutet, läſst sich kurz so zeigen. Setzt man in der Formel (2.) $-u$ für u, so erhält man:

$$\mathrm{lm}(-u + 2mK) = \mathrm{lm}\,u + 2E.(-mu + m^2K),$$

Da nun aber $-u + 2mK = -(u - 2mK)$ und also auch $\mathrm{lm}(-u + 2mK) = \mathrm{lm}(u - 2mK)$ ist, so erhält man:

$$\mathrm{lm}(u - 2mK) = \mathrm{lm}\,u + 2E.(-mu + m^2K),$$

also dieselbe Formel, welche man auch erhält, wenn man $-m$ statt m in der Gleichung (2.) setzt. Der Gleichung (2.) gemäſs ist:

$$\mathrm{lm}(u + 2mK) = \mathrm{lm}\,u + E(2mu + 2m^2K)$$

oder

$$\mathrm{lm}(u + 2mK) = \mathrm{lm}\,u + \frac{E}{2K}(4muK + 4m^2K^2).$$

Da aber $(u + 2mK)^2 = u^2 + 4muK + 4m^2K^2$, und also auch

$$4muK + 4m^2K^2 = (u + 2mK)^2 - u^2$$

ist, so erhält man durch die Substitution dieses Ausdrucks die Gleichung

$$\operatorname{lm}(u+2mK)-\frac{E}{2K}(u+2mK)^2=\operatorname{lm}u-\frac{E}{2K}.u^2.$$

Der Ausdruck auf der linken Seite enthält ganz eben so das Argument $u+2mK$, wie der auf der rechten Seite das Argument u, und da diese Ausdrücke sich gleich sind, so haben wir also den Satz:

Der Ausdruck $\operatorname{lm}u-\frac{E}{K}.\frac{u^2}{2}$ *ändert seinen Werth nicht, wenn man das Argument u in ihm um ein beliebiges Vielfaches von $2K$ vermehrt, oder auch vermindert; er ist also eine periodische Function mit reellen Perioden; der Umfang einer jeden Periode ist $=2K$.*

§. 75.

Entwicklung von $\operatorname{lm}(K\pm ui)$ und $\operatorname{lm}(K\pm iK')$.

Nach Formel (11.) des §. 67. ist $\operatorname{el}(K-ui)=E-i(u+\operatorname{elc}'u-E')$; multiplicirt man diese Gleichung mit $\partial(-ui)=-i\partial u$, so erhält man:

$$\partial(K-ui).\operatorname{el}(K-ui)=-iE.\partial u-(u\partial u+\operatorname{elc}'u.\partial u-E'.\partial u)$$

und durch Integration entsteht hieraus

$$\operatorname{lm}(K-ui)=\text{const.}-iE.u-\left(\frac{u^2}{2}-\operatorname{lm}'(K'-u)-E.u\right)$$

oder auch

$$\operatorname{lm}(K-ui)=\text{const.}-E.ui-\frac{u^2}{2}+\operatorname{lmc}'u+E'.u,$$

wenn wir $\operatorname{lmc}u$ für $\operatorname{lm}(K-u)$, also auch $\operatorname{lmc}'u$ für $\operatorname{lm}'(K'-u)$ schreiben. Setzen wir, um die Constante zu finden, $u=0$, so erhalten wir:

$$\operatorname{lm}K=\text{const.}+\operatorname{lm}'K',\quad \text{also}\quad \text{const.}=\operatorname{lm}K'-\operatorname{lm}'K'.$$

Da nach §. 73. ist $\operatorname{lm}K=\frac{EK}{2}+\log\sqrt{\frac{1}{k'}}$, also $\operatorname{lm}'K'=\frac{E'K'}{2}+\log\sqrt{\frac{1}{k}}$, so erhalten wir $\text{const.}=\frac{EK-E'K'}{2}+\log\sqrt{\frac{k}{k'}}$, und es ist also:

$$1.\quad\begin{cases}\operatorname{lmc}(ui)=\operatorname{lm}(K-ui)\\ =\frac{EK-E'K'}{2}+\log\sqrt{\frac{k}{k'}}+\operatorname{lmc}'u+E'.u-\frac{u^2}{2}-E.ui\\ \operatorname{lmc}(-ui)=\operatorname{lm}(K+ui)\\ =\frac{EK-E'K'}{2}+\log\sqrt{\frac{k}{k'}}+\operatorname{lmc}'u+E'.u-\frac{u^2}{2}+E.ui.\end{cases}$$

Substituirt man für $\operatorname{lmc}'u$ der Gleichung (9.) des §. 73. gemäß den Werth

$$\operatorname{lmc}'u=\frac{E'K'}{2}+\operatorname{lm}'u+\log\left(\frac{\operatorname{dn}'u}{\sqrt{k}}\right)-E'.u,$$

so erhält man die noch einfacheren Ausdrücke:

$$2.\quad \begin{cases} \operatorname{lm}(K-ui) = \frac{EK}{2} + \operatorname{lm}'u + \log\left(\frac{\operatorname{dn}'u}{\sqrt{k'}}\right) - \frac{u^2}{2} - E.ui, \\ \operatorname{lm}(K+ui) = \frac{EK}{2} + \operatorname{lm}'u + \log\left(\frac{\operatorname{dn}'u}{\sqrt{k'}}\right) - \frac{u^2}{2} + E.ui. \end{cases}$$

Setzt man in den Formeln (1.) noch $u = K'$, so entsteht

$$\operatorname{lm}(K \mp iK') = \frac{EK - E'K' - K'^2}{2} + E'K' + \log\sqrt{\frac{k}{k'}} \mp EK'.i,$$

oder also

$$3.\quad \begin{cases} \operatorname{lm}(K-iK') = \frac{EK + E'K' - K'^2}{2} + \log\sqrt{\frac{k}{k'}} - EK'.i, \\ \operatorname{lm}(K+iK') = \frac{EK + E'K' - K'^2}{2} + \log\sqrt{\frac{k}{k'}} + EK'.i. \end{cases}$$

Die Formeln (2.) lassen sich auch also herleiten. Setzt man in den Formeln (9.) des §. 73. ui für u, wodurch sich $\operatorname{dn} u$ verwandelt in $\frac{\operatorname{dn}'u}{\operatorname{cn}'u}$, so erhalten wir

$$\operatorname{lm}(K \pm ui) = \frac{EK}{2} + \operatorname{lm}(ui) + \log\left(\frac{\operatorname{dn}'u}{\sqrt{k'}}\right) \pm E.ui + \log\frac{1}{\operatorname{cn}'u};$$

und da nach Formel (6.) des §. 72. ist $\operatorname{lm}(ui) + \log\left(\frac{1}{\operatorname{cn}'u}\right) = \operatorname{lm}'u - \frac{u^2}{2}$, so erhält man durch die Substitution dieses Werthes augenblicklich die Formeln (2.), woraus die Formeln (1.) leicht herzuleiten sind.

§. 76.

Zusammenhang zwischen den beiden Modular-Quadranten K und K' und den beiden elliptischen Quadranten E und E'.

Setzt man in der Gleichung (6.) des §. 72. für u an die Stelle $K'-u$, so erhält man:

$$\operatorname{lm}(iK'-ui) = \operatorname{lm}'(K'-u) - \frac{(K'-u)^2}{2} - \log\left(\frac{1}{\operatorname{cn}'(K'-u)}\right);$$

eben so ist

$$\operatorname{lm}(iK'+ui) = \operatorname{lm}'(K'+u) - \frac{(K'+u)^2}{2} - \log\left(\frac{1}{\operatorname{cn}'(K'+u)}\right);$$

und da $\operatorname{cn}'(K'+u) = -\operatorname{cn}'(K'-u)$ ist, so erhält man, wenn die obere Gleichung von der unteren subtrahirt wird:

$$\operatorname{lm}(iK'+ui) - \operatorname{lm}(iK'-ui) = 2E'u - 2K'u - \log\left(\frac{1}{-1}\right),$$

da nach Formel (4.) des §. 73. ist $\operatorname{lm}'(K'+u) - \operatorname{lm}'(K'-u) = 2E'.u$. Setzt man in dieser Formel $\frac{u}{i} = -ui$ für u, und beachtet man, daſs

$\log(-1)=\pi i$ ist, so erhält man:

$$\mathrm{lm}(u+iK')-\mathrm{lm}(iK'-u) = 2i(K'-E')u+\pi i,$$

oder auch, da $\mathrm{lm}(iK'-u)=\mathrm{lm}(u-iK')$ ist,

$$1.\quad \frac{\mathrm{lm}(u+iK')-\mathrm{lm}(u-iK')}{2i} = (K'-E')u+\tfrac{1}{2}\pi.$$

Setzt man in dieser Formel noch $u=K$, so verwandelt sie sich in:

$$\frac{\mathrm{lm}(K+iK')-\mathrm{lm}(K-iK')}{2i} = (K'-E').K+\tfrac{1}{2}\pi;$$

aber aus den Gleichungen (3.) des §. 75. erhält man durch die Subtraction auch

$$\frac{\mathrm{lm}(K+iK')-\mathrm{lm}(K-iK')}{2i} = EK',$$

und diese beiden verschiedenen Darstellungen derselben Gröſse geben also die Gleichung:

$$EK' = (K'-E')K+\tfrac{1}{2}\pi,$$

oder auch

$$2.\quad EK'+E'K-KK' = \tfrac{1}{2}\pi,$$

wodurch eine Relation unter den vier Quadranten K, K', E, E' ausgedrückt wird, welche sehr oft zur Anwendung kommt, und zuerst von *Legendre* auf einem ganz anderen Wege gefunden worden ist. Es läſst sich diese Formel auch auf die beiden folgenden Weisen darstellen:

$$\frac{E}{K}+\frac{E'}{K'}-1 = \frac{\pi}{2KK'} \quad \text{und} \quad E'K = (K-E).K'+\tfrac{1}{2}\pi.$$

Wenn nur überhaupt bekannt ist, daſs das Product $E'K$ von dem Producte $(K-E)K'$ nur um eine Constante c verschieden ist, so läſst sich diese Constante c leicht finden; denn setzt man

$$E'K = (K-E)K'+c,$$

und verringert man immer mehr den Modul k, so nähern sich K und E der Grenze $\frac{1}{2}\pi$, also $K-E$ der Grenze Null, ferner nähert sich E' der Grenze 1, und da sich K' dem Logarithmen von $\frac{1}{0}$ nähert, so nähert sich das Product $(K-E).K'$ dennoch der Grenze Null, und es entsteht also

$$E'.K = 1.\tfrac{1}{2}\pi = c,$$

wodurch also die Constante c bestimmt ist. Diese Nachweisung schien noch nothwendig, weil wir die Constante $\frac{1}{2}\pi$ in der Gleichung (2.) aus der Formel $\log(-1)=\pi i$ hergeleitet haben, da doch überhaupt $\log(-1) = \pi i+2\pi m i$ ist, wenn unter m eine beliebige positive oder negative ganze Zahl verstanden wird.

Zusatz. Ist der Modul $k = k' = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$, so ist auch $E = E'$ und $K = K'$; daher verwandelt sich nun die allgemeine Formel in $2E.K - K^2 = \tfrac{1}{2}\pi$ und hieraus folgt

$$E = \tfrac{1}{2}K + \frac{\pi}{4K} = \tfrac{1}{2}\left(K + \frac{\tfrac{1}{2}\pi}{K}\right).$$

§. 77.

Entwicklung von $\operatorname{lm}(u + iK')$.

Setzt man in der Gleichung (6.) des §. 72. wieder $K' + u$ für u, wodurch man (wie im §. 76.) erhält

$$\operatorname{lm}(iK' + ui) = \operatorname{lm}'(K' + u) - \frac{(K'+u)^2}{2} - \log\left(\frac{1}{\operatorname{cn}'(K'+u)}\right),$$

und setzt man hierin $\frac{u}{i} = -ui$ für u, so erhält man

$$\operatorname{lm}(u + iK') = \operatorname{lm}'(K' - ui) - \frac{(K'-ui)^2}{2} - \log\frac{1}{\operatorname{cn}'(K'-ui)}.$$

Da aber nach §. 26 ist $\operatorname{cnc}'(ui) = \frac{ik}{k'}\operatorname{cnc} u = \frac{ik\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}$, so erhält man, da $\log i = \tfrac{1}{2}\pi i$ ist, zunächst

$$\operatorname{lm}(u + iK') = \operatorname{lm}'(K' - ui) - \frac{(K'-ui)^2}{2} - \log\left(\frac{\operatorname{dn} u}{k\operatorname{sn} u}\right) + \frac{\pi i}{2}.$$

Substituirt man hierin für $\operatorname{lm}'(K' - ui)$ den Werth $\frac{E'K'}{2} + \operatorname{lm} u + \log\frac{\operatorname{dn} u}{\sqrt{k}} - \frac{u^2}{2} - E'ui$ und für $-\frac{(K'-ui)^2}{2}$ den Werth $-\frac{K'^2}{2} + K'ui + \frac{u^2}{2}$, so erhält man, wenn man die sich aufhebenden Glieder wegläfst,

$$\operatorname{lm}(u + iK') = \frac{E'K' - K'^2}{2} + \operatorname{lm} u + (K' - E')ui + \log(k\operatorname{sn} u) - \log\sqrt{k} + \frac{\pi i}{2},$$

oder auch

$$\operatorname{lm}(u + iK') = -\frac{K'(K'-E')}{2} + \operatorname{lm} u + \log(\operatorname{sn} u.\sqrt{k}) + i((K'-E')u + \tfrac{1}{2}\pi),$$

$$\operatorname{lm}(u - iK') = -\frac{K'(K'-E')}{2} + \operatorname{lm} u + \log(\operatorname{sn} u.\sqrt{k}) - i((K'-E')u + \tfrac{1}{2}\pi).$$

Wird die untere Gleichung von der oberen subtrahirt, so erhält man wieder die Formel (1.) im §. 76.; woraus wir *Legendre's* berühmtes Theorem hergeleitet haben.

Es können diese beiden Formeln auch auf folgende Art gefunden werden. Nach §. 67. Formel (15.) ist $\operatorname{el}(u + iK') = \operatorname{el} u + \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u} + i(K' - E')$. Multiplicirt man diese Gleichung mit ∂u, und integrirt, so findet sich

$$\operatorname{lm}(u + iK') = \text{const.} + \operatorname{lm} u + \log\operatorname{sn} u + i(K' - E')u.$$

Die Constante kann nun nicht dadurch gefunden werden, daſs man $u=0$ setzt, wohl aber, indem man $u=K$ setzt; dadurch erhält man

$$\text{const.} = \text{lm}(K+iK') - \text{lm}\,K - i(K'-E')K.$$

Werden hierin die Werthe von $\text{lm}(K+iK')$ aus §. 75. und von $\text{lm}\,K$ aus §. 73. substituirt, so erhält man dieselbe Formel, wie oben.

§. 78.

Entwicklung von $\text{lm}\left(u+\frac{iK'}{2}\right)$, $\text{lm}\left(\frac{iK'}{2}\right)$ und $\text{lm}\left(\frac{K+iK'}{2}\right)$.

Nach §. 73. Formel (3.) ist $4.\text{lm}\,u = \text{lm}\,2u - \log(1-k^2\,\text{sn}^4 u)$; ferner ist nach §. 32. $\text{sn}^2 u = \frac{1-\text{cn}\,2u}{1+\text{dn}\,2u}$ und $k\ \text{sn}^2 u = \frac{1-\text{dn}\,2u}{1+\text{cn}\,2u}$, also $k^2\,\text{sn}^4 u = \frac{(1-\text{cn}\,2u)(1-\text{dn}\,2u)}{(1+\text{cn}\,2u)(1+\text{dn}\,2a)}$, und folglich $1-k^2\text{sn}\ u = \frac{2\,(\text{cn}\,2u+\text{dn}\,2u)}{(1+\text{cn}\,2u)(1+\text{dn}\,2u)}$.
Hiernach verwandelt sich die Formel in

$$4.\text{lm}\,u = \text{lm}\,2u + \log\frac{(1+\text{cn}\,2u)(1+\text{dn}\,2u)}{2\,(\text{cn}\,2u+\text{dn}\,2u)} \quad \text{oder}$$

$$4\,\text{lm}\frac{u}{2} = \text{lm}\,u + \log\frac{(1+\text{cn}\,u)(1+\text{dn}\,u)}{2\,(\text{cn}\,u+\text{dn}\,u)}.$$

Setzt man in dieser Formel $u+iK'$ für u, so verwandelt sich $\text{cn}\,u$ in $\frac{-i\,\text{dn}\,u}{k\,\text{sn}\,u}$ und $\text{dn}\,u$ in $\frac{-i\,\text{cn}\,u}{\text{sn}\,u}$; also verwandelt sich der Bruch

$$\frac{(1+\text{cn}\,u)(1+\text{dn}\,u)}{2(\text{dn}\,u+\text{cn}\,u)} \quad \text{in} \quad \frac{(k\,\text{sn}\,u-i\,\text{dn}\,u)(\text{cn}\,u+i\,\text{sn}\,u)}{2(\text{dn}\,u+k\,\text{cn}\,u)\,\text{sn}\,u}.$$

Wird nun auch für $\text{lm}(u+iK')$ sein Werth aus §. 77. substituirt, so heben sich die Glieder $+\log\text{sn}\,u$ und $-\log\text{sn}\,u$ auf und man erhält:

$$4\,\text{lm}\left(\frac{u+iK'}{2}\right) = -\frac{K'(K'-E')}{2} + \text{lm}\,u + \log\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\right) + \log(k\,\text{sn}\,u - i\,\text{dn}\,u)$$
$$+ \log(\text{cn}\,u + i\,\text{sn}\,u - \log(\text{dn}\,u + k\,\text{cn}\,u) + i((K'-E')u + \tfrac{1}{2}\pi).$$

Da aber $\log(k\,\text{sn}\,u - i\,\text{dn}\,u) = i\arcsin(\text{dn}\,u) = i\arccos(k\,\text{sn}\,u)$ und $\log(\text{cn}\,u + i\,\text{sn}\,u) = i\,\text{am}\,u$ ist, so erhält man:

$$4\,\text{lm}\left(\frac{u+iK'}{2}\right) = -\frac{K'(K'-E')}{2} + \log\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\right) - \log(\text{dn}\,u + k\,\text{cn}\,u) + \text{lm}\,u$$
$$+ i\,(\tfrac{1}{2}\pi - \arccos(k\,\text{sn}\,u) + \text{am}\,u + (K'-E')u),$$

und da $\frac{1}{2}\pi - \arccos(k\,\text{sn}\,u) = \arcsin(k\,\text{sn}\,u)$ ist, so reducirt sich der Ausdruck auf den einfacheren

$$1.\quad \text{lm}\left(\frac{u+iK'}{2}\right) = -\frac{K'(K'-E')}{8} + \tfrac{1}{4}\log\left(\frac{\sqrt{k}}{2\,\text{dn}\,u + 2k\,\text{cn}\,u}\right) + \frac{\text{lm}\,u}{4}$$
$$+ i\left(\frac{\arcsin(k\,\text{sn}\,u) + \text{am}\,u + (K'-E')\,u}{4}\right),$$

in welchem auch noch $\text{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right)$ für $\arcsin(k\,\text{sn}\,u)$ gesetzt werden kann.

Hieraus erhält man noch für $u=0$ das particuläre und reelle Resultat:

$$2.\quad \operatorname{lm}\left(\frac{iK'}{2}\right) = -\frac{K'(K'-E')}{8} + \tfrac{1}{4}\log\left(\frac{\sqrt{k}}{2(1+k)}\right),$$

und für $u=K$ findet sich ein zweites, aber imaginäres Resultat

$$\operatorname{lm}\left(\frac{K+iK'}{2}\right) = -\frac{K'(K'-E')}{8} + \log\sqrt[4]{\frac{\sqrt{k}}{2k'}} + \frac{EK}{8} + \log\sqrt[4]{\frac{1}{\sqrt{k'}}}$$
$$+ i\left[\frac{\arcsin(k)}{4} + \tfrac{1}{4}((K'-E')K + \tfrac{1}{2}\pi)\right],$$

welches sich noch zusammenziehen läſst auf

$$3.\quad \operatorname{lm}\left(\frac{K+iK'}{2}\right) = \frac{EK+E'K'-K'^2}{8} + \log\sqrt[4]{\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{k'}{k^3}}\right)} + \tfrac{1}{4}i(\arcsin(k)+EK).$$

§. 79.

Entwicklung von $\operatorname{lm}(u+2niK')$ und periodisches Verhalten des Ausdrucks
$$\operatorname{lm}u - \left(1-\frac{E'}{K'}\right).\frac{u^2}{2}.$$

Es ist dem §. 76. oder auch 77. gemäſs $\operatorname{lm}(u+iK') = \operatorname{lm}(u-iK') + 2i((K'-E')u+\tfrac{1}{2}\pi)$. Setzt man in dieser Formel $u \pm iK'$ für u, so verwandelt sie sich in

$$1.\quad \operatorname{lm}(u\pm 2iK') = \operatorname{lm}u \pm 2i((K'-E')(u\pm iK')+\tfrac{1}{2}\pi),$$

oder auch, wenn man für πi wieder $\log(-1)$ an die Stelle setzt, in

$$\operatorname{lm}(u+2iK') = 2i(K'-E')(u+iK') + \log(-1) + \operatorname{lm}(u)$$
$$\operatorname{lm}(u+4iK') = 2i(K'-E')(u+3iK') + \log(-1) + \operatorname{lm}(u+2iK')$$
$$\operatorname{lm}(u+6iK') = 2i(K'-E')(u+5iK') + \log(-1) + \operatorname{lm}(u+4iK')$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\operatorname{lm}(u+2niK') = 2i(K'-E')(u+(2n-1)iK') + \log(-1) + \operatorname{lm}(u+(2n-2)iK').$$

Addirt man diese Gleichungen, deren Anzahl $=n$ ist, so erhält man die allgemeinere Formel

$$2.\quad \operatorname{lm}(u+2niK') = \operatorname{lm}u + 2i(K'-E')(nu+n^2iK') + \log((-1)^n).$$

Es läſst sich diese Formel auch also darstellen:

$$\operatorname{lm}(u+2niK') = \operatorname{lm}u + \frac{(K'-E')}{2K'}(4nuiK' + 4n^2i^2K'^2) + \log((-1)^n),$$

und da $4nuiK' + 4n^2i^2K'^2 = (u+2niK')^2 - u^2$ ist, so verwandelt sich die Formel in:

$$\operatorname{lm}(u+2niK') - \left(1-\frac{E'}{K'}\right).\frac{(u+2niK')^2}{2} = \operatorname{lm}u - \left(1-\frac{E'}{K'}\right).\frac{u^2}{2} + \log((-1)^n).$$

Abgesehen von dem Gliede $\log((-1)^n)$ enthält der Ausdruck auf der linken Seite eben so das Argument $u+2niK'$, wie der auf der rechten Seite das Argument u; das Glied $\log((-1)^n)$ fällt aber auch weg, wenn man $2n$ für n setzt; denn dann ist $(-1)^n=1$ und also $\log((-1)^n)=\log 1=0$. Daher haben wir den Lehrsatz: *Der Ausdruck* $\mathrm{lm}\,u-\left(1-\frac{E'}{K'}\right).\frac{u^2}{2}$ *ändert seinen Werth nicht, wenn man das Argument u in ihm beliebig oft um $4iK'$ vermehrt oder auch vermindert; er ist also periodisch; die Perioden sind aber imaginär, da der Umfang einer jeden $=4iK'$ ist.*

Zusatz. Für die hyperbolischen Modular-Logarithmen erhält man leicht die Formeln

$$\mathfrak{L}\mathrm{m}(u+2nK')=\mathfrak{L}\mathrm{m}\,u+2(K'-E')(nu+n^2K')-\log(-1)^n \text{ und}$$

$$\mathfrak{L}\mathrm{m}(u+2nK')-\left(1-\frac{E'}{K'}\right).\frac{(u+2nK')^2}{2}=\mathfrak{L}\mathrm{m}\,u-\left(1-\frac{E'}{K'}\right).\frac{u^2}{2}-\log((-1)^n),$$

welche, wenn n eine gerade Zahl ist, nichts Imaginäres enthalten.

§. 80.

Entwicklung von $\mathrm{lm}(u+2mK+2niK')$ und unzählige daraus abgeleitete periodische Ausdrücke.

Die Entwicklung von $\mathrm{lm}(u+2mK+2niK')$ findet sich durch die Zusammensetzung der Formel (2.) im §. 74. und der Formel (2.) im §. 79. Um die bei dieser Zusammensetzung möglichen Reductionen besser übersehen zu können, eliminiren wir aus der zuletzt genannten Formel den elliptischen Quadranten E'. Da nach *Legendre's* Satze im §. 76. ist: $\frac{E}{K}+\frac{E'}{K'}-1=\frac{\pi}{2KK'}$, oder $\frac{E}{K}-\frac{\pi}{2KK'}=1-\frac{E'}{K'}$, so verwandelt sich jene Formel in

$$\mathrm{lm}(u+2niK')=\mathrm{lm}\,u+i\left(\frac{2EK'}{K}-\frac{\pi}{K}\right)(nu+n^2iK')+\log((-1)^n),$$

oder, der Umformung am Schlusse des §. 79. gemäfs,

$$\mathrm{lm}(u+2niK')-\frac{E}{2K}(u+2niK')^2+\frac{\pi}{4KK'}(u+2niK')^2$$
$$=\mathrm{lm}\,u-\frac{E}{2K}u^2+\frac{\pi}{4KK'}.u^2+\log(-1)^n.$$

Setzt man hierin $u+2mK$ für u, so entsteht

$$\mathrm{lm}(u+2mK+2niK')-\frac{E}{2K}(u+2mK+2niK')^2+\frac{\pi}{4KK'}(u+2mK+2niK')^2$$
$$=\mathrm{lm}(u+2mK)-\frac{E}{2K}(u+2mK)^2+\frac{\pi}{4KK}(u+2mK)^2+\log(-1)^n.$$

Da aber nach §. 74. $\operatorname{lm}(u+2m)K-\frac{E}{2K}(u+2mK)^2=\operatorname{lm}u-\frac{E}{2K}.u^2$ ist, so erhält man, wenn man der Kürze wegen für den Augenblick setzt:

$$U=\operatorname{lm}u-\frac{E}{2K}.u^2 \text{ und}$$

$$U'=\operatorname{lm}(u+2mK+2niK')-\frac{E}{2K}(u+2mK+2niK')^2,$$

durch die Substitution des angegebenen Werthes die Gleichung

$$U'-U+\frac{\pi}{4KK'}(u+2mK+2niK')^2-\frac{\pi}{4KK'}(u+2mK)^2-\log((-1)^n)=0.$$

Durch Entwicklung findet man $(u+2mK+2niK')^2-(u+2mK)^2$ $=4niK'(u+2mK)+4n^2i^2K'^2=4niK'(u+2mK+niK')=$ $2niK'(2u+4mK+2niK')=2niK'(2u+2mK+2niK')+4mniKK'$; und wird dieser Werth substituirt, so verwandelt sich die vorige Gleichung in

$$U'-U+\frac{n\pi i}{2K}(2u+2mK+2niK')+mn\pi i-\log(-1)^n=0.$$

Da nun aber

$$(u+2mK+2niK')^2-u^2=(2u+2mK+2niK')(2mK+2niK')$$

ist, so kann die Gleichung auch also dargestellt werden:

$$U'-U+\frac{n\pi i}{4K(mK+niK')}((u+2mK+2niK')^2-u^2)+\log((-1)^{n(m-1)})=0,$$

wenn man zugleich bedenkt, daſs $mn\pi i=\pm\log(-1)^{mn}$ ist. Setzt man noch auſserdem $\mu=\frac{m}{n}$, und für U und U' die Werthe, so hat man endlich

$$1.\quad \operatorname{lm}(u+2mK+2niK')+\left(\frac{\pi i}{2K(\mu K+iK')}-\frac{E}{K}\right).\frac{(u+2mK+2niK')^2}{2}$$
$$=\operatorname{lm}u+\left(\frac{\pi i}{2K(\mu K+iK')}-\frac{E}{K}\right).\frac{u^2}{2}-\log((-1)^{n(m-1)}).$$

Ist nun m eine beliebige ganze Zahl, aber n eine gerade Zahl, oder ist n eine beliebige ganze Zahl, aber m eine ungerade Zahl, so ist in jedem dieser beiden Fälle $\log((-1)^{n(m-1)})=\log(+1)=0$, und der bewiesenen Formel gemäſs bleibt also der Ausdruck $\operatorname{lm}u+\left(\frac{\pi i}{K(2\mu K+2iK')}-\frac{E}{K}\right).\frac{u^2}{2}$ ungeändert, wenn darin $u+2mK+2niK'$ für u gesetzt wird, oder also u um $2mK+2niK'$ beliebig oft vermehrt oder auch vermindert wird, sofern nur das Verhältniſs $\mu=\frac{m}{n}$ unverändert bleibt. Der Ausdruck ist insofern periodisch und der Umfang einer jeden Periode $2\mu K+2iK'$, da $2mK+2niK'=n(2\mu K+2iK')$ ist.

Setzt man für μ den Werth $\frac{m}{n}$ in der Formel wieder an die Stelle, und schreibt man für

$\frac{(u+2mK+2niK')^2-u^2}{2}$ wieder $(2u+2mK+2niK')(mK+niK)$,

so verwandelt sich die Formel in

$$\operatorname{lm}(u+2mK+2niK')+\frac{n\pi i(u+mK+niK')-2E(mK+niK')(u+mK+niK')}{K}$$
$$=\operatorname{lm}u-\log((-1)^{n(m-1)}),$$

oder auch

$$2.\quad \operatorname{lm}(u+2mK+2niK')=$$
$$\operatorname{lm}u+\frac{2E(mK+niK')-n\pi i}{K}.(u+mK+niK')+\log((-1)^{n(m-1)}).$$

Setzt man in dieser Formel $n=0$, so erhält man die Gleichung (2.) des §. 74.; setzt man aber $m=0$, so erhält man die Gleichung (2.) des §. 79.

§. 81.

Zurückführung der Modular-Logarithmen mit den Moduln $\frac{1}{k}$ und $\frac{ik}{k'}$ auf eben solche Functionen mit dem Modul k.

Im §. 68. wurde gefunden $\operatorname{el}\left(ku,\frac{1}{k}\right)=\frac{\operatorname{el}u-k'^2.u}{k}$. Wird diese Gleichung mit $k\partial u$ multiplicirt und so integrirt, dafs für $u=0$ beide Seiten der Gleichung verschwinden, so erhält man auf der Stelle die einfache Gleichung

$$1.\quad \operatorname{lm}\left(ku,\frac{1}{k}\right)=\operatorname{lm}u-k'^2.\frac{u^2}{2}.$$

Setzen wir in dieser Formul ku gleich dem Modular-Quadranten $k(K-iK')$ für den Modul $\frac{1}{k}$, so verwandelt sich der Ausdruck auf der rechten Seite in

$$\operatorname{lm}(K-iK')-k'^2.\frac{(K-iK')^2}{2}.$$

Substituiren wir hier in $\operatorname{lm}(K-iK')=\frac{EK+E'K'-K'^2}{2}+\log\sqrt{\frac{k}{k'}}-EK'.i$ (nach §. 75.), und $\frac{k'^2(K-iK')^2}{2}=\frac{k'^2K^2-k'^2K'^2}{2}-ik'^2KK'$, so erhalten wir schon

$$2.\quad \frac{K(E-k'^2K)+K'(E'-k^2K')}{2}+\log\sqrt{\frac{k}{k'}}-iK'(E-k'^2K),$$

als Ausdruck des Werthes, in welchen $\operatorname{lm}K$ *übergeht, wenn* $\frac{1}{k}$ *statt des Moduls* k *gesetzt wird.*

Wir leiten diesen Ausdruck, welchen wir mit $\mathfrak{K}$ bezeichnen, noch auf eine andere Art her. Nach §. 73. Formel (7.) ist $\mathrm{lm}\, K = \frac{EK}{2} + \log\sqrt{\frac{1}{k'}}$, und dieser Ausdruck mufs in $\mathfrak{K}$ übergehen, wenn man substituirt: $\frac{ik'}{k}$ für k', $\frac{E-k'^2.K+i(E'-k^2K')}{k}$ für E (nach §. 68.) und $k(K-iK')$ für K. Wird diese Substitution ausgeführt, so erhält man:

$$\mathfrak{K} = \frac{K(E-k'^2K)+K'(E'-k^2K')}{3} + \log\sqrt{\frac{k}{k'}} + i\left(\frac{K(E'-k^2K')-K'(E-k'^2K)}{2}\right) - \log\sqrt{i}.$$

Der reelle Theil dieses Ausdrucks, welchen wir mit A bezeichnen, ist

$$A = \frac{K(E-k'^2K)+K'(E'-k^2K')}{2} + \log\sqrt{\frac{k}{k'}}.$$

Er stimmt schon mit dem reellen Theile des Ausdrucks (2.) überein. Setzen wir ferner

$$p = K(E'-k^2K') \quad \text{und} \quad q = K'(E-k'^2K),$$

so ist

$$\mathfrak{K} = A + i\left(\frac{p-q}{2}\right) - \log\sqrt{i} = A + i\left(\frac{p-q}{2}\right) - \frac{\pi i}{4}.$$

Wenn man aber p und q addirt, so erhält man

$$p+q = KE' - k^2KK' + EK' - k'^2KK' = KE' + K'E - KK' = \tfrac{1}{2}\pi$$

nach §. 76.; also ist $p-q = \frac{1}{2}\pi - 2q$; und wird dieser Werth substituirt, so erhält man:

$$\mathfrak{K} = A + \frac{\pi i}{4} - qi - \frac{\pi i}{4} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{K} = A - qi,$$

und dieser Ausdruck ist mit (2.) einerlei, wenn man nur noch für A und q ihre Bedeutungen an die Stelle setzt.

Um nun auch den Modular-Logarithmen, $\mathrm{lm}\left(k'u, \frac{ik}{k'}\right)$ mit dem Modul $\frac{ik}{k'}$ auf den Modul k zurückzuführen, haben wir die Gleichung $\mathrm{el}\left(k'u, \frac{ik}{k'}\right) = \frac{E-\mathrm{elc}\,u}{k'} = \frac{\mathrm{el}\,u - k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u}{k'}$ des §. 68. mit $k'u$ zu multipliciren, und so zu integriren, dafs das Integral auf beiden Seiten für $u=0$ verschwindet. Dadurch erhalten wir den einfachen Ausdruck

$$3. \quad \mathrm{lm}\left(k'u, \frac{ik}{k'}\right) = \mathrm{lm}\,u + \log \mathrm{dn}\,u.$$

Der Modular-Logarithme des Quadranten für den Modul $\frac{ik}{k'}$ ist also $\mathrm{lm}\,K + \log k'$ oder auch

$$4. \quad \frac{EK}{2} + \log\sqrt{k'}.$$

Achter Abschnitt.

§. 82.

Zusammenhang unter den elliptischen Functionen der Argumente u, $\frac{1}{2}u$ und v mit den Moduln k und λ des §. 51.

Es ist nach §. 51. $\mathrm{dn}^2 v = \frac{2}{1+k'} \cdot \frac{k' + \mathrm{dn}\, u}{1+\mathrm{dn}\, u}$, oder nach §. 52. $\mathrm{dn}\, v = \frac{\mathrm{dn}\frac{1}{2}u + \mathrm{dnc}\frac{1}{2}u}{1+k'}$, oder endlich umgekehrt $\mathrm{dn}\frac{1}{2}u = \frac{\mathrm{dn}\, v + \lambda\, \mathrm{cn}\, v}{1+\lambda}$, nach §. 53. Von jeder dieser drei Formeln kann man ausgehen, wenn man die gesuchte Relation zwischen den Modular-Integralen der Argumente v und u (oder $\frac{1}{2}u$) mit den Moduln λ und k, welche durch die Gleichungen (1.) und (2.) des §. 51. mit einander verbunden sind, herleiten will. Wir gehen von der letzten Formel aus, weil sie am einfachsten zum Ziele führt, und beziehen also die Function $\mathrm{el}\, v$ auf den Modul λ, die Function $\mathrm{el}\, u$ und $\mathrm{el}(\frac{1}{2}u)$ aber auf den Modul k. Durch Quadrirung erhalten wir

$$\mathrm{dn}^2\tfrac{1}{2}u = \frac{\mathrm{dn}^2 v + 2\lambda\, \mathrm{cn}\, v\, \mathrm{dn}\, v + \lambda^2\, \mathrm{cn}^2 v}{(1+\lambda)^2},$$

oder da $\lambda^2 \mathrm{cn}^2 v = \mathrm{dn}^2 v - \lambda'^2$ ist, die wenig veränderte Formel

$$\mathrm{dn}^2\tfrac{1}{2}u = \frac{2\,\mathrm{dn}^2 v + 2\lambda\, \mathrm{cn}\, v\, \mathrm{dn}\, v - \lambda'^2}{(1+\lambda)^2}.$$

Da nun aber nach §. 51. $u = (1+\lambda).v$, also auch $\frac{\partial u}{2} = (1+\lambda).\frac{\partial v}{2}$ ist, so verwandelt sich jene Gleichung, wenn sie hiermit multiplicirt und dann integrirt wird, sogleich in die folgende:

$$\mathrm{el}\tfrac{1}{2}u = \frac{\mathrm{el}\, v + \lambda\, \mathrm{sn}\, v - \frac{1}{2}\lambda'^2.v}{1+\lambda}$$

oder

$$1. \quad 2.\mathrm{el}\tfrac{1}{2}u = \frac{2.\mathrm{el}\, v + 2\lambda\, \mathrm{sn}\, v - \lambda'^2.v}{1+\lambda}.$$

Aus dieser Relation leiten wir einen Ausdruck von $\mathrm{el}\, u$ selbst durch $\mathrm{el}\, v$ her. Da nämlich nach §. 69.

$$2.\mathrm{el}(\tfrac{1}{2}u) = \mathrm{el}\, u + (1-\mathrm{dn}\, u)\sqrt{\frac{1-\mathrm{cn}\, u}{1+\mathrm{cn}\, u}}, \text{ oder umgekehrt,}$$

$$\mathrm{el}\, u = 2.\mathrm{el}(\tfrac{1}{2}u) - (1-\mathrm{dn}\, u)\sqrt{\frac{1-\mathrm{cn}\, u}{1+\mathrm{cn}\, u}}$$

ist, so brauchen wir in den Ausdruck $(1-\mathrm{dn}\, u)\sqrt{\frac{1-\mathrm{cn}\, u}{1+\mathrm{cn}\, u}}$ nur die Modular-Functionen des Argumentes v einzuführen. Es ist aber nach §. 53.

$$\mathrm{cn}\, u = \frac{\mathrm{cn}\, v\, \mathrm{dn}\, v}{1+\lambda\, \mathrm{sn}^2 v} = \frac{(1-\lambda).\mathrm{cn}\, v\, \mathrm{dn}\, v}{\mathrm{dn}^2 v - \lambda\, \mathrm{cn}^2 v};$$

ferner ist $\quad \mathrm{dn}\,u = \frac{1-\lambda\,\mathrm{sn}^2 v}{1+\lambda\,\mathrm{sn}^2 v}$, also $1-\mathrm{dn}\,u = \frac{2\lambda\,\mathrm{sn}^2 v}{1+\lambda\,\mathrm{sn}^2 v}$, und

$$\mathrm{sn}\,u = \frac{(1+\lambda)\,\mathrm{sn}\,v}{1+\lambda\,\mathrm{sn}^2 v}, \text{ also } \frac{1-\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{sn}\,u} = \frac{2\lambda}{1+\lambda}.\mathrm{sn}\,v.$$

Da nun aber $(1-\mathrm{dn}\,u).\sqrt{\frac{1-\mathrm{cn}\,u}{1+\mathrm{cn}\,u}} = \frac{1-\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{sn}\,u}(1-\mathrm{cn}\,u)$ und also $= \frac{2\lambda}{1+\lambda}\mathrm{sn}\,v - \frac{2\lambda}{1+\lambda}.\mathrm{sn}\,v\;\mathrm{cn}\,u$ ist, so erhält man durch die Substitution dieses Werthes:

$$2.\quad \begin{cases} \mathrm{el}\,u = \dfrac{2.\mathrm{el}\,v - \lambda'^2.v + 2\lambda\,\mathrm{sn}\,v\;\mathrm{cn}\,u}{1+\lambda} \quad \text{oder} \\[2ex] \mathrm{el}\,u = \dfrac{2.\mathrm{el}\,v - \lambda'^2.v + \dfrac{2\lambda\,\mathrm{sn}\,v\;\mathrm{cn}\,v\;\mathrm{dn}\,v}{1+\lambda\,\mathrm{sn}^2 v}}{1+\lambda}. \end{cases}$$

Wir kehren nun auch noch die Formeln (1.) und (2.) um. Der ersten gemäfs ist:

$$(1+\lambda).\mathrm{el}(\tfrac{1}{2}u) + \frac{\lambda'^2 v}{2} - \lambda\,\mathrm{sn}\,v = \mathrm{el}\,v.$$

Da aber $1+\lambda = \frac{2}{1+k'}$, $\lambda'^2 = \frac{4k'}{(1+k')^2}$ und $v = \frac{(1+k')}{2}.u$, also $\frac{\lambda'^2 v}{2} = \frac{k'u}{1+k'}$ und $\lambda\,\mathrm{sn}\,v = \sqrt{\frac{1-k'}{1+k'}}\sqrt{\frac{1-\mathrm{dn}\,u}{1+\mathrm{dn}\,u}} = \frac{k}{1+k'}\sqrt{\frac{1-\mathrm{dn}\,u}{1+\mathrm{dn}\,u}}$ ist, so verwandelt sich diese Formel in

$$3.\quad \mathrm{el}\,v = \frac{2.\mathrm{el}\left(\frac{u}{2}\right) + k'.u - k\sqrt{\frac{1-\mathrm{dn}\,u}{1+\mathrm{dn}\,u}}}{1+k'}.$$

Kehren wir auch die erste der Gleichungen (2.) um, so haben wir zunächst

$$\frac{1+\lambda}{2}.\mathrm{el}\,u + \frac{\lambda'^2 v}{2} - \lambda\,\mathrm{sn}\,v\;\mathrm{cn}\,u = \mathrm{el}\,v.$$

Da aber $\lambda\,\mathrm{sn}\,v = \frac{(1-k')\,\mathrm{sn}\,u}{1+\mathrm{dn}\,u}$ ist, so reducirt sich der Ausdruck auf

$$4.\quad \mathrm{el}\,v = \frac{\mathrm{el}\,u + k'u - \dfrac{k^2\,\mathrm{sn}\,u\;\mathrm{cn}\,u}{1+\mathrm{dn}\,u}}{1+k'} = \frac{\mathrm{el}\,u + k'u + \dfrac{\partial \log(1+\mathrm{dn}\,u)}{\partial u}}{1+k'}.$$

Die vorstehenden vier Gleichungen drücken nun den Zusammenhang zwischen den Modular-Integralen $\mathrm{el}\,u$, $\mathrm{el}(\frac{1}{2}u)$ und $\mathrm{el}\,v$, wovon sich die beiden ersten auf den Modul k beziehen, das letzte aber auf den Modul λ bezieht, aufs vollständigste aus.

Zusatz. Da sich in der Formel (3.) die Function $\mathrm{el}(\frac{1}{2}u)$ auf das Argument $\frac{1}{2}u$, die Modular-Function $\mathrm{dn}\,u$ aber auf das Argument u selbst bezieht, so mufs die Formel noch geändert werden. Nach §. 32. *a.* ist

aber, wenn man daselbst $2a = u$ setzt, $\frac{1-\operatorname{dn} u}{1+\operatorname{dn} u} = \frac{k^2 \operatorname{sn}^2 \frac{1}{2}u \operatorname{cn}^2 \frac{1}{2}u}{\operatorname{dn}^2 \frac{1}{2}u}$; daher verwandelt sich die Formel sogleich in

$$3.^* \quad \operatorname{el} v = \frac{2.\operatorname{el}(\frac{1}{2}u) + k'u - k^2 \operatorname{sn} \frac{1}{2}u \operatorname{snc} \frac{1}{2}u}{1+k'}.$$

83.

Relation zwischen $\operatorname{el}' u$ und $\operatorname{el}' v$, wenn u, v, und die Moduln k' und λ' dieselben sind wie im §. 51.

Die vier Formeln des §. 82. beziehen sich auf einen Zusammenhang zwischen den beiden Moduln λ und k und den conjugirten λ' und k', welcher durch die vier Gleichungen (1.) des §. 51. ausgedrückt wird. Nach §. 54. darf man aber gleichzeitig λ' für k, λ für k', k' für λ und k für λ' setzen, ohne daſs jene Gleichungen dadurch geändert würden. Nehmen wir auch dieselbe Veränderung mit der Gleichung $v = \frac{1+k'}{2}.u$ oder $u = (1+\lambda)v$ vor, setzen wir aber gleichzeitig v für u, damit die Functionen von v sich demnächst auf den Modul λ' beziehen und bezeichnen wir den dadurch geänderten Werth des früheren v mit x, so verwandelt sich die Gleichung $v = \frac{1+k'}{2}.u$ in $x = \frac{1+\lambda}{2}.v$, und, da $(1+\lambda)v = u$ ist, so ist $x = \frac{1}{2}u$. Man darf daher in den vorstehenden vier Gleichungen gleichzeitig λ' für k, λ für k', k' für λ, k für λ', v für u und $\frac{1}{2}u$ für v setzen, wenn dieselben Aenderungen auch gleichzeitig mit allen Formeln im §. 51., §. 52. und §. 53. vorgenommen werden. Setzt man $2v$ für u, so muſs man u für v setzen, da das Verhältniſs zwischen u und v constant ist. Macht man z. B. in der Gleichung (3.) des §. 82. die angezeigten Abänderungen, so verwandelt sie sich sofort in

$$\operatorname{el}' u = \frac{2\operatorname{el}' v + 2\lambda v - \lambda' \sqrt{\frac{1-\operatorname{dn}' 2v}{1+\operatorname{dn}' 2v}}}{1+\lambda},$$

oder, weil nach §. 32. *a.* $\sqrt{\frac{1-\operatorname{dn}' 2v}{1+\operatorname{dn}' 2v}} = \lambda' \operatorname{sn}' v \operatorname{snc}' v$ ist, in die folgende:

$$1. \quad \operatorname{el}' u = \frac{2\operatorname{el}' v + 2\lambda v - \lambda'^2 \operatorname{sn}' v \operatorname{snc}' v}{1+\lambda}.$$

Die Gleichungen des §. 52. verwandeln sich aber in

$$2. \begin{cases} \operatorname{sn}' u = (1+\lambda)\operatorname{sn}' v \operatorname{snc}' v, \\ \operatorname{cn}' u = \frac{\operatorname{dn}' v - \operatorname{dnc}' v}{1-\lambda}, \\ \operatorname{dn}' u = \frac{\operatorname{dn}' v + \operatorname{dnc}' v}{1+\lambda}, \\ \operatorname{am}' u = \frac{1}{2}\pi - \operatorname{amc}' v + \operatorname{am}' v, \\ \operatorname{tn}' u = \frac{(1+\lambda)\operatorname{tn}' v}{1-\lambda \operatorname{tn}'^2 v} = \frac{\sin 2\operatorname{am}' v}{\cos 2\operatorname{am}' v + k}. \end{cases}$$

Es wird aber nicht unzweckmäfsig sein, wenn wir die Richtigkeit dieser Gleichungen durch die ausgeführte Rechnung nachweisen. Es ist $\frac{\partial \log \operatorname{dn}' v}{\partial v} = -\lambda'^2 \operatorname{sn}' v \operatorname{snc}' v$, also $\frac{\partial (\lambda'^2 \operatorname{sn}' v \operatorname{snc}' v)}{\partial v} = +\operatorname{dn}'^2 v - \frac{\lambda^2}{\operatorname{dn}'^2 v} = +\operatorname{dn}'^2 v - \operatorname{dnc}'^2 v$ (nach §. 62. Formel 7.). Differenziiren wir also die Gleichung (1.), so bekommen wir $\partial u . \operatorname{dn}'^2 u = \partial v \left(\frac{2\operatorname{dn}'^2 v + 2\lambda - \operatorname{dn}'^2 v + \operatorname{dnc}'^2 v}{1+\lambda}\right)$ $= \partial v \left(\frac{\operatorname{dn}'^2 v + 2\lambda + \operatorname{dnc}'^2 v}{1+\lambda}\right) = \frac{\partial v (\operatorname{dn}' v + \operatorname{dnc}' v)^2}{1+\lambda}$. Setzen wir aber $\partial u = (1+\lambda).\partial v$, so verwandelt sich diese Gleichung in der That in $\operatorname{dn}'^2 u = \frac{(\operatorname{dn}' v + \operatorname{dnc}' v)^2}{(1+\lambda)^2}$ oder $\operatorname{dn}' u = \frac{\operatorname{dn}' v + \operatorname{dnc}' v}{1+\lambda}$, welche gerade die dritte von den Gleichungen (2.) ist, und woraus die übrigen folgen.

Die Gleichungen $v = \frac{1+k}{2}.u$, oder $u = (1+\lambda)v$, wie auch die Modular-Gleichungen $\lambda = \frac{1-k'}{1+k'}$, $\lambda' = \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}$, $k' = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}$ und $k = \frac{2\sqrt{\lambda}}{1+\lambda}$ sind wieder dieselben, wie vorhin.

§. 84.

Einfaches Verfahren der Berechnung der elliptischen Quadranten E und E' aus denselben Modular-Zahlen, welche zur Berechnung des Quadranten K dienen.

Bezeichnen wir den Modular-Quadranten für den verkleinerten Modul $\lambda < k$ mit K_1 und den elliptischen Quadranten für eben diesen Modul mit E_1, und setzen wir in der Gleichung (2.) des §. 82. das Argument $v = K_1$, also $u = K$, so verwandelt sich die Function $\operatorname{el} u$ in E und $\operatorname{el} v$ in E_1; daher haben wir die Gleichung

$$E = \frac{2.E_1 - \lambda'^2.K_1}{1+\lambda} \text{ und noch aufserdem } K = (1+\lambda).K_1.$$

Dividirt man jene Gleichung durch diese, so entsteht

$$\frac{E}{K}(1+\lambda)^2 = 2.\frac{E_1}{K_1} - \lambda'^2.$$

Wird das Verfahren der Verkleinerung des Moduls wiederholt, so werden die Gröfsen E, E_1, E_2, E_3 etc. immer gröfser und nähern sich der Grenze $\frac{1}{2}\pi$. Eben so werden die Gröfsen K, K_1, K_2, K_3 etc. immer kleiner, und auch sie nähern sich der Grenze $\frac{1}{2}\pi$. Setzen wir daher

$$t = 1 - \frac{E}{K}; \quad t_1 = 1 - \frac{E_1}{K_1}; \quad t_2 = 1 - \frac{E_2}{K_2}; \quad t_3 = 1 - \frac{E_3}{K_3} \text{ etc.,}$$

so nähern sich die Gröfsen t, t_1, t_2, t_3, t_4 etc., welche durch fortgesetzte Verkleinerung des Moduls entstehen, sehr rasch der Grenze Null. Führen wir t und t_1 in die obige Gleichung ein, so wird sie

$$(1+\lambda)^2.(1-t) = 2(1-t_1) - \lambda'^2$$

oder

$$t(1+\lambda)^2 = 2t_1 + (1+\lambda)^2 + \lambda'^2 - 2, \text{ und also } t(1+\lambda)^2 = 2t_1 + 2\lambda.$$

Setzen wir nun, wie in §. 55., $\lambda = k_1$ und wenden wir überhaupt dieselbe Bezeichnung, wie am angeführten Orte an, so ist $1+\lambda = \frac{2}{1+k'} = \frac{2m}{m+n} = \frac{m}{m_1}$ und $\lambda = \frac{m-n}{m+n} = \frac{m-n}{2m_1}$: folglich ist

$$t, m^2 = 2.t_1.m_1^2 + m_1(m-n).$$

Addiren wir aber die Gleichungen

$$\begin{aligned} m^2.t &= 2m_1^2.t_1 + (m-n)m_1, \\ 2m_2^2.t_1 &= 4m_2^2.t_2 + 2(m_1-n_1)m_2, \\ 4m_2^2.t_2 &= 8m_3^2.t_3 + 4(m_2-n_2)m_3, \\ 8m_3^2.t_3 &= 16m_4^2.t_4 + 8(m_3-n_3)m_4 \end{aligned}$$

u. s. w.,

so entsteht der Ausdruck

$$m^2.t = 2^{r+1}.m_{r+1}^2.t_{r+1} + (m-n)m_1 + 2(m_1-n_1)m_2 + 4(m_2-n_2)m_3 + 8(m_3-n_3)m_4 \ldots + 2^r.(m_r-n_r).m_{r+1}.$$

Nimmt man nun r grofs genug, oder eigentlich unendlich grofs, so ist $t_{r+1} = 0$, und man erhält, da auch $m^2 = 1$ ist, die sehr rasch convergirende Reihe

$$1. \quad t = (m-n)m_1 + 2(m_1-n_1)m_2 + 4(m_2-n_2)m_3 + 8(m_3-n_3)m_4 + 16(m_4-n_4)m_5 + \text{etc.}$$

Ist nach dieser Formel t berechnet, so hat man, da $\frac{E}{K} = 1 - t$ ist,

$$2. \quad E = K - K.t = \frac{\pi}{2\eta} - \frac{\pi}{2\eta}.t,$$

und da nach *Legendre's* Theoreme $\frac{E'}{K'} = \frac{\pi}{2KK'} + 1 - \frac{E}{K}$ ist, so hat man auch noch

$$3. \quad E' = \eta + K'.t,$$

in welcher Formel wieder η dieselbe Bedeutung hat, wie im §. 55., der Quadrant K' aber nach der Formel (3.) des §. 57. zu berechnen ist.

Anmerkung. Es ist zwar streng genommen t_{r+1} nur dann $=0$, wenn r unendlich ist; aber bei einem vorgeschriebenen Grade der Genauigkeit, welchem gemäfs der unvermeidliche Fehler $< \frac{1}{10^7}$ sein soll, ist schon t_5 hinlänglich genau $=0$, zumal da, wie wir voraussetzen, der Modul $k < \sin\frac{1}{4}\pi$ ist. Sind die beiden Modular-Quadranten K und K' bereits berechnet, so geht die Berechnung von E und E' aus denselben Modular-Zahlen sehr bequem von Statten.

§. 85.

Zweiter Beweis der Formel $\frac{E}{K} + \frac{E'}{K'} - 1 = \frac{\pi}{2KK'}$.

Setzen wir in den Formeln des §. 83. das Argument $v = K'_1$, also $\text{snc}'v = 0$, so wird $\text{sn}'u = 0$ oder $u = 2K'$, und da $u = (1+\lambda)v$ ist, so ist

$$2K' = (1+\lambda).K'_1,$$

und da sich die Formel (1.) des §. 83. nun verwandelt in $2E' = \frac{2E'_1 + 2\lambda.K'_1}{1+\lambda}$, so erhalten wir also durch die Division:

$$\frac{E'}{K'}(1+\lambda^2) = 2.\frac{E'_1}{K'_1} + 2\lambda.$$

Da ferner nach §. 84. $t(1+\lambda)^2 = 2.t_1 + 2\lambda$ ist, so erhalten wir, wenn diese Gleichung von der vorigen subtrahirt wird,

$$\left(\frac{E'}{K'} + \frac{E}{K} - 1\right)(1+\lambda)^2 = 2\left(\frac{E'_1}{K'_1} + \frac{E_1}{K_1} - 1\right).$$

Setzen wir nun zur Abkürzung

$$\mathfrak{K} = \frac{E'}{K'} + \frac{E}{K} - 1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{K}_1 = \frac{E'_1}{K'_1} + \frac{E_1}{K_1} - 1,$$

so ist jene Gleichung:

$$\mathfrak{K}(1+\lambda)^2 = 2.\mathfrak{K}_1.$$

Setzen wir nun wieder $\lambda = k_1$, wie im §. 55., und also $1+\lambda = \frac{2}{1+k'} = \frac{2m}{m+n} = \frac{m}{m_1}$, so ist

$$\mathfrak{K}.m^2 = 2m_1^2.\mathfrak{K}_1,$$

eben so ist

$$2\mathfrak{K}_1.m_1^2 = 2^2m_2^2.\mathfrak{K}_2, \quad 2^2.\mathfrak{K}_2.m_2^2 = 2^3m_3^2.\mathfrak{K}_3, \quad 2^3.\mathfrak{K}_3.m_3^2 = 2^4.m_4^2.\mathfrak{K} \text{ u. s. w.}$$

Werden diese Gleichungen mit einander multiplicirt, so entsteht

$$\mathfrak{K}.m^2 = 2^r.m_r^2.\mathfrak{K}_r.$$

Ist nun aber r grofs genug, so ist $m_r = \frac{\frac{1}{2}\pi}{K}$; ferner ist $\mathfrak{K}_r = \frac{E'_r}{K'_r} + \frac{E_r}{K_r} - 1$, und da $\frac{E_r}{K_r} = \frac{\frac{1}{2}\pi}{\frac{1}{2}\pi} = 1$, ferner $E'_r = 1$, also $\mathfrak{K}_r = \frac{1}{K'_r}$ wird, so ist $\mathfrak{K} = 2^r . \frac{(\frac{1}{2}\pi)^2}{K^2} . \frac{1}{K'_r} = \frac{\frac{1}{2}\pi}{K^2} . 2^r . \frac{K_r}{K'_r}$. Da aber auch nach §. 57. $2^r . \frac{K_r}{K'_r} = \frac{K}{K'}$ ist, so erhalten wir durch die Substitution dieses Werthes: $\mathfrak{K} = \frac{\frac{1}{2}\pi}{K^2} . \frac{K}{K'}$ oder auch $\mathfrak{K} = \frac{\pi}{2KK'}$; was bewiesen werden sollte.

Zusatz zu §. 85., zu §. 84. und §. 59. Die Gröfse $2^r . m_r$ kann leicht unmittelbar durch die auf einander folgenden immer kleiner werdenden Moduln k, k_1, k_2, k_3, k_4 etc. ausgedrückt werden. Es ist offenbar

$$m_r = \frac{m_1}{m} . \frac{m_2}{m_1} . \frac{m_3}{m_2} \dots \frac{m_r}{m_{r-1}}, \text{ oder auch}$$

$$2^r . m_r = \frac{m+n}{m} . \frac{m_1+n_1}{m_1} . \frac{m_2+n_2}{m_2} \dots \frac{m_{r-1}+n_{r-1}}{m_{r-1}} \text{ und also}$$

$$1. \quad 2^r . m_r = (1+k')(1+k'_1)(1+k'_2) \dots (1+k'_{r-1}).$$

Ferner ist $1+k' = \frac{2}{1+k_1}$ und $1+k_1 = \frac{2\sqrt{k_1}}{k}$, also $1+k' = \frac{k}{\sqrt{k_1}}$; eben so ist $1+k'_1 = \frac{k_1}{\sqrt{k_2}}$, u. s. w. Daher erhalten wir durch die Substitution dieser Werthe:

$$2^r . m_r = \frac{k}{\sqrt{k_1}} . \frac{k_1}{\sqrt{k_2}} . \frac{k_2}{\sqrt{k_3}} \dots \frac{k_{r-1}}{\sqrt{k_r}} \text{ oder auch}$$

$$2. \quad 2^r . m_r = \frac{k}{k_r} \sqrt{(k_1 k_2 k_3 k_4 \dots k_r)}.$$

Wir benutzen diese Formel noch zur Umformung der Formel (1.) im §. 84. Erheben wir dieselbe zum Quadrate, so erhalten wir, nach Fortschaffung des Nenners:

$$k^2 . k_1 . k_2 . k_3 \dots k_r$$
$$= 4^r m_r^2 k_r^2 = 4^r (m_r^2 - m_r^2 k_r'^2) = 4^r (m_r^2 - n_r^2) = 4^r . 2(m_r - n_r) . m_{r+1},$$

und also rückwärts:

$$2^r (m_r - n_r) . m_{r+1} = \frac{k^2 k_1 k_2 k_3 \dots k_r}{2^{r+1}}.$$

Wird dieser Werth in der Reihe (1.) des §. 84. benutzt, so verwandelt sie sich in

$$t = \frac{k^2}{2} + \frac{k^2 k_1}{4} + \frac{k^2 k_1 k_2}{8} + \frac{k^2 k_1 k_2 k_3}{16} + \frac{k^2 k_1 k_2 k_3 k_4}{32} + \text{etc. oder auch in}$$

$$3. \quad t = \frac{k^2}{2}\left(1 + \frac{k_1}{2} + \frac{k_1 k_2}{4} + \frac{k_1 k_2 k_3}{8} + \frac{k_1 k_2 k_3 k_4}{16} + \frac{k_1 k_2 k_3 k_4 k_5}{32} + \text{etc.}\right).$$

Ist der Modul k selbst schon sehr klein, so hat man also näherungsweise $t=\frac{k^2}{2}$ oder $t=\frac{k^2}{2}+\frac{k^2 k_1}{2}$; u. s. w. Ferner ist $1+k'=\frac{2\sqrt{k'}}{k'_1}$, $1+k'_1=\frac{2\sqrt{k'_1}}{k'_2}$, $1+k'_2=\frac{2\sqrt{k'_2}}{k'_3}$ u. s. w. Werden diese Werthe in der Formel (1.) substituirt, so verwandelt sie sich in

$$3.\quad m_r=\frac{\sqrt{k'}}{k'_1}\cdot\frac{\sqrt{k'_1}}{k'_2}\cdot\frac{\sqrt{k'_2}}{k'_3}\cdots\frac{\sqrt{k'_{r-2}}}{k'_r}=\frac{\sqrt{k'}}{k'_r\sqrt{(k'_1\cdot k'_2\cdot k'_3\cdots k'_{r-1})}},$$

oder da $m_r.k'_r=n_r$ ist, in den Ausdruck

$$4.\quad n_r=\sqrt{\frac{k'}{k'_1 k'_2 . k'_3 . k'_4 \ldots k'_{r-1}}},$$

woraus, wenn r unendlich genommen wird, folgt:

$$5.\quad \eta=\sqrt{\frac{k'}{k'_1 k'_2 k'_3 k'_4 k'_5\ldots}}=\frac{\pi}{2K}.$$

Die Factoren im Nenner nähern sich sehr rasch der Grenze Eins.

Nach §. 59. ist $\delta_r=\frac{m_{r-1}-n_{r-1}}{2}.\operatorname{sn}u_r=\frac{m_{r-1}}{2}.(1-k'_{r-1}).\operatorname{sn}u_r$ und nach Formel (2.) verwandelt sich dieser Ausdruck in

$$\delta_r=\frac{k}{2^r}\cdot\frac{1-k'_{r-1}}{k_{r-1}}\sqrt{(k_1 k_2 k_3\ldots k_{r-1})}.\operatorname{sn}u_r.$$

Da ferner

$$\frac{1-k'_{r-1}}{k_{r-1}}=\frac{1-k'_{r-1}}{\sqrt{(1-k'_{r-1})}\sqrt{(1+k'_{r-1})}}=\sqrt{\frac{1-k'_{r-1}}{1+k'_{r-1}}}=\sqrt{k_r}$$

nach §. 51. ist, so ist also

$$6.\quad \delta_r=\frac{k}{2^r}\sqrt{(k_1 k_2 k_3\ldots k_r)}.\operatorname{sn}u_r.$$

86.

Erste Art der Berechnung von $\operatorname{el}u$ und $\operatorname{el}'u$ aus $\operatorname{am}u$ und $\operatorname{am}'u$ in Anwendung derselben Modular-Zahlen, welche zur Berechnung von η oder K dienen.

In der Formel $\operatorname{el}u=\frac{2\operatorname{el}v-\lambda'^2 v+2\lambda\operatorname{sn}v\operatorname{cn}u}{1+\lambda}$ ist $v<u$ und auch $\lambda<k$. Verbinden wir diese Gleichung (2.) des §. 82. mit der Gleichung $\frac{E}{K}(1+\lambda)^2=2.\frac{E_1}{K_1}-\lambda'^2$, so werden wir diese Gleichung zuvor mit der Gleichung $u=(1+\lambda)v$ multipliciren müssen, um das Argument $\lambda'^2 v$ zu eliminiren und auch den gleichen Nenner $1+\lambda$ zu erhalten. Es ist

$$\frac{E}{K}u=\frac{2.\frac{E_1}{K_1}v-\lambda'^2 v}{1+\lambda},$$

und wird diese Gleichung von der obigen subtrahirt, so erhalten wir

$$\mathrm{el}\,u - \frac{E}{K}u = \frac{2\left(\mathrm{el}\,v - \frac{E_1}{K_1}v\right) + 2\lambda\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,u}{1+\lambda} \text{ oder auch}$$

$$1.\quad \mathrm{el}\,u - \frac{E}{K}u = (1+k')\left(\mathrm{el}\,v - \frac{E'}{K_1}v\right) + (1-k')\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,u.$$

Setzen wir in dieser Gleichung nun $k' = \frac{n}{m}$ und $\lambda = k_1$ also $k'_1 = \frac{n_1}{m_1}$; ferner $v = u_1$, und wenden wir überhaupt dieselbe Bezeichnung, wie im §. 55., §. 58. und §. 84. an, so haben wir die Gleichung

$$m\left(\mathrm{el}\,u - \frac{E}{K}u\right) = 2m_1\left(\mathrm{el}\,u_1 - \frac{E_1}{K_1}u_1\right) + (m-n)\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{sn}\,u_1.$$

Eben so ist

$$2m_1\left(\mathrm{el}\,u_1 - \frac{E_1}{K_1}u_1\right) = 4m_2\left(\mathrm{el}\,u_2 - \frac{E_2}{K_2}u_2\right) + 2(m_1-n_1)\,\mathrm{cn}\,u_1\,\mathrm{sn}\,u_2,$$

$$4m_2\left(\mathrm{el}\,u_2 - \frac{E_2}{K_2}u_2\right) = 8m_3\left(\mathrm{el}\,u_3 - \frac{E_3}{K_3}u_3\right) + 4(m_2-n_2)\,\mathrm{cn}\,u_2\,\mathrm{sn}\,u_3$$

u. s. w.

Wenn man diese Gleichungen addirt, so erhält man, da $m = 1$ ist,

$$\mathrm{el}\,u - \frac{E}{K}u = 2^r.m_r\left(\mathrm{el}\,u_r - \frac{E_r}{K_r}u_r\right) + (m-n)\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{sn}\,u_1 + 2(m_1-n_1)\,\mathrm{cn}\,u_1\,\mathrm{sn}\,u_2$$
$$+ 4(m_2-n_2)\,\mathrm{cn}\,u_2\,\mathrm{sn}\,u_3 \ldots + 2^{r-1}(m_{r-1}-n_{r-1})\,\mathrm{cn}\,u_{r-1}\,\mathrm{sn}\,u_r.$$

Wird nun r immer mehr vergröfsert, so nähert sich k_r der Grenze Null, also $\mathrm{el}\,u_r$ der Grenze u_r und also $\mathrm{el}\,u_r - \frac{E_r}{K_r}u_r$ der Grenze Null, da $E_r = K_r = \frac{1}{2}\pi$ wird. Daher haben wir die Reihe

$$\mathrm{el}\,u = \frac{E}{K}u + (m-n)\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{sn}\,u_1 + 2(m_1-n_1)\,\mathrm{cn}\,u_1\,\mathrm{sn}\,u_2 + 4(m_2-n_2)\,\mathrm{cn}\,u_2\,\mathrm{sn}\,u_3$$
$$+ 8(m_3-n_3)\,\mathrm{cn}\,u_3\,\mathrm{sn}\,u_4 + \text{etc.},$$

welche sehr rasch convergirt. Ist $m_r = n_r = \eta$ geworden, so ist auch das Glied, in welchem $m_r - n_r$ als Factor vorkommt, gleich Null, und da wir uns den Modul k als $< \sin\frac{1}{4}\pi$ vorstellen, so ist in gewöhnlichen Rechnungen schon $m_4 - n_4$ hinlänglich genau $= 0$. Setzen wir nun, wie im §. 58., wieder $\mathrm{dn}\,u = \frac{\triangle}{m}$, $\mathrm{dn}\,u_1 = \frac{\triangle_1}{m_1}$, so ist $\mathrm{sn}\,u_1 = \frac{2m_1}{m+\triangle}\,\mathrm{sn}\,u$, oder auch $\mathrm{sn}\,u_1 = \sqrt{\frac{1+k'}{1-k'}}\sqrt{\frac{1-\mathrm{dn}\,u}{1+\mathrm{dn}\,u}} = \sqrt{\frac{m+n}{m-n}}\sqrt{\frac{m-\triangle}{m+\triangle}}$; ferner ist $\mathrm{cn}\,u = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{dn}^2 u - k'^2}{1-k'^2}\right)} = \sqrt{\frac{\triangle^2 - n^2}{m^2 - n^2}}$, und also

$$(m-n)\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{sn}\,u_1 = \left(\frac{m-\triangle}{m+\triangle}.(\triangle^2-n^2)\right),$$

da aber auch nach §. 58. $\triangle_1^2 = \frac{n+\triangle}{m+\triangle} . m m_1$, also $\triangle_1^2 . \frac{(\triangle - n)(m - \triangle)}{m m_1}$ $= \frac{m-\triangle}{m+\triangle}(\triangle^2 - n^2)$ ist, so erhalten wir

$$(m-n)\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{sn}\,u_1 = \triangle_1 . \sqrt{\frac{(\triangle - n)(m-\triangle)}{m m_1}}.$$

In ähnlicher Weise können auch die übrigen Glieder dargestellt werden, und es ist also

$$\mathrm{el}\,u = \frac{E}{K}u + \triangle_1 . \sqrt{\frac{(m-\triangle)(\triangle - n)}{m m_1}} + 2\triangle_2 . \sqrt{\frac{(m_1 - \triangle_1)(\triangle_1 - n_1)}{m_1 m_2}}$$
$$+ 4\triangle_3 . \sqrt{\frac{(m_2 - \triangle_2)(\triangle_2 - n_2)}{m_2 m_3}} + 8\triangle_4 . \sqrt{\frac{(m_3 - \triangle_3)(\triangle_3 - n_3)}{m_3 m_4}} + \text{etc.}$$

Die in dieser Reihe vorkommenden Gröſsen $\triangle, \triangle_1, \triangle_2, \triangle_3$ etc. sind sammt den Modular-Zahlen dieselben, welche dem §. 58. gemäſs auch zur Berechnung von u aus $\mathrm{am}\,u = \varphi$ dienen. Das Verhältniſs $\frac{E}{K} = 1 - t$ muſs nach §. 84. berechnet werden. Durch die in einer geometrischen Progression stehenden Coefficienten 1, 2, 4, 8, 16 etc. wird die Convergenz wenig oder gar nicht verringert; sie bewirken höchstens einen Fehler in der letzten Decimalziffer des Resultates, welchen man dadurch, daſs man eine Decimalziffer mehr berechnet, leicht und sicher vermeiden kann.

Zusatz. Setzt man in den vorhin gefundenen Formeln ui für u, also auch $u_1 i$ für u_1, $u_2 i$ für u_2, $u_3 i$ für u_3 etc. und setzt man $\triangle = \sqrt{(1+k^2\mathrm{tn}'^2 u)}$, so verwandelt sich $\triangle = \sqrt{(m^2\mathrm{cn}^2 u + n^2\mathrm{sn}^2 u)}$ in $\triangle = \frac{\sqrt{(m^2 - n^2\mathrm{sn}'^2 u)}}{\mathrm{cn}' u}$, so daſs für $u = 0$ ist $\triangle = m$ und für $u = K'$, $\triangle = \frac{1}{0}$. Nun ist $\triangle$ nicht mehr zwischen den Grenzen m und n enthalten, sondern es ist immer $\triangle > n$ und also $\triangle - n$ positiv; aber $m - \triangle$ ist negativ. Die vorige Reihe verwandelt sich nun also in

$$\mathfrak{El}\,u = \frac{E}{K}u + \triangle_1\sqrt{\frac{(\triangle - m)(\triangle - n)}{m m_1}} + 2\triangle_2\sqrt{\frac{(\triangle_1 - m_1)(\triangle_1 - n_1)}{m_1 m_2}} + \text{etc.}$$

Da aber $\mathrm{el}'u = u + \mathrm{tn}'u\,\mathrm{dn}'u - \mathfrak{El}\,u = u + \triangle\,\mathrm{sn}'u - \mathfrak{El}\,u$ ist, so erhalten wir nun, wenn $\mathrm{am}'u = \psi$ gesetzt wird, und also $\triangle = \sqrt{(1 + k^2\tan^2\psi)}$, für $\mathrm{el}'u$ die folgende Reihe:

$$\mathrm{el}'u = \left(1 - \frac{E}{K}\right)u + \triangle\sin\psi - \triangle_1\sqrt{\frac{(\triangle - m)(\triangle - n)}{m m_1}} - 2\triangle_2\sqrt{\frac{(\triangle_1 - m_1)(\triangle_1 - n_1)}{m_1 m_2}}$$
$$- 4\triangle_3 . \sqrt{\frac{(\triangle_2 - m_2)(\triangle_2 - n_2)}{m_2 m_3}} - 8\triangle_4\sqrt{\frac{(\triangle_3 - m_3)(\triangle_3 - n_3)}{m_3 m_4}} - \text{etc.}$$

Die hierin vorkommenden Gröfsen haben dieselben Bedeutungen, wie im Zusatze zu §. 58.; die daselbst angegebenen Formeln dienen auch zur Berechnung des Argumentes u aus $\mathrm{am}'u = \psi$, und $1 - \frac{E}{K}$ ist nur noch nach §. 85. zu berechnen. Diese Formel ist anzuwenden, wenn der Modul $k' > \sin\frac{1}{4}\pi$ ist, weil dann $k < \sin\frac{1}{4}\pi$ ist.

§. 87.

Erste Art der Berechnung von $\mathrm{lm}\,u$ und $\mathrm{lm}'u$ aus $\mathrm{am}\,u$ und $\mathrm{am}'u$

Nach §. 86. ist

$$\mathrm{el}\,u = \frac{E}{K}u + m(1-k')\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{sn}\,u_1 + 2m_1(1-k'_1)\,\mathrm{cn}\,u_1\,\mathrm{sn}\,u_2 + \text{etc.}$$

Ferner ist nach §. 51. $\mathrm{sn}\,v = \mathrm{sn}\,u_1 = \frac{(1+k')\,\mathrm{sn}\,u}{1+\mathrm{dn}\,u}$ und also das Glied

$$m(1-k').\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{sn}\,u_1 = \frac{mk^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u}{1+\mathrm{dn}\,u} = \frac{-m\,\partial\log(1+\mathrm{dn}\,u)}{\partial u}.$$

Werden in gleicher Weise auch die folgenden Glieder umgeformt, so erhält man

$$\mathrm{el}\,u = \frac{E}{K}u - m.\frac{\partial\log(1+\mathrm{dn}\,u)}{\partial u} - 2m_1.\frac{\partial\log(1+\mathrm{dn}\,u_1)}{\partial u_1} + \text{etc.}$$

Da aber, wie im §. 57., $u = \frac{u_1}{m_1} = \frac{u_2}{m_2} = \frac{u_3}{m_3} = \text{etc.}$ und also auch

$$\partial u = \frac{\partial u_1}{m_1} = \frac{\partial u_2}{m_2} = \frac{\partial u_3}{m_3} = \frac{\partial u_4}{m_4} = \text{etc. ist,}$$

so findet man, wenn man jene Gleichung mit diesen multiplicirt und integrirt, auf der Stelle

$$\mathrm{lm}\,u = \frac{E}{K}\cdot\frac{u^2}{2} + \log\frac{2}{1+\mathrm{dn}\,u} + 2\log\frac{2}{1+\mathrm{dn}\,u_1} + 4\log\frac{2}{1+\mathrm{dn}\,u_2}$$
$$+ 8\log\frac{2}{1+\mathrm{dn}\,u_3} + 16\log\frac{2}{1+\mathrm{dn}\,u_4} + \text{etc.},$$

wenn die Constante so bestimmt wird, dafs das Integral für $u = 0$ verschwindet. Wird die Bezeichnung des §. 58. eingeführt, so ist

$$\mathrm{lm}\,u = \frac{E}{K}\cdot\frac{u^2}{2} + \log\frac{2m}{m+\triangle} + 2\log\frac{2m_1}{m_1+\triangle_1} + 4\log\frac{2m_2}{m_2+\triangle_2}$$
$$+ 8\log\frac{2m_3}{m_3+\triangle_3} + \text{etc.}$$

Es convergirt diese Reihe sehr rasch und die Rechnung nach ihr ist sehr bequem, vorausgesetzt, dafs auch das Argument u in ihr aus $\mathrm{am}\,u = \varphi$ nach den Formeln des §. 58. berechnet wird.

Zusatz. Wir leiten sogleich noch eine Reihe zur Berechnung von $\mathrm{lm}'u$ her, wenn $\mathrm{am}'u = \psi$ gegeben ist und die Modular-Zahlen, welche

zur Berechnung von η oder K dienen, wieder gebraucht werden sollen. Setzen wir $\triangle = \sqrt{(1+k^2\operatorname{tang}^2\psi)}$ und setzen ui für u, wodurch die Bedeutungen von $\triangle$, $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$ etc. geändert werden, während die Art ihrer Berechnung dieselbe bleibt, so erhalten wir sofort

$$\operatorname{lm}(ui) = -\frac{E}{K}\cdot\frac{u^2}{2} - \log\frac{m+\triangle}{2m} - 2\log\frac{m_1+\triangle_1}{2m_1} - 4\log\frac{m_2+\triangle_2}{2m_2} - \text{etc.}$$

und, da $\operatorname{lm}'u = \operatorname{lm}(ui) + \frac{u^2}{2} + \log\frac{1}{\cos'\psi}$ ist,

$$\operatorname{lm}'u = \left(1-\frac{E}{K}\right)\frac{u^2}{2} + \log\frac{1}{\cos\psi} - \log\frac{m+\triangle}{2m} - 2\log\frac{m_1+\triangle_1}{2m_1} - 4\log\frac{m_2+\triangle_2}{2m_2}$$
$$-8\log\frac{m_3+\triangle_3}{2m_3} - 16\log\frac{m_4+\triangle_4}{2m_4} - \text{etc.}$$

Auch diese Reihe convergirt desto rascher, je grösser der Modul k' ist.

§. 88.

Zweite Art der Berechnung von $\operatorname{el}u$ und $\operatorname{el}'u$ aus $\operatorname{am}u$ und $\operatorname{am}'u$.

Setzt man in der Gleichung $2.\operatorname{el}\frac{1}{2}u = \frac{2.\operatorname{el}v + 2\lambda\operatorname{sn}v - \lambda'^2 v}{1+\lambda}$ und also auch in der Gleichung $u = (1+\lambda)v$ für u an dessen Stelle $2u$, wie auch im §. 59. geschehen ist, so werden diese Gleichungen:

$$2\operatorname{el}u = \frac{2.\operatorname{el}v - 2\lambda'^2 v + 2\lambda\operatorname{sn}v}{1+\lambda} \quad \text{und} \quad 2u = (1+\lambda)v.$$

Ferner ist

$$\frac{E}{K}(1+\lambda)^2 = 2.\frac{E_1}{K_1} - \lambda'^2 \text{ und also } 2.\frac{E}{K}u = \left(2.\frac{E_1}{K_1}v - \lambda'^2 v\right):(1+\lambda).$$

Wird diese Gleichung von der obigen subtrahirt, so entsteht

$$\operatorname{el}u - \frac{E}{K}u = \frac{\operatorname{el}v - \frac{E_1}{K_1}v + \lambda\operatorname{sn}v}{1+\lambda}.$$

Setzen wir nun $\lambda = k_1$, ferner $v = u$, und wenden überhaupt die Bezeichnung des §. 59. an, so ist $\lambda = \frac{m-n}{m+n}$ und $1+\lambda = \frac{2m}{m+n} = \frac{m}{m_1}$, also $\frac{\lambda}{1+\lambda} = \frac{m-n}{2m}$, und folglich

$$m\left(\operatorname{el}u - \frac{E}{K}u\right) = m_1\left(\operatorname{el}u_1 - \frac{E_1}{K_1}u_1\right) + \frac{m-n}{2}\operatorname{sn}u_1, \quad \text{oder auch}$$

$$m\left(\operatorname{el}u - \frac{E}{K}u\right) = m_1\left(\operatorname{el}u - \frac{E_1}{K_1}u_1\right) + \delta_1.$$

Aus dieser einfachen Gleichung schliefst man auf ähnliche Art, wie im §. 86., dafs $\operatorname{el}u - \frac{E}{K}u = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \text{etc.}$, also

$$\mathrm{el}\,u = \frac{E}{K}u + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \delta_5 + \text{etc.}$$

ist, wenn die Gröſsen δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 etc. nach den Formeln (3.) des §. 59. berechnet werden. Diese Formel ist sehr bequem, wenn man das Argument u nach Formel (4.) oder (5.) im §. 59. berechnet.

Zusatz. Setzt man ui für u, wie im Zusatze zu §. 59., so erhält man die Formel

$$\mathrm{el}'u = \left(1-\frac{E}{K}\right)u + \nabla\sin\psi - \delta_1 - \delta_2 - \delta_3 - \delta_4 - \delta_5 - \text{etc.},$$

wenn man den in ihr vorkommenden Gröſsen dieselben Bedeutungen giebt, welche sie im Zusatze zu §. 59. haben. Das Argument u wird man aus $\mathrm{am}'u = \psi$ nun ebenfalls nach den Formeln (9.) oder (10.) am angeführten Orte berechnen. Die Convergenz dieser Formel für $\mathrm{el}'u$ ist desto gröſser, je gröſser der Modul k' von $\mathrm{el}'u$ ist.

§. 89.

Zweite Art der Berechnung von $\mathrm{lm}\,u$ und $\mathrm{lm}'u$ aus $\mathrm{am}\,u$ und $\mathrm{am}'u$.

Nach §. 88. ist

$$\mathrm{el}\,u = \frac{E}{K}.u + \frac{m(1-k')}{2}.\mathrm{sn}\,u_1 + \frac{m_1(1-k_1')}{2}.\mathrm{sn}\,u_2 + \frac{m_2(1-k_2')}{2}.\mathrm{sn}\,u_3 + \text{etc.}$$

Da aber nach §. 59. $\mathrm{sn}\,u_1 = (1+k')\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u$ ist, so kann diese Reihe auch also dargestellt werden:

$$\mathrm{el}\,u = \frac{E}{K}u + \frac{m}{2}.\frac{k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u} + \frac{m_1}{2}.\frac{k_1^2\,\mathrm{sn}\,u_1\,\mathrm{cn}\,u_1}{\mathrm{dn}\,u_1} + \frac{m_2}{2}.\frac{k_2^2\,\mathrm{sn}\,u_2\,\mathrm{cn}\,u_2}{\mathrm{dn}\,u_2} + \text{etc.}$$

Da nun ferner $u = \frac{1}{1+k'}u_1$, also $u = \frac{m}{2m_1}u_1$ ist, so ist

$$\frac{u}{m} = \frac{u_1}{2m_1} = \frac{u_2}{4m_2} = \frac{u_3}{8m_3} = \text{etc.}$$

und also auch

$$\partial u = \frac{\partial u_1}{2m_1} = \frac{\partial u_2}{4m_2} = \frac{\partial u_3}{8m_3} = \text{etc.}$$

Wird die vorige Reihe hiermit multiplicirt und dann integrirt, so entsteht

$$\mathrm{lm}\,u = \frac{E}{K}.\frac{u^2}{2} + \tfrac{1}{2}\log\frac{1}{\mathrm{dn}\,u} + \tfrac{1}{4}\log\frac{1}{\mathrm{dn}\,u_1} + \tfrac{1}{8}\log\frac{1}{\mathrm{dn}\,u_2} + \text{etc.},$$

oder auch mit Benutzung der Gröſsen ∇, ∇_1, ∇_2, ∇_3 etc. des §. 59. die Reihe

$$\mathrm{lm}\,u = \frac{E}{K}.\frac{u^2}{2} + \tfrac{1}{2}\log\frac{m}{\nabla} + \tfrac{1}{4}\log\frac{m_1}{\nabla_1} + \tfrac{1}{8}\log\frac{m_2}{\nabla_2} + \tfrac{1}{16}\log\frac{m_3}{\nabla_3} + \text{etc.}$$

Zusatz. Setzt man, wie im Zusatze zu §. 59., in der vorigen Reihe ui für u und benutzt die Formel (6.) des §. 72., so erhält man

noch auf der Stelle die Reihe

$$\text{lm}'u = \left(1-\frac{E}{K}\right).\frac{u^2}{2} + \log\frac{1}{\cos\psi} - \tfrac{1}{2}\log\frac{\nabla}{m} - \tfrac{1}{4}\log\frac{\nabla_1}{m_1} - \tfrac{1}{8}\log\frac{\nabla_2}{m_2}$$
$$- \tfrac{1}{16}\log\frac{\nabla_3}{m_3} - \text{etc.},$$

in welcher die Gröfsen ∇, ∇_1, ∇_2 etc. dieselben Bedeutungen haben, wie im Zusatze zu §. 59., und in welcher das Argument u aus $\text{am}'u = \psi$ nach der Formel (9.), oder auch Formel (10.) im angeführten Zusatze, zu berechnen ist. Die Convergenz dieser Reihe ist desto rascher, je gröfser der Modul k' von $\text{lm}'u$ ist.

Neunter Abschnitt.

§. 90.

Differenzial-Gleichungen der ersten Ordnung für die Gröfsen $\arg\text{am}(\varphi) = u$, $\text{el}\,u$, K und E bei einer Aenderung des Moduls k.

Die Functionen $\arg\text{am}(\varphi)$ und $\text{el}\,u = \text{el}\,\text{am}(\varphi)$ können beide als Functionen der Amplitude φ, aber auch beide als Functionen des Moduls k angesehen werden. Es lassen sich also auch Differenzial-Gleichungen unter der Voraussetzung, dafs die Amplitude φ unveränderlich, der Modul k hingegen veränderlich sei, entwickeln. Setzen wir zur Abkürzung $\triangle = \sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}$ und $u = \arg\text{am}(\varphi)$, ferner $\text{el}\,u = \text{el}\,\text{am}(\varphi) = v$, so ist

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\triangle} \qquad \text{und} \quad v = \int_0^\varphi \triangle.\partial\varphi, \text{ und also}$$

$$\frac{\partial u}{\partial k} = \int_0^\varphi \frac{\partial\left(\frac{1}{\triangle}\right)}{\partial k}.\partial\varphi \text{ und } \frac{\partial v}{\partial k} = \int_0^\varphi \frac{\partial\triangle}{\partial k}.\partial\varphi,$$

weil φ und k ganz unabhängig von einander sind. Das Differenzial von $\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}$, unter Voraussetzung der Veränderlichkeit von k, ist $\frac{-k\partial k.\sin^2\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi}}$, also

$$\frac{\partial\triangle}{\partial k} = \frac{-k\sin^2\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}} = \frac{-k^2\sin^2\varphi}{k\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{\triangle^2-1}{k\triangle}, \text{ folglich}$$

$$\frac{\partial\triangle}{\partial k} = \frac{1}{k}\left(\triangle - \frac{1}{\triangle}\right), \text{ und da } \frac{\partial\left(\frac{1}{\triangle}\right)}{\partial k} = -\frac{\partial\triangle}{\partial k} : \triangle^2 \text{ ist, so ist}$$

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{\triangle}\right)}{\partial k} = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{\triangle^3} - \frac{1}{\triangle}\right).$$

Werden diese Werthe substituirt, so erhalten wir zunächst

$$\frac{\partial u}{\partial k} = \frac{1}{k}.\int_0^\varphi \frac{\partial \varphi}{\Delta^3} - \frac{1}{k}.\int_0^\varphi \frac{\partial \varphi}{\Delta},$$

$$\frac{\partial v}{\partial k} = \frac{1}{k}.\int_0^\varphi \partial \varphi . \Delta - \frac{1}{k}.\int_0^\varphi \frac{\partial \varphi}{\Delta}.$$

Die vier in diesen Formeln vorkommenden Integrale verwandeln sich, da $\varphi = \operatorname{am} u$ und also $\partial \varphi = \operatorname{dn} u . \partial u$, folglich $\frac{\partial \varphi}{\Delta} = \partial u$ ist, sofort in

$$\frac{\partial u}{\partial k} = \frac{1}{k}.\int_0^u \frac{\partial u}{\operatorname{dn}^2 u} - \frac{u}{k}, \qquad \frac{\partial v}{\partial k} = \frac{1}{k}.v - \frac{u}{k}.$$

Wird die Formel (3.) des §. 64. benutzt, so ist

$$k.\frac{\partial u}{\partial k} = \frac{v - k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{snc} u}{k'^2} - u = \frac{1}{k'^2}\left(v - k^2.\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta}\right) - u \text{ und}$$

$$k.\frac{\partial v}{\partial k} = v - u.$$

Stellt man diese Gleichungen wie folgt dar:

$$1.\quad u = v - k.\frac{\partial v}{\partial k} = \operatorname{el} u - k.\frac{\partial \operatorname{el} u}{\partial k},$$

$$2.\quad v = k'^2\left(u + k.\frac{\partial u}{\partial k}\right) + k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{snc} u = \operatorname{el} u;$$

so dient die erste dazu, um aus einem analytischen Ausdrucke von $\operatorname{el} u$ oder v durch k den analytischen Ausdruck von $u = \arg\operatorname{am}(\varphi)$ herzuleiten. Die zweite Gleichung dagegen zeigt, wie aus einem analytischen Ausdrucke von $u = \arg\operatorname{am}(\varphi)$ der analytische Ausdruck von $v = \operatorname{el} u$ herzuleiten sei. Setzen wir $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, also $u = K$ und $v = E$, so verwandeln sich diese Gleichungen in

$$3.\quad K = E - k.\frac{\partial E}{\partial k},$$

$$4.\quad E = k'^2\left(K + k.\frac{\partial K}{\partial k}\right).$$

§. 91.

Differenzial-Gleichungen der zweiten Ordnung für die Abhängigkeit der Gröfsen $u = \arg\operatorname{am}(\varphi)$ und $\operatorname{el}\operatorname{am}(\varphi)$ vom Modul k.

Der Gleichung (2.) im §. 90. gemäfs ist

$$v = k'^2 u + (k - k^3).\frac{\partial u}{\partial k} + \frac{k^2 \sin\varphi\cos\varphi}{\Delta},$$

also

$$\frac{\partial v}{\partial k} = \frac{\partial\left(k'^2 v + (k-k^3).\frac{\partial u}{\partial k} + \frac{k^2\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta}\right)}{\partial k}.$$

Werden diese beiden Werthe in der Gleichung (1.) des §. 90. substituirt, so wird sie

$$u = k'^2 u + (k-k^3).\frac{\partial u}{\partial k} + \frac{k^2 \sin\varphi \cos\varphi}{\Delta} - \frac{k\,\partial\left(k'^2 u + (k-k^3)\frac{\partial u}{\partial k} + \frac{k^2 \sin\varphi\cos\varphi}{\Delta}\right)}{\partial k}.$$

Transportirt man das Glied $k'^2 u$, so ist die Gleichung durch k theilbar, und also

$$ku = k'^2.\frac{\partial u}{\partial k} + \frac{k \sin\varphi \cos\varphi}{\Delta} - \frac{\partial\left(k'^2 u + (k-k^3)\frac{\partial u}{\partial k} + \frac{k^2 \sin\varphi \cos\varphi}{\Delta}\right)}{\partial k}.$$

Diese Gleichung, welche nur noch die als Function von k angesehene Gröfse u enthält, ist offenbar eine Differenzial-Gleichung der zweiten Ordnung. Differenziirt man wirklich, so ist noch eine namhafte Reduction möglich. Da $\operatorname{am} u = \varphi$ als constant angesehen wird, so ist auch $\sin\varphi\cos\varphi$ constant, aber Δ veränderlich. Es ist nun aber

$$\frac{\partial\left(\frac{k^2}{\Delta}\right)}{\partial k} = \frac{2k.\Delta - k^2\left(\frac{\Delta^2-1}{k.\Delta}\right)}{\Delta^2} = \frac{2k\Delta - k\Delta + \frac{k}{\Delta}}{\Delta^2} = k\left(\frac{1}{\Delta} + \frac{1}{\Delta^3}\right),$$

also $\dfrac{\partial\left(\frac{k^2 \sin\varphi \cos\varphi}{\Delta}\right)}{\partial k} = k \sin\varphi \cos\varphi \left(\frac{1}{\Delta} + \frac{1}{\Delta^3}\right)$; ferner ist

$$\frac{\partial(k'^2 u)}{\partial k} = \frac{\partial u}{\partial k} - 2ku - k^2.\frac{\partial u}{\partial k} = k'^2.\frac{\partial u}{\partial k} - 2ku \quad \text{und}$$

$$\frac{\partial\left((k-k^3).\frac{\partial u}{\partial k}\right)}{\partial k} = (1-3k^2).\frac{\partial u}{\partial k} + (k-k^3).\frac{\partial^2 u}{\partial k^2}.$$

Werden diese Werthe substituirt, so entsteht die Gleichung

$$ku = k'^2.\frac{\partial u}{\partial k} + \frac{k\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta} - k'^2.\frac{\partial u}{\partial k} + 2ku - (1-3k^2).\frac{\partial u}{\partial k} - (k-k^3).\frac{\partial^2 u}{\partial k^2}$$
$$- \frac{k \sin\varphi \cos\varphi}{\Delta} - \frac{k \sin\varphi \cos\varphi}{\Delta^3}.$$

Läfst man die sich aufhebenden Glieder weg, so ist

$$(1-k^2).\frac{\partial^2 u}{\partial k^2} + \frac{1-3k^2}{k}.\frac{\partial u}{\partial k} - u + \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta^3} = 0,$$

oder auch

$$1. \quad (1-k^2).\frac{\partial^2 u}{\partial k^2} + \frac{1-3k^2}{k}.\frac{\partial u}{\partial k} - u + \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn}^3 u} = 0.$$

Noch leichter findet sich die Differenzial-Gleichung der zweiten Ordnung für die Gröfse $\operatorname{el} u$, wenn sie als eine Function des Moduls k betrachtet wird.

Nun ist der Werth $u = v - k.\frac{\partial v}{\partial k}$ und $\frac{\partial u}{\partial k} = \frac{\partial v}{\partial k} - \frac{\partial v}{\partial k} - k.\frac{\partial^2 v}{\partial k^2} = -k.\frac{\partial^2 v}{\partial k^2}$ in der Gleichung (2.) des §. 90. zu substituiren. Dadurch entsteht

$$v = (1-k^2)v - (k-k^3).\frac{\partial v}{\partial k} - k^2(1-k^2).\frac{\partial^2 v}{\partial k^2} + k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{snc} u, \quad \text{also}$$

$$(1-k^2).\frac{\partial^2 v}{\partial k^2} + \frac{1-k^2}{k}.\frac{\partial v}{\partial k} + v - \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\triangle} = 0, \quad \text{oder}$$

$$2. \quad (1-k^2).\frac{\partial^2 \operatorname{el} u}{\partial k^2} + \frac{1-k^2}{k}.\frac{\partial \operatorname{el} u}{\partial k} + \operatorname{el} u - \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u} = 0.$$

Setzen wir in den so eben entwickelten Gleichungen $u = K$, also auch $\operatorname{el} u = E$, so verwandeln sie sich in

$$3. \quad (1-k^2).\frac{\partial^2 K}{\partial k^2} + \frac{1-3k^2}{k}.\frac{\partial K}{\partial k} - K = 0 \quad \text{und}$$

$$4. \quad (1-k^2).\frac{\partial^2 E}{\partial k^2} + \frac{1-k^2}{k}.\frac{\partial E}{\partial k} + E = 0.$$

Zusatz. Da der Gleichung (1.) gemäfs

$$(k-k^3).\frac{\partial^2 u}{\partial k^2} + (1-3k^2).\frac{\partial u}{\partial k} - ku + \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn}^3 u} = 0 \quad \text{und}$$

$$\frac{\partial\left((k-k^3).\frac{\partial u}{\partial k}\right)}{\partial k} = (k-k^3).\frac{\partial^2 u}{\partial k^2} + (1-3k^2).\frac{\partial u}{\partial k}$$

ist, so kann die Gleichung (1.) auch also dargestellt werden:

$$\frac{\partial\left((k-k^3).\frac{\partial u}{\partial k}\right)}{\partial k} = ku - \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn}^3 u}.$$

§. 92.

Differenzial-Gleichungen der ersten und zweiten Ordnung für die Abhängigkeit der Gröfsen $u = \arg\operatorname{am}'(\psi)$ und $\operatorname{el}\operatorname{am}'(\psi)$ von dem Modul k.

Setzen wir in der Gleichung (1.) des §. 90. für u an dessen Stelle ui, so erhalten wir zunächst

$$1. \quad u = \mathfrak{El}\, u - k.\frac{\partial \mathfrak{El}\, u}{\partial k}.$$

Da aber $\mathfrak{El}\, u = u + \operatorname{tn}' u.\operatorname{dn}' u - \operatorname{el}' u = u + \sin\psi.\triangle - \operatorname{el}' u$ ist, wenn wir $\triangle = \sqrt{(1+k^2\operatorname{tang}^2\psi)}$ und also $\frac{\partial\triangle}{\partial k} = \frac{k\operatorname{tang}^2\psi}{\triangle}$ setzen, so ist

$$u = u + \sin\psi.\triangle - \operatorname{el}' u - k.\frac{\partial u}{\partial k} - \frac{k^2\sin\psi\operatorname{tang}^2\psi}{\triangle} + k.\frac{\partial \operatorname{el}' u}{\partial k};$$

und da $\sin\psi\left(\triangle - \frac{k^2\operatorname{tang}^2\psi}{\triangle}\right) = \frac{\sin\psi}{\triangle}$ ist, so reducirt sich die Gleichung

wieder auf

$$\frac{\sin\psi}{\triangle} - \text{el}'u - k.\frac{\partial u}{\partial k} + k.\frac{\partial\,\text{el}'u}{\partial k} = 0.$$

Da ferner $\triangle = \frac{\text{dn}'u}{\text{cn}'u}$, also $\frac{\sin\psi}{\triangle} = \frac{\text{sn}'u\,\text{cn}'u}{\text{dn}'u}$ ist, so kann die Gleichung auch also dargestellt werden:

$$2. \quad k.\frac{\partial u}{\partial k} = k.\frac{\partial\,\text{el}'u}{\partial k} - \text{el}'u + \frac{\text{sn}'u\,\text{cn}'u}{\text{dn}'u}.$$

Setzt man in der Gleichung (2.) des §. 90. auch ui für u, so wird sie

$$3. \quad \mathfrak{E}\mathfrak{l}u = k'^2\left(u + k.\frac{\partial u}{\partial k}\right) + \frac{k^2\,\text{tn}'u}{\text{dn}'u}, \text{ also}$$

$$-\text{el}'u + u + \text{tn}'u\,\text{dn}'u = k'^2 u + kk'^2.\frac{\partial u}{\partial k} + \frac{k^2\,\text{tn}'u}{\text{dn}'u}.$$

Da aber $\text{tn}'u\,\text{dn}'u - \frac{k^2\,\text{tn}'u}{\text{dn}'u} = \frac{k'^2\,\text{sn}'u\,\text{cn}'u}{\text{dn}'u}$ ist, so verwandelt sich die Gleichung in

$$4. \quad \text{el}'u = k^2 u - kk'^2.\frac{\partial u}{\partial k} + \frac{k'^2\,\text{sn}'u\,\text{cn}'u}{\text{dn}'u}.$$

Substituirt man den Werth $k.\frac{\partial u}{\partial k}$, welchen die Gleichung (2.) giebt, in der Gleichung (4.), so erhält man

$$\text{el}'u = k^2 u - kk'^2.\frac{\partial\,\text{el}'u}{\partial k} + k'^2\,\text{el}'u \quad \text{oder}$$

$$k^2 u = k^2\,\text{el}'u + kk'^2.\frac{\partial\,\text{el}'u}{\partial k}, \quad \text{oder auch}$$

$$5. \quad u = \text{el}'u + \frac{k'^2}{k}.\frac{\partial\,\text{el}'u}{\partial k}.$$

Diese Gleichung und die vorige (4.) lassen sich auch kürzer also herleiten. Vertauscht man in der Gleichung (1.) des §. 90. den Modul k mit k', so hat man

$$u = \text{el}'u - k'.\frac{\partial\,\text{el}'u}{\partial k'}.$$

Da nun aber $k^2 + k'^2 = 1$, also $k'\partial k' = -k\partial k$, und also $\frac{k'}{\partial k'} = \frac{-k'^2}{k\partial k}$ ist, so erhält man durch die Substitution dieses Werthes unmittelbar

$$u = \text{el}'u + \frac{k'^2}{k}.\frac{\partial\,\text{el}'u}{\partial k};$$

welches die Gleichung (5.) ist. Ganz eben so läfst sich die Gleichung (4.) aus der Gleichung (2.) des §. 90. herleiten. Setzen wir in den vorstehenden beiden Gleichungen $u = K'$, also $\text{el}'u = E'$, so bekommen wir noch

$$6. \quad K' = E' + \frac{k'^2}{k}.\frac{\partial E'}{\partial k} \quad \text{und}$$

$$7. \quad E' = k^2.K' - kk'^2.\frac{\partial K'}{\partial k}, \text{ woraus leicht folgt}$$

$$\frac{k.\partial(K'-E')}{\partial k} + E' = 0.$$

Wenn wir in der Gleichung (1.) des §. 91. für u setzen ui, so verwandelt sie sich sofort in

$$8. \quad (1-k^2).\frac{\partial^2 u}{\partial k^2} + \frac{1-3k^2}{k}.\frac{\partial u}{\partial k} - u + \frac{\text{sn}'u\,\text{cn}'u}{\text{dn}'^3 u} = 0$$

und hat nun mit der Gleichung (1.) des §. 91. selbst wieder grofse Aehnlichkeit. Setzen wir auch in der Gleichung (2.) des §. 91. für u an dessen Stelle ui, so verwandelt sie sich in

$$(1-k^2).\frac{\partial^2 \mathfrak{El}u}{\partial k^2} + \frac{1-k^2}{k}.\frac{\partial \mathfrak{El}u}{\partial k} + \mathfrak{El}u - \frac{\text{tn}'u}{\text{dn}'u} = 0.$$

Aus dieser Gleichung läfst sich bequem eine Differenzial-Gleichung der zweiten Ordnung für die Differenz $u - \text{el}'u$ herleiten. Da nämlich $\mathfrak{El}u = u - \text{el}'u + \text{tn}'u\,\text{dn}'u$ ist, so erhalten wir, wenn wir für den Augenblick $u - \text{el}'u = z$ und $\triangle = \sqrt{(1+k^2\text{tang}^2\psi)}$, also $\text{am}'u = \psi$ setzen, $\mathfrak{El}u = z + \sin\psi.\triangle$, also $\frac{\partial \mathfrak{El}u}{\partial k} = \frac{\partial z}{\partial k} + \frac{k\sin\psi\,\text{tang}^2\psi}{\triangle}$. Da ferner $\frac{\partial\left(\frac{k}{\triangle}\right)}{\partial k} = \frac{\triangle - \frac{k^2\,\text{tang}^2\psi}{\triangle}}{\triangle^2} = \frac{1}{\triangle^3}$ ist, so ist $\frac{\partial^2 \mathfrak{El}u}{\partial k^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial k^2} + \frac{\sin\psi\,\text{tang}^2\psi}{\triangle^3}$. Werden diese Werthe substituirt, so entsteht die Gleichung

$$(1-k^2).\frac{\partial^2 z}{\partial k^2} + \frac{1-k^2}{k}.\frac{\partial z}{\partial k} + z + \frac{k'^2\sin\psi\,\text{tang}^2\psi}{\triangle^3} + \frac{k'^2\sin\psi\,\text{tang}^2\psi}{\triangle}$$
$$+ \text{tn}'u\,\text{dn}'u - \frac{\text{tn}'u}{\text{dn}'u} = 0.$$

Die vier letzten Glieder der Gleichung haben den Factor $\text{tang}\,\psi = \text{tn}'u$ gemeinschaftlich. Lassen wir ihn für den Augenblick weg, so sind dieselben

$$\frac{k'^2\,\text{sn}'^2u\,\text{cn}'^2u}{\text{dn}'^3u} + \frac{k'^2\,\text{sn}'^2u}{\text{dn}'u} + \text{dn}'u - \frac{1}{\text{dn}'u} = \frac{k'^2\,\text{sn}'^2u\,\text{cn}'^2u}{\text{dn}'^3u},$$

und wird der Factor $\text{tn}'u$ wieder beigefügt, so haben wir die Gleichung

$$9. \quad (1-k^2).\frac{\partial^2(u-\text{el}'u)}{dk^2} + \frac{1-k^2}{k}.\frac{\partial(u-\text{el}'u)}{\partial k} + u - \text{el}'u + \frac{k'^2\,\text{sn}'^3u\,\text{cn}'u}{\text{dn}'^3u} = 0.$$

Man könnte aus dieser Gleichung leicht eine Differenzial-Gleichung von der zweiten Ordnung für die Gröfse $\text{el}'u$ in ihrer Abhängigkeit von k herleiten. Wir verfahren aber zu diesem Zwecke anders. Es ist $-k\,\partial k = k'\partial k'$, oder $\partial k' = -\frac{k}{k'}\partial k$, also $\frac{\partial\,\text{el}'u}{\partial k} = -\frac{k'}{k}.\frac{\partial\,\text{el}'u}{\partial k}$. Differenziiren wir noch einmal, so entsteht

$$\partial\left(\frac{\partial \mathrm{el}'u}{\partial k'}\right) = -\left(\frac{k'}{k}\cdot\frac{\partial^2 \mathrm{el}'u}{\partial k} + \frac{\partial \mathrm{el}'u}{\partial k}\cdot\frac{k\,\partial k' - k'\,\partial k}{k^2}\right) \text{ und also}$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial \mathrm{el}'u}{\partial k'}\right)}{\partial k'} = \frac{k'^2}{k^2}\cdot\frac{\partial^2 \mathrm{el}'u}{\partial k^2} - \frac{\partial \mathrm{el}'u}{\partial k}\cdot\frac{1}{k^3}.$$

Stellt man nun die Gleichung (2.) des §. 91., indem man zugleich die beiden conjugirten Modul mit einander vertauscht, also dar:

$$k^2\cdot\frac{\partial\left(\frac{\partial \mathrm{el}'u}{\partial k'}\right)}{\partial k'} + \frac{k^2}{k'}\cdot\frac{\partial \mathrm{el}'u}{\partial k'} + \mathrm{el}'u - \frac{\mathrm{sn}'u\,\mathrm{cn}'u}{\mathrm{dn}'u} = 0$$

und substituirt man hierin die vorhin angegebenen Differenzial-Verhältnisse, so erhält man

$$k'^2\cdot\frac{\partial^2 \mathrm{el}'u}{\partial k^2} - \frac{1}{k}\cdot\frac{\partial \mathrm{el}'u}{\partial k} - k\cdot\frac{\partial \mathrm{el}'u}{\partial k} + \mathrm{el}'u - \frac{\mathrm{sn}'u\,\mathrm{cn}'u}{\mathrm{dn}'u} = 0 \text{ oder}$$

$$10.\quad k'^2\cdot\frac{\partial^2 \mathrm{el}'u}{\partial k^2} - \frac{1+k^2}{k}\cdot\frac{\partial \mathrm{el}'u}{\partial k} + \mathrm{el}'u - \frac{\mathrm{sn}'u\,\mathrm{cn}'u}{\mathrm{dn}'u} = 0.$$

Setzen wir in den Gleichungen (8.), (9.) und (10.) $u = K'$, so haben wir noch

$$11.\quad (1-k^2)\cdot\frac{\partial^2 K'}{\partial k^2} + \frac{1-3k^2}{k}\cdot\frac{\partial K'}{\partial k} - K' = 0,$$

$$12.\quad (1-k^2)\cdot\frac{\partial^2(K'-E')}{\partial k^2} + \frac{1-k^2}{k}\cdot\frac{\partial(K'-E')}{\partial k} + K' - E' = 0,$$

$$13.\quad (1-k^2)\cdot\frac{\partial^2 E'}{\partial k^2} - \frac{1+k^2}{k}\cdot\frac{\partial E'}{\partial k} + E' = 0.$$

Zusatz. Vertauscht man auch in der Gleichung (9.) die beiden conjugirten Modul, so entsteht

$$k^2\frac{\partial\left(\frac{\partial(u-\mathrm{el}\,u)}{\partial k'}\right)}{\partial k'} + \frac{k^2}{k'}\cdot\frac{\partial(u-\mathrm{el}\,u)}{\partial k'} + u - \mathrm{el}\,u + \frac{k^2\,\mathrm{sn}^3 u\,\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}^3 u} = 0$$

und durch dasselbe Verfahren, wodurch die Gleichung (10.) hergeleitet wurde, findet man auch

$$(1-k^2)\cdot\frac{\partial^2(u-\mathrm{el}\,u)}{\partial k^2} - \frac{1+k^2}{k}\cdot\frac{\partial(u-\mathrm{el}\,u)}{\partial k} + u - \mathrm{el}\,u + \frac{k^2\,\mathrm{sn}^3 u\,\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}^3 u} = 0.$$

Wird also $u = K$ gesetzt, so haben wir noch

$$(1-k^2)\cdot\frac{\partial^2(K-E)}{\partial k^2} - \frac{1+k^2}{k}\cdot\frac{\partial(K-E)}{\partial k} + K - E = 0.$$

§. 93.

Dritter Beweis der Formel $KE' + K'E - KK' = \frac{1}{2}\pi$.

Die Formeln (3.) und (4.) des §. 90. und die Formeln (6.) und (7.) des §. 92. können auch also dargestellt werden:

$$1.\quad \frac{\partial E}{\partial k} = -\frac{1}{k}(K-E);\qquad \frac{\partial K}{\partial k} = \frac{1}{kk'^2}(E-k'^2K);$$

$$2.\quad \frac{\partial E'}{\partial k} = \frac{k}{k'^2}(K'-E');\qquad \frac{\partial K'}{\partial k} = -\frac{1}{kk'^2}(E'-k^2K');$$

woraus noch folgt

$$3.\quad \frac{\partial(K-E)}{\partial k} = \frac{kE}{k'^2} \quad\text{und}\quad \frac{\partial(K'-E')}{\partial k} = -\frac{E'}{k}.$$

Diese Formeln müssen immer beim Differenziiren angewandt werden, wenn in einer Gleichung Modular-Quadranten oder auch elliptische Quadranten vorkommen, welche als veränderlich betrachtet werden. In Anwendung dieser Formeln läfst sich, was *Legendre* selbst eingesehen hat, das von ihm gefundene merkwürdige Theorem beweisen, wodurch ein Zusammenhang unter den vier Quadranten K, K', E und E' ausgedrückt wird.

Es ist der obigen Formel gemäfs

$$\frac{K'\partial E}{\partial k} = -\frac{KK'}{k} + \frac{EK'}{k};\qquad \frac{E\partial K'}{\partial k} = -\frac{EE'}{kk'^2} + \frac{kEK'}{k'^2},$$

$$\frac{K\partial E'}{\partial k} = \frac{kKK'}{k'^2} - \frac{kKE'}{k'^2};\qquad \frac{E'\partial K}{\partial k} = \frac{EE'}{kk'^2} - \frac{KE'}{k}.$$

Durch die Addition dieser vier Gleichungen erhält man

$$\frac{K'\partial E + E\partial K' + K\partial E' + E'\partial K}{\partial k} = \frac{\partial(K'E + KE')}{\partial k} = \frac{KK'(k^2-k'^2) + EK' - KE'}{kk'^2}.$$

Ferner ist $\frac{K'\partial K}{\partial k} = \frac{EK'}{kk'^2} - \frac{KK'}{k}$ und $\frac{K\partial K'}{\partial k} = \frac{k}{k'^2}KK' - \frac{KE'}{kk'^2}$, also

$$\frac{K'\partial K + K\partial K'}{\partial k} = \frac{\partial(KK')}{dk} = \frac{KK'(k^2-k'^2) + EK' - KE'}{kk'^2};$$

folglich ist $\frac{\partial(K'E + KE') - \partial(KK')}{\partial k} = 0$. Integrirt man also, so entsteht

$$K'E + KE' - KK' = \text{const.}$$

Die Constante ist $= \frac{1}{2}\pi$, wie am Schlusse des §. 76. gezeigt worden ist.

§. 94.

Differenzial-Gleichung der ersten Ordnung für das Verhältnifs $\frac{E}{K}$, und Ausdruck desselben durch eine nach Potenzen von k fortschreitende Reihe.

Es ist $\partial\left(\frac{E}{K}\right) = \frac{K\partial E - E\partial K}{K^2} = \frac{\left(-\frac{K^2}{k} + \frac{KE}{k} - \frac{E^2}{kk'^2} + \frac{EK}{k}\right)\partial k}{K^2}$ (nach §. 93.). Dividirt man wirklich jedes Glied des Zählers durch den Nenner K^2

und setzt, wie im §. 84., das Verhältniſs $\frac{E}{K} = 1 - t$, so erhält man

$$-\frac{\partial t}{\partial k} = -\frac{1}{k} + \frac{1-t}{k} - \frac{(1-t)^2}{kk'^2} + \frac{1-t}{k} \text{ oder}$$

$$\frac{\partial t}{\partial k} = \frac{1}{k} - \frac{2(1-t)}{k} + \frac{(1-t)^2}{kk'^2} \text{ und also}$$

$$\frac{\partial t}{\partial k} = \frac{(1-2t)k}{k'^2} + \frac{t^2}{kk'^2}.$$

Stellt man sich die Gröſse t in eine nach Potenzen von k fortschreitende Reihe entwickelt vor, so kann man nach der im Zusatze zu §. 85. gefundenen Formel schlieſsen, daſs das Anfangs-Glied jener Reihe ebenfalls $\frac{k^2}{2}$ sein werde. Setzt man daher $t = \frac{k^2}{2} . v$, so wird das Anfangs-Glied einer nach Potenzen von k fortschreitenden Reihe für v die Einheit sein. Aus der Gleichung

$t = \frac{k^2}{2} . v$ folgt aber $\frac{\partial t}{\partial k} = \frac{k^2}{2} . \frac{\partial v}{\partial k} + kv$, $t^2 = \frac{k^4}{4} v^2$, also $\frac{t^2}{k} = \frac{k^3 v^2}{4}$, $1 - 2t = 1 - k^2 v$: daher haben wir die Gleichung

$$\frac{k^2}{2} . \frac{\partial v}{\partial k} + kv = \frac{(1-k^2 v)k}{k'^2} + \frac{k^3 v^2}{4k'^2} \text{ oder}$$

$$2k . \frac{\partial v}{\partial k} + 4v = \frac{4(1-k^2 v) + k^2 v^2}{k'^2}; \text{ also}$$

$$2(k-k^3) . \frac{\partial v}{\partial k} + 4(1-k^2)v - 4 + 4k^2 v) - k^2 v^2 = 0 \text{ oder}$$

$$2(k-k^3) . \frac{\partial v}{\partial k} + 4(v-1) - k^2 v^2 = 0.$$

Nach dieser Formel kann v ziemlich bequem in eine nach Potenzen von k fortschreitende Reihe entwickelt werden und dann hat man

$$\frac{E}{K} = 1 - \frac{k^2}{2} . v.$$

Die Rechnung wird noch etwas einfacher, wenn man eine Gröſse $x = \frac{k^2}{4}$ einführt. Dann ist rückwärts $k = 2\sqrt{x}$, und $\partial k = \frac{\partial x}{\sqrt{x}}$, also $\frac{2k}{\partial k} = \frac{4x}{\partial x}$: folglich ist

$$4x(1-4x) . \frac{\partial v}{\partial x} + 4(v-1) - 4xv^2 = 0, \text{ oder auch}$$

$$(1-4x) . \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{v-1}{x} - v^2 = 0.$$

Zusatz. Setzt man $v = 1 + \overset{1}{a}x + \overset{2}{a}x^2 + \overset{3}{a}x^3 + \overset{4}{a}x^4 +$ etc. und substituirt man diese Reihe in der gefundenen Gleichung, so hat man zur Bestimmung der unbekannten Coefficienten die folgenden Formeln:

$$
\begin{aligned}
2\overset{1}{a} &= 1, \\
3\overset{2}{a} &= (4.1+2)\overset{1}{a}, \\
4\overset{3}{a} &= (4.2+2)\overset{2}{a} + \overset{1}{a}{}^2, \\
5\overset{4}{a} &= (4.3+2)\overset{3}{a} + 2\overset{2}{a}\overset{1}{a}, \\
6\overset{5}{a} &= (4.4+2)\overset{4}{a} + 2\overset{3}{a}\overset{1}{a} + \overset{2}{a}{}^2, \\
7\overset{6}{a} &= (4.5+2)\overset{5}{a} + 2\overset{4}{a}\overset{1}{a} + 2\overset{3}{a}\overset{2}{a}, \\
8\overset{7}{a} &= (4.6+2)\overset{6}{a} + 2\overset{5}{a}\overset{1}{a} + 2\overset{4}{a}\overset{2}{a} + \overset{3}{a}{}^2, \\
9\overset{8}{a} &= (4.7+2)\overset{7}{a} + 2\overset{6}{a}\overset{1}{a} + 2\overset{5}{a}\overset{2}{a} + 2\overset{4}{a}\overset{3}{a}
\end{aligned}
$$

u. s. w.

und aus ihnen findet sich die Reihe

$$
v = 1 + \tfrac{1}{2}x + x^2 + \frac{41}{2^4}x^3 + \frac{59}{2^3}x^4 + \frac{727}{2^5}x^5 + \frac{1171}{2^4}x^6 + \frac{498409}{2^{11}}x^7 + \frac{848479}{2^{10}}x^8 + \text{etc.}
$$

Da nun $x = \frac{k^2}{2^2}$ und $t = \frac{k^2 v}{2}$ ist, so erhalten wir endlich, wenn wieder

$$
E = K - Kt \quad \text{und} \quad E' = \frac{\pi}{2K} + K'.t
$$

gesetzt wird (wie im §. 84.), für t die Reihe

$$
t = \frac{k^2}{2} + \frac{1}{2^4}k^4 + \frac{k^6}{2^5} + \frac{41k^8}{2^{11}} + \frac{59k^{10}}{2^{12}} + \frac{727k^{12}}{2^{16}} + \frac{1171k^{14}}{2^{17}} + \frac{498409k^{16}}{2^{26}} + \frac{848479k^{18}}{2^{27}} + \text{etc.},
$$

welche die Eigenthümlichkeit hat, daſs sämmtliche Nenner nur Potenzen der Zahl 2 sind. Werden diese Potenzen berechnet, so ist

$$
t = \frac{k^2}{2} + \frac{k^4}{16} + \frac{k^6}{32} + \frac{41k^8}{2048} + \frac{59k^{10}}{4096} + \frac{727k^{12}}{65536} + \frac{1171k^{14}}{131072} + \frac{498409k^{16}}{67008864} + \frac{848479k^{18}}{134017728} + \text{etc.}
$$

Da in wirklichen Anwendungen dieser Reihe $k^2 < \frac{1}{2}$ ist, so sieht man, daſs dieselbe immer ziemlich schnell convergirt.

§. 95.

Differenzial-Gleichung für das Verhältnifs $v=\frac{aE+b(K'-E')}{aK+bK'}$, wenn a und b ganz willkürliche, von k unabhängige Zahlen sind.

Setzen wir der Kürze wegen $\alpha'=aE+b(K'-E')$ und $\alpha=aK+bK'$, so ist nach §. 93.

$\frac{\partial\alpha'}{\partial k}=-\frac{a}{k}(K-E)-\frac{b}{k}.E'$, also $-k.\frac{\partial\alpha'}{\partial k}=a(K-E)+bE'$, oder auch $-k.\frac{\partial\alpha'}{\partial k}=\alpha-\alpha'$, und also

$$\frac{\partial\alpha'}{\partial k}=\frac{\alpha'-\alpha}{k}.$$

Ferner ist $\alpha-\alpha'=a(K-E)+bE'$, also $\frac{\partial(\alpha-\alpha')}{\partial k}=\frac{akE}{k'^2}+\frac{bk}{k'^2}(K'-E')$ $=\frac{k}{k'^2}.\alpha'$, oder $\frac{\partial\alpha}{\partial k}-\frac{\partial\alpha'}{\partial k}=\frac{k}{k'^2}.\alpha'$. Wird hierzu die vorige Gleichung addirt, so entsteht

$$\frac{\partial\alpha}{\partial k}=\frac{\alpha'-\alpha}{k}+\frac{k}{k'^2}\alpha'.$$

Da nun aber $\frac{\partial v}{\partial k}=\frac{\partial\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)}{\partial k}=\frac{\alpha\,\partial\alpha'-\alpha'\,\partial\alpha}{\alpha^2\,\partial k}$ ist, so setzen wir zusammen:

$$\alpha.\frac{\partial\alpha'}{\partial k}=\frac{\alpha\alpha'-\alpha^2}{k},$$

$$\alpha'.\frac{\partial\alpha}{\partial k}=\frac{-\alpha\alpha'+\alpha'^2}{k}+\frac{k}{k'^2}.\alpha'^2=-\frac{\alpha\alpha'}{k}+\frac{\alpha'^2}{kk'^2},$$

und also $\frac{\partial v}{\partial k}=\frac{\frac{-\alpha^2}{k}+\frac{2\alpha\alpha'}{k}-\frac{\alpha'^2}{kk'^2}}{\alpha^2}$. Dividirt man also jedes Glied des Zählers durch α^2, indem man v für $\frac{\alpha'}{\alpha}$ setzt, so entsteht die Gleichung

$$\frac{\partial v}{\partial k}=-\frac{1}{k}+\frac{2v}{k}-\frac{v^2}{kk'^2},$$

welche also für beliebige Werthe der Gröfsen a und b richtig ist. Das vollständige Integral dieser Differenzial-Gleichung ist also

$$v=\frac{aE+b(K'-E')}{aK+bK'}.$$

§. 96.

Ausdruck der Abhängigkeit einer Function der Gröfse $v=\frac{a'K+b'K'}{aK+bK'}$ vom Modul k durch eine Differenzial-Gleichung der ersten Ordnung.

Bezeichnen a, b, a', b' vier ganz willkürliche und also vom Modul k unabhängige Gröfsen, und setzen wir jetzt

$$\alpha = aK + bK', \qquad \alpha' = a'K + b'K',$$

also $v = \frac{\alpha'}{\alpha}$, so ist $\frac{\partial v}{\partial k} = \frac{\alpha \cdot \frac{\partial \alpha'}{\partial k} - \alpha' \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial k}}{\alpha^2}$. Entwickeln wir vorläufig die Differenz $\alpha \partial \alpha' - \alpha' \partial \alpha$, so ist

$$\partial \alpha = a \partial K + b \partial K' = (aE - ak'^2 K + bk^2 K' - bE') \cdot \frac{\partial k}{kk'^2} \text{ und}$$

$$\partial \alpha' = a' \partial K + b' \partial K' = (a'E - a'k'^2 K + b'k^2 K' - b'E') \cdot \frac{\partial k}{kk'^2}.$$

Aus diesen Ausdrücken setzen wir zusammen $\alpha \partial \alpha' - \alpha' \partial \alpha$ durch die Substitution der vorhin angegebenen Werthe; durch eine nambafte, aber leichte Reduction, weil sie nur im Weglassen gleicher und entgegengesetzter Glieder besteht, findet sich

$$\alpha \partial \alpha' - \alpha' \partial \alpha = (ba' - ab')(EK' + E'K - KK') \cdot \frac{\partial k}{kk'^2},$$

welcher Ausdruck sich nach §. 93. noch reducirt auf

$$\alpha \partial \alpha' - \alpha' \partial \alpha = \tfrac{1}{2}\pi (ba' - ab') \cdot \frac{\partial k}{kk'^2}.$$

Da nun aber $\partial v = \frac{\alpha \partial \alpha' - \alpha' \partial \alpha}{\alpha^2}$, also rückwärts $\alpha^2 = \frac{\alpha \partial \alpha' - \alpha' \partial \alpha}{\partial v}$ ist, so ist

$$1. \quad \alpha^2 = \tfrac{1}{2}\pi (ba' - ab') \cdot \frac{1}{kk'^2} \cdot \frac{\partial k}{\partial v}.$$

Ferner ist nach §. 91. $(1-k^2) \cdot \frac{\partial \left(\frac{\partial K}{\partial k}\right)}{\partial k} + \frac{1-3k^2}{k} \cdot \frac{\partial K}{\partial k} - K = 0$ und nach §. 92. ist

$$(1-k^2) \cdot \frac{\partial \left(\frac{\partial K'}{\partial k}\right)}{\partial k} + \frac{1-3k^2}{k} \cdot \frac{\partial K'}{\partial k} - K' = 0.$$

Wird die erste dieser beiden Gleichungen mit a und die zweite mit b multiplicirt, so erhält man durch die Addition dieser beiden Gleichungen, da

$$\alpha = aK + bK, \text{ also } \frac{\partial \alpha}{\partial k} = a \cdot \frac{\partial K}{\partial k} + b \cdot \frac{\partial K'}{\partial k} \text{ und}$$

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial \alpha}{\partial k}\right)}{\partial k} = a \cdot \frac{\partial \left(\frac{\partial K}{\partial k}\right)}{\partial k} + b \cdot \frac{\partial \left(\frac{\partial K'}{\partial k}\right)}{\partial k}$$

ist, noch die Gleichung

$$2. \quad (1-k^2) \cdot \frac{\partial \left(\frac{\partial \alpha}{\partial k}\right)}{\partial k} + \frac{1-3k^2}{k} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial k} - \alpha = 0.$$

Wird aus den Gleichungen (1.) und (2.) die Gröſse α eliminirt, so erhalten wir eine Differenzial-Gleichung der dritten Ordnung zum Ausdrucke der Abhängigkeit der Gröſse $v = \frac{a'K + b'K'}{aK + bK'}$ vom Modul k. Diese Differenzial-Gleichung, welche bekannt ist, werden wir bald nachher ebenfalls herleiten. Es scheint aber zweckmäſsig, da eine Function von v gefunden werden kann, deren Abhängigkeit vom Modul k schon durch eine sehr einfache Differenzial-Gleichung der ersten Ordnung ausgedrückt wird, die Herleitung dieser Differenzial-Gleichung vorauszuschicken. Setzen wir

$$\beta = \frac{\partial \alpha}{\partial k}, \quad \gamma = \frac{\partial \beta}{\partial k},$$

so haben wir, der Gleichung (2.) gemäſs,

$$(k - k^3).\gamma + (1 - 3k^2)\beta - k\alpha = 0 \quad \text{oder}$$

$$3. \quad (k - k^3).\frac{\gamma}{\alpha} + (1 - 3k^2).\frac{\beta}{\alpha} = k,$$

und es findet diese Gleichung Statt, es mag $\partial^2 k = 0$ gesetzt werden oder nicht. Aus der Gleichung (1.) folgt

$$\log\alpha = \tfrac{1}{2}\log(\tfrac{1}{2}\pi(ba' - ab')) - \tfrac{1}{2}\log(k - k^3) - \log\sqrt{\frac{\partial v}{\partial k}},$$

und also durch Differenziiren

$$\frac{\partial\alpha}{\alpha} = -\tfrac{1}{2}.\frac{1 - 3k^2}{k - k^3}\partial k - \partial\log\sqrt{\frac{\partial v}{\partial k}}.$$

Dividiren wir diese Gleichung durch ∂k und setzen $\frac{\partial\log\sqrt{\frac{\partial v}{\partial k}}}{\partial k} = x$, so ist

$$\frac{\beta}{\alpha} = -\tfrac{1}{2}.\frac{1 - 3k^2}{k - k^3} - x.$$

Wird diese Gleichung noch einmal differenziirt, so erhält man zunächst

$$\frac{\alpha\partial\beta - \beta\partial\alpha}{\alpha^2} = \tfrac{1}{2}.\frac{1 + 3k^4}{(k - k^3)^2}\partial k - \partial x,$$

oder wenn man durch ∂k dividirt,

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\beta^2}{\alpha^2} + \tfrac{1}{2}.\frac{1 + 3k^4}{(k - k^3)^2} - \frac{\partial x}{\partial k}.$$

Werden diese Werthe von $\frac{\beta}{\alpha}$ und $\frac{\gamma}{\alpha}$ in der Gleichung (3.) substituirt, so erhält man nach einer leichten Reduction die einfache Differenzial-Gleichung

$$\frac{\partial x}{\partial k} - x^2 = \tfrac{1}{4}.\left(\frac{1 + k^2}{k - k^3}\right)^2$$

von der ersten Ordnung, deren Integral $x = \frac{\partial\log\sqrt{\frac{\partial v}{\partial k}}}{\partial k}$ und also eine Function von v ist.

§. 97.

Ausdruck des Zusammenhanges unter den beiden Moduln k und λ, wenn die dazu gehörigen Quadranten K und L und die conjugirten Quadranten K' und L' durch eine Gleichung von der Form $\frac{a'K+b'K'}{aK+bK}=\frac{\alpha'L+\beta'L'}{\alpha L+\beta L}$ mit einander verbunden sind.

Setzt man, wie im §. 96., $x=\frac{\partial\log\sqrt{\frac{\partial v}{\partial k}}}{\partial k}$ und sieht man weder ∂k, noch ∂v als constant an, so findet man durch die Entwicklung dieses Ausdrucks:

$$2x=\frac{\partial^2 v}{\partial k.\partial v}-\frac{\partial^2 k}{\partial k^2},$$

und wenn man quadrirt,

$$4x^2=\frac{(\partial^2 v)^2}{\partial k^2.\partial v^2}-2.\frac{\partial^2 k.\partial^2 v}{\partial k^3.\partial v}+\frac{(\partial^2 k)^2}{\partial k^4}.$$

Wenn man aber differenziirt, so entsteht

$$2.\frac{\partial x}{\partial k}=\frac{\partial^3 v}{\partial v.\partial k^2}-\frac{(\partial^2 v)^2}{\partial v^2.\partial k^2}-\frac{\partial^2 v.\partial^2 k}{\partial v.\partial k^3}-\frac{\partial^3 k}{\partial k^3}+2.\frac{(\partial^2 k)^2}{\partial k^4}.$$

Werden diese beiden Ausdrücke in der Gleichung $4.\frac{\partial x}{\partial k}-4x^2=\left(\frac{1+k^2}{k-k^3}\right)^2$ substituirt und die sich dabei aufhebenden Glieder weggelassen, so erhält man die Gleichung

$$2.\frac{\partial^3 v}{\partial v.\partial k^2}-3.\frac{(\partial^2 v)^2}{\partial v^2.\partial k^2}=2\frac{\partial^3 k}{\partial k^3}-3.\frac{(\partial^2 k)^2}{\partial k^4}+\left(\frac{1+k^2}{k-k^3}\right)^2,$$

oder auch

$$1.\quad 2.\frac{\partial^3 v}{\partial v}-3.\frac{(\partial^2 v)^2}{\partial v^2}=2.\frac{\partial^3 k}{\partial k}-3.\frac{(\partial^2 k)^2}{\partial k^2}+\left(\frac{1+k^2}{k-k^3}\right)^2\partial k^2,$$

welche sich, wenn man ∂k als constant ansieht und also $\partial^2 k=\partial^3 k=0$ setzt, zusammenzieht auf

$$2.\frac{\partial^3 v}{\partial v}-3.\frac{(\partial^2 v)^2}{\partial v^2}=\left(\frac{1+k^2}{k-k^3}\right)^2.\partial k^2:\ \text{aber auf}$$

$$2.\frac{\partial^3 k}{\partial k}-3.\frac{(\partial^2 k)^2}{\partial k^2}+\left(\frac{1+k^2}{k-k^3}\right)^2.\partial k^2=0,$$

wenn man v, obgleich es aus der Gleichung verschwunden ist, als diejenige Gröfse ansieht, in Beziehung auf welche k differenziirt werden mufs.

Sind λ und λ' zwei andere conjugirte Modul, wozu die Quadranten L und L' gehören, und setzen wir

$$v'=\frac{\alpha'L+\beta'L'}{\alpha L+\beta.L'}$$

indem wieder α, β, α', β' vier beliebige und vom Modul λ unabhängige

Grösen sind, so ist, der vorhin gefundenen Gleichung gemäss, auch

$$2.\frac{\partial^3 v'}{\partial v'}-3.\frac{(\partial^2 v')^2}{\partial v'^2}=2.\frac{\partial^3 \lambda}{\partial \lambda}-3.\frac{(\partial^2 \lambda)^2}{\partial \lambda^2}+\left(\frac{1+\lambda^2}{\lambda-\lambda^3}\right)^2.\partial\lambda^2.$$

Setzen wir nun ausserdem $v=v'$, so giebt es, da v und v' Functionen von k und λ sind, einen eben durch diese Gleichung $v=v'$ ausgedrückten Zusammenhang zwischen den beiden Moduln k und λ, welchem gemäss man entweder k als eine Function von λ, oder umgekehrt λ als eine Function von k, oder endlich k und λ als Functionen einer und derselben dritten veränderlichen Grösse ansehen kann. In jedem dieser drei Fälle ist aber auch $\partial v=\partial v'$ und $\partial^2 v=\partial^2 v'$, und folglich

$$2.\quad 2.\frac{\partial^3 k}{\partial k}-3.\frac{(\partial^2 k)^2}{\partial k^2}+\left(\frac{1+k^2}{k-k^3}\right)^2.\partial k^2=2.\frac{\partial^3 \lambda}{\partial \lambda}-3.\frac{(\partial^2 \lambda)^2}{\partial \lambda^2}+\left(\frac{1+\lambda^2}{\lambda-\lambda^3}\right)^2.\partial\lambda^2.$$

Die beiden Modul k und λ sind hiernach durch eine Differenzial-Gleichung der dritten Ordnung mit einander verbunden, deren vollständiges Integral die Gleichung $v=v'$ oder auch

$$\frac{a'K+b'K'}{aK+bK'}=\frac{\alpha'L+\beta'L'}{\alpha L+\beta L}$$

ist. Schafft man in dieser Gleichung die Nenner fort, so erhält man eine Gleichung von der Form

$$a.KL+b.KL'+c.K'L+d.K'L'=0,$$

in welcher a, b, c, d willkürliche Constanten sind.

Nach §. 54. ist z. B. $\frac{K}{K'}=2.\frac{L}{L'}$ oder $KL'-2K'L=0$ eine Gleichung, welche unter der Form der Gleichung (3.) oder (4.) enthalten ist, und die durch die Gleichung $k=\frac{2\sqrt{\lambda}}{1+\lambda}$ mit einander verbundenen Modul werden also die allgemeine Bedingungsgleichung (2.) befriedigen. Die Gleichung $k=\frac{2\sqrt{\lambda}}{1+\lambda}$ ist also ein particuläres Integral der Gleichung (2.), welche, wie weiter unten erhellen wird, unzählige particuläre Integrale hat. Setzen wir $\lambda=\frac{1}{k}$, so ist nach §. 31.:

$$\frac{L}{L'}=\frac{K}{K'}-i,\quad\text{also}\quad LK'-KL'+iK'L'=0$$

und auch $\lambda=\frac{1}{k}$ ist ein particuläres Integral der Gleichung (2.), wovon man sich durch die wirkliche Substitution auch leicht a posteriori überzeugen kann.

§. 98.

Vollständige Integration dreier Differenzial-Gleichungen der zweiten Ordnung.

Setzen wir, wie im §. 96., $\alpha = aK + bK'$, so ist $(1-k^2)\frac{\partial^2 \alpha}{\partial k^2} + \frac{1-3k^2}{k}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial k} - \alpha = 0$; addirt man hierzu die Gleichung (1.) des §. 91., so erhält man, wenn $z = u + \alpha$ gesetzt wird, die Gleichung

$$1.\quad (1-k^2)\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial k^2} + \frac{1-3k^2}{k}\cdot\frac{\partial z}{\partial k} - z + \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)^3}} = 0,$$

welche eine Differenzial-Gleichung der zweiten Ordnung und deren vollständiges Integral also $z = u + \alpha$, oder auch

$$2.\quad z = \arg\operatorname{am}(\varphi) + aK + bK' \text{ ist.}$$

Wir leiten noch zwei dem vorigen ähnliche Resultate her. Nach §. 91. ist

$$(1-k^2)\cdot\frac{\partial^2 \operatorname{el} u}{\partial k^2} + \frac{1-k^2}{k}\cdot\frac{\partial \operatorname{el} u}{\partial k} + \operatorname{el} u - \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u} = 0.$$

Setzt man hierin $u = K$, so hat man noch

$$(1-k^2)\cdot\frac{\partial^2 E}{\partial k^2} + \frac{1-k^2}{k}\cdot\frac{\partial E}{\partial k} + E = 0;$$

und wenn man $u = 2iK'$, also $\operatorname{sn} u = 0$ und $\operatorname{el} u = 2i(K'-E')$ setzt, so erhält man noch $(1-k^2)\cdot\frac{\partial^2 (K'-E')}{\partial k^2} + \frac{1-k^2}{k}\cdot\frac{\partial (K'-E')}{\partial k} + K' - E' = 0$, welche Gleichung mit der im Zusatze zu §. 92. gefundenen dieselbe ist. Multipliciren wir nun die zweite dieser Gleichungen mit a, die dritte mit b, und addiren wir dann die drei Gleichungen, so erhalten wir

$$3.\quad (1-k^2)\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial k^2} + \frac{1-k^2}{k}\cdot\frac{\partial z}{\partial k} + z - \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u} = 0,$$

und das vollständige Integral dieser Gleichung ist also

$$4.\quad z = \operatorname{el} u + aE + b(K'-E')$$

Nach dem Zusatze zu §. 92. ist

$$(1-k^2)\cdot\frac{\partial^2 (u - \operatorname{el} u)}{\partial k^2} - \frac{1+k^2}{k}\cdot\frac{\partial (u - \operatorname{el} u)}{\partial k} + u - \operatorname{el} u + \frac{k^2 \operatorname{sn}^3 u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn}^3 u} = 0,$$

Außerdem ist noch $(1-k^2)\cdot\frac{\partial^2 (K-E)}{\partial k^2} - \frac{1+k^2}{k}\cdot\frac{\partial (K-E)}{\partial k} + K - E = 0$ und

$$(1-k^2)\cdot\frac{\partial^2 E'}{\partial k^2} - \frac{1+k^2}{k}\cdot\frac{\partial K'}{\partial k} + K' = 0.$$

Aus diesen drei Gleichungen setzen wir die Gleichung

$$5.\quad (1-k^2)\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial k^2} - \frac{1+k^2}{k} + \frac{\partial z}{\partial k} + \frac{k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn}^3 u} = 0$$

zusammen und ihr vollständiges Integral ist dann

$$6.\quad z = u - \operatorname{el} u + aE' + b(K-E).$$

Zehnter Abschnitt.

§. 99.

Ausdruck von u und el u durch am u in Reihen, welche nach Potenzen des Moduls k fortschreiten.

Bei diesen und den folgenden Entwicklungen der Functionen in Reihen ist der Gebrauch der numerischen Facultäten häufig; wir werden sie, so wie die sogenannten Permutationszahlen, auf dieselbe Art auch hier bezeichnen, wie es im ersten Theile geschehen ist. Dieser Bezeichnung gemäſs setzen wir

$$[a]^{n} = a(a-1)(a-2)\ldots\ldots(a-n+1) \text{ und}$$

$$[a, d]^{n} = a(a-d)(a-2d)\ldots\ldots(a-(n-1)d);$$

$$[a]^{-n} = \frac{1}{(a+1)(a+2)(a+3)\ldots\ldots(a+n)} \text{ und}$$

$$[a, d]^{-n} = \frac{1}{(a+d)(a+2d)(a+3d)\ldots\ldots(a+nd)}$$

und

$$r' = [r]^{r} = \frac{1}{[0]^{-r}} = 1.2.3\ldots\ldots r.$$

Diesem gemäſs erhalten wir

$$\frac{1}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}} = (1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}} = S(-1)^\alpha\frac{[-\frac{1}{2}]^{\alpha}}{\alpha'}.k^{2\alpha}.\sin^{2\alpha}\varphi \text{ und}$$

$$\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)} = (1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}} = S(-1)^\alpha\frac{[\frac{1}{2}]^{\alpha}}{\alpha'}.k^{2\alpha}\sin^{2\alpha}\varphi,$$

wenn der dem allgemeinen Gliede vorgesetzte und sich auf die veränderliche positive ganze Zahl α beziehende Buchstab S die Forderung ausdrückt, daſs aus dem allgemeinen Gliede die besonderen dadurch hergeleitet werden sollen, daſs man $\alpha = 0, 1, 2, 3, 4$ etc. setzt, um demnächst diese Glieder zu einer Reihe in der angegebenen Folge zusammenzusetzen. Da nun aber, wenn am $u = \varphi$ gesetzt wird,

$$u = \int_0 \frac{\partial \varphi}{\sqrt{(1-k^2 \sin^2 \varphi)}} \quad \text{und} \quad \mathrm{el}\, u = \int_0 \partial \varphi . \sqrt{(1-k^2 \sin^2 \varphi)}$$

ist, so erhalten wir zunächst

$$u = S(-1)^\alpha [-\tfrac{1}{2}]^{\alpha}_{\alpha'} . k^{2\alpha} \int_0 \partial \varphi . \sin^{2\alpha} \varphi \text{ und}$$

$$\mathrm{el}\, u = S(-1)^\alpha [\tfrac{1}{2}]^{\alpha}_{\alpha'} . k^{2\alpha} \int_0 \partial \varphi . \sin^{2\alpha} \varphi .$$

Das Integral, welches in beiden allgemeinen Gliedern vorkommt, setzen wir

$$\int_0 \partial \varphi . \sin^{2\alpha} \varphi = (-1)^\alpha [-\tfrac{1}{2}]^{\alpha}_{\alpha'} . \lambda^\alpha(\varphi), \text{ oder auch}$$

$$\int_0 \partial \varphi . \sin^{2\alpha} \varphi = \frac{1.3.5.7 \ldots . (2\alpha - 1)}{2.4.6.8 \ldots . (2\alpha)} . \lambda^\alpha(\varphi), \text{ und also umgekehrt}$$

$$\lambda^\alpha(\varphi) = \frac{2.4.6.8 \ldots . (2\alpha)}{1.3.5.7 \ldots . (2\alpha - 1)} . \int_0 \partial \varphi . \sin^{2\alpha} \varphi .$$

Machen wir von dieser Bezeichnung Gebrauch, so haben wir die Reihen

$$u = S[-\tfrac{1}{2}]^{\alpha}_{\alpha'} . [-\tfrac{1}{2}]^{\alpha}_{\alpha'} . \lambda^\alpha(\varphi) . k^{2\alpha} \text{ und}$$

$$\mathrm{el}\, u = S[\tfrac{1}{2}]^{\alpha}_{\alpha'} . [\tfrac{1}{2}]^{\alpha}_{\alpha'} . \lambda^\alpha(\varphi) . k^{2\alpha},$$

welche nach Potenzen des Moduls k oder k^2 fortschreiten und in welchen $\varphi = \mathrm{am}\, u$ ist. Die ersten Glieder dieser Reihen sind

$$1. \quad u = \mathrm{am}\, u + \frac{1^2}{2^2} \lambda^1(\mathrm{am}\, u) . k^2 + \frac{1^2 . 3^2}{2^2 . 4^2} \lambda^2(\mathrm{am}\, u) . k^4 + \frac{1^2 . 3^2 . 5^2}{2^2 . 4^2 . 6^2} \lambda^3(\mathrm{am}\, u) . k^6$$
$$+ \frac{1^2 . 3^2 . 5^2 . 7^2}{2^2 . 4^2 . 6^2 . 8^2} \lambda^4(\mathrm{am}\, u) . k^8 + \text{etc. und}$$

$$2. \quad \mathrm{el}\, u = \mathrm{am}\, u - \frac{1}{2^2} \lambda^1(\mathrm{am}\, u) . k^2 - \frac{1^2 . 3}{2^2 . 4^2} \lambda^2(\mathrm{am}\, u) . k^4 - \frac{1^2 . 3^2 . 5}{2^2 . 4^2 . 6^2} \lambda^3(\mathrm{am}\, u) . k^6$$
$$- \frac{1^2 . 3^2 . 5^2 . 7}{2^2 . 4^2 . 6^2 . 8^2} \lambda^4(\mathrm{am}\, u) . k^8 - \text{etc.}$$

Subtrahiren wir die zweite Reihe von der ersten, so erhalten wir noch eine dritte bemerkenswerthe Reihe, nämlich

$$3. \quad u - \mathrm{el}\, u = \tfrac{1}{2} \lambda(\mathrm{am}\, u) . k^2 + \frac{1^2 . 3}{2^2 . 4} \lambda^2(\mathrm{am}\, u) . k^4 + \frac{1^2 . 3^2 . 5}{2^2 . 4^2 . 6} \lambda^3(\mathrm{am}\, u) . k^6$$
$$+ \frac{1^2 . 3^2 . 5^2 . 7}{2^2 . 4^2 . 6^2 . 8} \lambda^4(\mathrm{am}\, u) . k^8 + \text{etc.}$$

§. 100.

Erster Ausdruck und Eigenschaften der Hülfs-Function $\lambda^r(\varphi)$, mit Bezugnahme auf die vorigen Reihen.

Setzen wir im §. 29. des ersten Theiles*) φi für k, so erhalten wir die Formel

$$(2.\sin\varphi)^{2r} = [2r]^{r}_{r'} + 2.S(-1)^{\alpha}[2r]^{r+\alpha}_{(r+\alpha)'}.\cos(2\alpha\varphi) \quad \text{für} \quad \alpha > 0,$$

welche wir noch ein wenig umformen. Es ist zunächst $[2r]^{r+\alpha}_{(r+\alpha)'} = [2r]^{r-\alpha}_{(r-\alpha)'} = \frac{(2r)'}{(r-\alpha)'(r+\alpha)'}$; ferner ist $(2r)' = 2.4.6....(2r).(1.3.5....(2r-1)) = 2^r.r'.[1,-2]^{r} = (-1)^r.2^{2r}.r'.[-\frac{1}{2}]^{r}$; und wird dieser Werth substituirt, so erhält man

$$[2r]^{r+\alpha}_{(r+\alpha)'} = (-1)^r.2^{2r}.[-\tfrac{1}{2}]^{r}_{r'}.\frac{r'.r'}{(r-\alpha)'(r+\alpha)'} = (-1)^r[-\tfrac{1}{2}]^{r}_{r'}.2^{2r}.[r]^{\alpha}[r]^{-\alpha},$$

und $[2r]^{r}_{r'} = (-1)^r[-\frac{1}{2}]^{r}_{r'}.2^{2r}$. Werden diese Werthe substituirt, so er- so erhält man den Ausdruck

$$\sin^{2r}\varphi = (-1)^r.[-\tfrac{1}{2}]^{r}_{r'}(1+2S(-1)^{\alpha}[r]^{\alpha}[r]^{-\alpha}.\cos(2\alpha\varphi)) \quad \text{für} \quad \alpha > 0.$$

Multiplicirt man denselben mit $\partial\varphi$ und integrirt auf beiden Seiten, indem man auf der linken Seite für $\int_0 \partial\varphi \sin^{2r}\varphi$ den Werth $(-1)^r.[-\frac{1}{2}]^{r}_{r'}.\lambda^r(\varphi)$ dem §. 99. gemäfs an die Stelle setzt, so erhält man die Formel

$$\lambda^r(\varphi) = \varphi + S(-1)^{\alpha}.[r]^{\alpha}[r]^{-\alpha}.\frac{\sin(2\alpha\varphi)}{\alpha} \quad \text{für} \quad \alpha > 0,$$

welche, wenn man die Bezeichnung der Facultäten aufgiebt, also aussieht:

$$1.\quad \lambda^r(\varphi) = \varphi - \frac{r}{r+1}\sin 2\varphi + \frac{r(r-1)}{(r+1)(r+2)}.\frac{\sin 4\varphi}{2} - \frac{r(r-1)(r-2)}{(r+1)(r+2)(r+3)}.\frac{\sin 6\varphi}{3}$$
$$+ \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)}.\frac{\sin 8\varphi}{4} - \text{etc.},$$

und jedesmal von selbst abbricht, da nach der Voraussetzung r eine positive ganze Zahl ist.

Setzt man für r nach einander die Werthe 0, 1, 2, 3 etc., so erhält man folgende speciellen Formeln:

---

*) Dieses frühere Werk des Verfassers, Theorie der Potenzial- oder cyklisch-hyperbolischen Functionen, wird später oft mit den Zeichen G. T. d. P. F. angeführt werden.

$\lambda^0(\varphi) = \varphi,$

$\lambda^1(\varphi) = \varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi,$

$\lambda^2(\varphi) = \varphi - \frac{2}{3}\sin 2\varphi + \frac{2.1}{3.4}\cdot\frac{\sin 4\varphi}{2},$

$\lambda^3(\varphi) = \varphi - \frac{3}{4}\sin 2\varphi + \frac{3.2}{4.5}\cdot\frac{\sin 4\varphi}{2} - \frac{3.2.1}{4.5.6}\cdot\frac{\sin 6\varphi}{3},$

$\lambda^4(\varphi) = \varphi - \frac{4}{5}\sin 2\varphi + \frac{4.3}{5.6}\cdot\frac{\sin 4\varphi}{2} - \frac{4.3.2}{5.6.7}\cdot\frac{\sin 6\varphi}{3} + \frac{4.3.2.1}{5.6.7.8}\cdot\frac{\sin 8\varphi}{4}$

u. s. w.

Es hält auch nicht schwer, die Grenze anzugeben, welcher sich diese Ausdrücke bei dem Wachsen der Zeigezahl r ohne Ende nähern. Stellen wir den Ausdruck für $\lambda^r(\varphi)$ also dar:

$$\lambda^r(\varphi) = \varphi - \frac{1}{1+\frac{1}{r}}\sin 2\varphi + \frac{1-\frac{1}{r}}{\left(1+\frac{1}{r}\right)\left(1+\frac{2}{r}\right)}\cdot\frac{\sin 4\varphi}{2}$$
$$- \frac{\left(1-\frac{1}{r}\right)\left(1-\frac{2}{r}\right)}{\left(1+\frac{1}{r}\right)\left(1+\frac{2}{r}\right)\left(1+\frac{3}{r}\right)}\cdot\frac{\sin 6\varphi}{3} + - \text{ etc.},$$

und setzen auf der rechten Seite $\frac{1}{r} = 0$, so erhalten wir für ein unendlich großes r den Ausdruck

$$\lambda^r(\varphi) = \varphi - \sin 2\varphi + \tfrac{1}{2}\sin 4\varphi - \tfrac{1}{3}\sin 6\varphi + \tfrac{1}{4}\sin 8\varphi - \tfrac{1}{5}\sin 10\varphi + - \text{ etc.},$$

welchen wir schlechtweg mit $\lambda(\varphi)$ bezeichnen. Es ist also

$$\lambda(\varphi) = \varphi - (\sin 2\varphi - \tfrac{1}{2}\sin 4\varphi + \tfrac{1}{3}\sin 6\varphi - \tfrac{1}{4}\sin 8\varphi \ldots).$$

Die Summe der hier von φ zu subtrahirenden Reihe läßt sich nach G. T. d. P. F. §. 52. leicht finden. Setzt man in der ersten Reihe daselbst $k = 2\varphi i$, so erhält man sogleich, wenn nur φ zwischen den Grenzen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ enthalten ist,

$$2. \quad \varphi = \sin 2\varphi - \tfrac{1}{2}\sin 4\varphi + \tfrac{1}{3}\sin 6\varphi - \tfrac{1}{4}\sin 8\varphi \ldots.$$

und also $\lambda(\varphi) = \varphi - \varphi$ oder $\lambda(\varphi) = 0$, für jeden zwischen den Grenzen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ enthaltenen Werth.

Die in §. 99. entwickelten Reihen (1.), (2.), (3.) convergiren also immer, wenn $\varphi < \frac{1}{2}\pi$ ist, indem sich die Größen $\lambda^1(\mathrm{am}\,u)$, $\lambda^2(\mathrm{am}\,u)$, $\lambda^3(\mathrm{am}\,u)$ etc. der Grenze $\lambda(\mathrm{am}\,u) = 0$ nähern, wenn $\mathrm{am}\,u < \frac{1}{2}\pi$ ist. Da nun auch die übrigen Factoren der Glieder in jenen Reihen für sich convergirende Reihen bilden, so haben wir einen hohen Grad der Convergenz, wenn zumal der Modul k nicht $> \sqrt{\frac{1}{2}}$ ist.

§. 101.

Anderer Ausdruck der Hülfs-Function $\lambda^r(\varphi)$ und Folgerungen daraus.

Differenziirt man das Product $\sin^{2r+1}\varphi\cos\varphi$, so erhält man $(2r+1)\sin^{2r}\varphi.\partial\varphi-(2r+2)\sin^{2r+2}\varphi.\partial\varphi$; daher ist rückwärts

$$(2r+2).\int_0\partial\varphi.\sin^{2r+2}\varphi=(2r+1).\int_0\sin^{2r}\varphi.\partial\varphi-\sin^{2r+1}\varphi\cos\varphi.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $\frac{2.4.6\ldots.(2r)}{1.3.5\ldots.(2r-1)(2r+1)}$, so verwandelt sie sich in

$$\frac{2.4.6.8\ldots.(2r)(2r+2)}{1.3.5.7\ldots.(2r-1)(2r+1)}\int_0\partial\varphi.\sin^{2r+2}\varphi$$
$$=\frac{2.4.6\ldots.(2r)}{1.3.5\ldots.(2r-1)}\int_0\partial\varphi\sin^{2r}\varphi-\frac{2.4.6\ldots.2r}{3.5.7\ldots.(2r+1)}\sin^{2r+1}\varphi\cos\varphi,$$

oder in die einfachere Gleichung

$$4.\quad \lambda^{r+1}(\varphi)=\lambda^r(\varphi)-\frac{2.4.6.8\ldots.(2r)}{1.3.5.7\ldots.(2r-1)(2r+1)}\sin^{2r+1}\varphi.\cos\varphi.$$

Dieser Formel gemäfs haben wir also die folgenden eleganten Ausdrücke:

$$5.\quad\begin{cases}\lambda^0(\varphi)=\varphi,\\ \lambda^1(\varphi)=\varphi-\sin\varphi\cos\varphi,\\ \lambda^2(\varphi)=\varphi-\sin\varphi\cos\varphi-\frac{2}{3}\sin^3\varphi\cos\varphi,\\ \lambda^3(\varphi)=\varphi-\sin\varphi\cos\varphi-\frac{2}{3}\sin^3\varphi\cos\varphi-\frac{2.4}{3.5}\sin^5\varphi\cos\varphi,\\ \lambda^4(\varphi)=\varphi-\sin\varphi\cos\varphi-\frac{2}{3}\sin^3\varphi\cos\varphi-\frac{2.4}{3.5}\sin^5\varphi\cos\varphi-\frac{2.4.6}{3.5.7}\sin^7\varphi\cos\varphi\\ \text{u. s. w.,}\end{cases}$$

welchen gemäfs die auf einander folgenden Hülfs-Functionen $\lambda^0(\varphi)$, $\lambda^1(\varphi)$, $\lambda^2(\varphi)$, $\lambda^3(\varphi)$ etc. auf die bequemste Weise recurrirend berechnet werden können. Nehmen wir die Zeigezahl r in $\lambda^r(\varphi)$ unendlich, so haben wir, da $\lambda^r(\varphi)$ nun $=\lambda(\varphi)=0$ wird, wenn $\varphi<\frac{1}{2}\pi$ ist, die Gleichung oder unendliche Reihe

$$6.\quad \varphi=\sin\varphi\cos\varphi+\frac{2}{3}\sin^3\varphi\cos\varphi+\frac{2.4}{3.5}\sin^5\varphi\cos\varphi+\frac{2.4.6}{3.5.7}\sin^7\varphi\cos\varphi+\text{etc.},$$

welche dieselbe ist wie die am Schlusse des §. 102 in G. T. d. P. F. auf andere Art gefundene Reihe. Sie gilt also, dem vorigen Beweise gemäfs, so lange φ zwischen den Grenzen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ enthalten ist, nicht aber in diesen Grenzfällen selbst. Es hat also diese Reihe, wie auch die im §. 100 gefundene Reihe (2.), eine ausgedehntere Anwendbarkeit als die bekannte Reihe

$$\varphi=\operatorname{tang}\varphi-\tfrac{1}{3}\operatorname{tang}^3\varphi+\tfrac{1}{5}\operatorname{tang}^5\varphi-\tfrac{1}{7}\operatorname{tang}^7\varphi+\text{etc.},$$

welche nur dann anwendbar ist, wenn φ nicht $> \frac{1}{4}\pi$ ist. Die Reihe (6.) convergirt unter den erwähnten drei Reihen am raschesten, und die Ausdrücke (5.) oder eigentlich $\varphi - \lambda^0(\varphi)$, $\varphi - \lambda^1(\varphi)$, $\varphi - \lambda^2(\varphi)$, $\varphi - \lambda^3(\varphi)$ etc. sind gerade die auf einander folgenden Summen der ersten Glieder der Reihe (6.). Setzt man $\frac{1}{2}\pi - \varphi$ für φ, so erhält man

$$\lambda^3(\tfrac{1}{2}\pi - \varphi) = \tfrac{1}{2}\pi - \varphi - \cos\varphi\sin\varphi - \tfrac{2}{3}\cos^3\varphi\sin\varphi - \frac{2.4}{3.5}\cos^5\varphi\sin\varphi \quad \text{und}$$

$$\lambda^3(\tfrac{1}{2}\pi + \varphi) = \tfrac{1}{2}\pi + \varphi + \cos\varphi\sin\varphi + \tfrac{2}{3}\cos^3\varphi\sin\varphi + \frac{2.4}{3.5}\cos^5\varphi\sin\varphi,$$

woraus durch Addition $\lambda^3(\frac{1}{2}\pi - \varphi) + \lambda^3(\frac{1}{2}\pi + \varphi) = \pi$ folgt. Ganz eben so zeigt man, dafs überhaupt

$$7. \quad \lambda^r(\tfrac{1}{2}\pi - \varphi) + \lambda^r(\tfrac{1}{2}\pi + \varphi) = \pi,$$

und wenn man r unendlich grofs nimmt, auch

$$\lambda(\tfrac{1}{2}\pi - \varphi) + \lambda(\tfrac{1}{2}\pi + \varphi) = \pi \text{ ist; und da } \lambda(\tfrac{1}{2}\pi - \varphi) = 0,$$

so ist auch $\lambda(\frac{1}{2}\pi + \varphi) = \pi$, wenn φ positiv und zwischen den Grenzen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ enthalten ist. Aufserdem ist noch $\lambda(\pi) = \pi$. Setzt man in der Gleichung (7.) $\frac{1}{2}\pi - \varphi$ für φ, so erhält man

$$\lambda^r(\pi - \varphi) + \lambda^r(\varphi) = \pi, \text{ also}$$

$$\lambda^r(\pi + \varphi) = \pi + \lambda^r(\varphi), \text{ folglich überhaupt}$$

$$8. \quad \lambda^r(n\pi + \varphi) = n\pi + \lambda^r(\varphi),$$

wo n eine ganze Zahl bezeichnet. Nimmt man r unendlich, so hat man

$$9. \quad \lambda(n\pi + \varphi) = n\pi.$$

Zusatz. Da $\partial\lambda^r(\varphi) = \frac{2.4.6\ldots.(2r)}{1.3.5\ldots.(2r-1)} . \sin^{2r}\varphi . \partial\varphi$ ist, so erhält man, wenn man $\frac{1}{2}\pi - \varphi$ für φ setzt,

$$\partial\varphi . \cos^{2r}\varphi = -\frac{1.3.5\ldots.(2r-1)}{2.4.6\ldots.(2r)} . \partial\lambda^r(\tfrac{1}{2}\pi - \varphi).$$

Integrirt man also, so entsteht

$$\int_0 \partial\varphi . \cos^{2r}\varphi = \frac{1.3.5\ldots.(2r-1)}{2.4.6\ldots.(2r)} . (\text{const.} - \lambda^r(\tfrac{1}{2}\pi - \varphi)).$$

Da der Ausdruck auf der rechten Seite für $\varphi = 0$ verschwinden soll, so erhält man const. $= \lambda^r(\frac{1}{2}\pi) = \frac{1}{2}\pi$ und also

$$\int_0 \partial\varphi . \cos^{2r}\varphi = \frac{1.3.5\ldots.(2r-1)}{2.4.6\ldots.(2r)} . (\tfrac{1}{2}\pi - \lambda^r(\tfrac{1}{2}\pi - \varphi)).$$

Anmerkung. Wegen der zahlreichen Anwendungen, welche von den Functionen $\lambda^1(\varphi)$, $\lambda^2(\varphi)$, $\lambda^3(\varphi)$, $\lambda^4(\varphi)$ u. s. w. gemacht, und wegen der Leichtigkeit, mit welcher ihre Werthe nach den Formeln (5.) berechnet werden können, wäre es sehr zweckmäfsig, wenn Tabellen da-

von verfertigt würden, zumal da diese eine leichte Interpolation gestatten werden, und es nicht nöthig sein wird, die Zunahmen der Amplitude φ sehr klein anzunehmen. Weiter unten werden die erwähnten Functionen in noch wichtigeren Beziehungen zur Anwendung kommen; wodurch das Bedürfniſs solcher Tafeln noch fühlbarer werden wird.

§. 102.

Ausdrücke der Quadranten K und E durch den Modul k und die Gröſse $\theta = \arcsin(k)$.

Setzen wir in den Formeln (1.), (2.) und (3.) des §. 99. jetzt $\operatorname{am} u = \frac{1}{2}\pi$, so verwandelt sich u in K, $\operatorname{el} u$ in E; ferner ist $\lambda^1(\operatorname{am} u) = \lambda^2(\operatorname{am} u) = \lambda^3(\operatorname{am} u)$ etc. $= \frac{1}{2}\pi$. Hiernach haben wir also die Reihen:

$$1.\quad K = \tfrac{1}{2}\pi.\left(1 + \frac{1^2}{2^2}.k^2 + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}.k^4 + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}.k^6 + \frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2}.k^8 + \text{etc.}\right),$$

$$2.\quad E = \tfrac{1}{2}\pi.\left(1 - \frac{1}{2^2}.k^2 - \frac{1^2.3}{2^2.4^2}.k^4 - \frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6^2}.k^6 - \frac{1^2.3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2.8^2}.k^8 - \text{etc.}\right),$$

$$3.\quad K - E = \tfrac{1}{2}\pi\left(\tfrac{1}{2}k^2 + \frac{1^2.3}{2^2.4}.k^4 + \frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6}.k^6 + \frac{1^2.3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2.8}.k^8 + \text{etc.}\right).$$

Setzt man in diesen Formeln $\frac{ik}{k'}$ statt des Moduls k, so verwandelt sich, nach dem Zusatze 2. zu §. 31., der Quadrant K in $k'K$ und nach §. 68. verwandelt sich E in $\frac{E}{k'}$; daher erhalten wir noch

$$4.\quad k'K = \tfrac{1}{2}\pi\left(1 - \frac{1^2}{2^2}.\frac{k^2}{k'^2} + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}.\frac{k^4}{k'^4} - \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}.\frac{k^6}{k'^6} + \frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2}.\frac{k^8}{k'^8} - \text{etc.}\right),$$

$$5.\quad \frac{E}{k'} = \tfrac{1}{2}\pi\left(1 + \frac{1}{2^2}.\frac{k^2}{k'^2} - \frac{1^2.3}{2^2.4^2}.\frac{k^4}{k'^4} + \frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6^2}.\frac{k^6}{k'^6} - \frac{1^2.3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2.8^2}.\frac{k^8}{k'^8} - \text{etc.}\right).$$

Diese Reihen convergiren nicht so rasch als die vorigen, da $\frac{k}{k'} > k$ ist.

Zusatz. Setzt man $k = \sin\theta$, also $k' = \cos\theta$; ferner $\theta' + \theta = \frac{1}{2}\pi$, also $k = \cos\theta'$ und $k' = \sin\theta'$: so ist $\lambda = \frac{k - ik'}{k + ik'} = e^{-2\theta' i}$. Setzt man aber $\lambda = \frac{k - ik'}{k + ik'}$ statt des Moduls k, so verwandelt sich nach §. 50. der Quadrant K in $\frac{1}{2}\frac{(K - iK')}{k - ik'} = \frac{1}{2}\frac{(K - iK')}{e^{-\theta' i}}$. Macht man diese Substitution in der Gleichung (1.), so erhält man

$$K - iK' = \pi\left(e^{-\theta' i} + \frac{1^2}{2^2}.e^{-5\theta' i} + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}.e^{-9\theta' i} + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}.e^{-13\theta' i} + \text{etc.}\right).$$

Da nun überhaupt $e^{-n\theta' i} = \cos(n\theta') - i\sin(n\theta')$ ist, so erhält man zwei Reihen; die eine reelle ist $= K$, die andere, mit i multiplicirte, ist $= -iK'$: daher ist

$$K = \pi\left(\cos\theta' + \frac{1^2}{2^2}\cos 5\theta' + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}\cos 9\theta' + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}\cos 13\theta' + \text{etc.}\right) \quad \text{und}$$

$$K' = \pi\left(\sin\theta' + \frac{1^2}{2^2}\sin 5\theta' + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}\sin 9\theta' + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}\sin 13\theta' + \text{etc.}\right).$$

Vertauscht man also θ' mit θ, so verwandelt sich die eine Reihe in die andere; wie es auch sein mufs. Führt man nun wieder θ ein, so erhält man

$$K = \pi\left(\sin\theta + \frac{1^2}{2^2}\sin 5\theta + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}\sin 9\theta + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}\sin 13\theta + \text{etc.}\right),$$

worin $\theta = \arcsin(k)$ ist. Es versagt diese Reihe indessen, wenn man $\theta = 0$ setzt; denn für $\theta = 0$ (also auch $k = 0$) müfste $K = \frac{1}{2}\pi$ werden, und die Reihe giebt $K = 0$. Ueberhaupt wird man wegen der langsamen Convergenz dieser nur zwischen den Grenzen $\theta = 0$ und $\theta = \frac{1}{2}\pi$ gültigen Reihe keinen Gebrauch von ihr machen können.

Aus diesem Grunde übergehen wir auch die Herleitung einer ähnlichen Reihe für den Quadranten E.

Anmerkung. Auch die Convergenz der Reihen (1.) und (2.) wird schwach, wenn sich der Modul k der Grenze Eins nähert. Setzen wir wirklich $k = 1$, so ist nach G. T. d. P. F. §. 62. $\frac{2}{\pi}$ die Grenze, welcher sich die numerischen Coefficienten in der Reihe (1.) ohne Ende nähern. Einen höhern Grad der Kleinheit erreichen sie also nicht, und nur so ist es auch erklärlich, dafs die Summe jener Reihe, oder K selbst, unendlich wird, wenn man $k = 1$ setzt. Die Convergenz der Reihe (2.) ist etwas rascher, wenn $k = 1$ gesetzt wird.

§. 103.

Reihe für den Quadranten K', welche desto rascher convergirt, je gröfser der Modul k' dieses Quadranten ist.

Da nach §. 56., wenn der Modul k' wenig von Eins verschieden ist, der Quadrant K' durch die Formel

$$K' = \log\frac{4}{k} + \tfrac{1}{2}\log\sqrt{(1-k^2)}$$

ausgedrückt wird, so kann man schliefsen, dafs der allgemeine Ausdruck von K' durch k die folgende Form haben werde:

$$K' = P.\log\frac{4}{k} + Q,$$

wenn man sich nemlich unter P und Q Functionen von k in der Gestalt unendlicher Reihen vorstellt, welche so beschaffen sind, dafs $P = 1$ und $Q = 0$ wird, wenn man $k = 0$ setzt. Sehen wir K' als eine Function des Mo-

duls k an, so haben wir die Differenzial-Gleichung (11.) im §. 92.

$$(1-k^2)\cdot\frac{\partial^2 K'}{\partial k^2}+\frac{1-3k^2}{k}\cdot\frac{\partial K'}{\partial k}-K'=0$$

anzuwenden und darin den fingirten Ausdruck von K' zu substituiren. Durch Differenziiren finden wir

$$\frac{\partial K'}{\partial k}=\frac{\partial P}{\partial k}\log\frac{4}{k}+\frac{\partial Q}{\partial k}-\frac{P}{k}\text{ und}$$

$$\frac{\partial^2 K'}{\partial k^2}=\frac{\partial^2 P}{\partial k^2}\log\frac{4}{k}+\frac{\partial^2 Q}{\partial k^2}-\frac{2}{k}\cdot\frac{\partial P}{\partial k}+\frac{P}{k^2}.$$

Durch Substitution erhalten wir also die Gleichung

$$\left[(1-k^2)\cdot\frac{\partial^2 P}{\partial k^2}+\frac{1-3k^2}{k}\cdot\frac{\partial P}{\partial k}-P\right]\cdot\log\frac{4}{k}$$
$$+(1-k)^2\cdot\frac{\partial^2 Q}{\partial k^2}+\frac{1-3k^2}{k}\cdot\frac{\partial Q}{\partial k}-Q+(1-k^2)\left(\frac{P}{k^2}-\frac{2}{k}\cdot\frac{\partial P}{\partial k}\right)-\frac{(1-3k^2)}{k^2}P=0.$$

Setzen wir den Coeffizienten von $\log\frac{4}{k}$ für sich $=0$, so entstehen die beiden Gleichungen

$$1.\quad (1-k^2)\cdot\frac{\partial^2 P}{\partial k^2}+\frac{1-3k^2}{k}\cdot\frac{\partial P}{\partial k}-P=0,$$

$$2.\quad (1-k^2)\cdot\frac{\partial^2 Q}{\partial k^2}+\frac{1-3k^2}{k}\cdot\frac{\partial Q}{\partial k}-Q+2P-\frac{2(1-k^2)}{k}\cdot\frac{\partial P}{\partial k}=0;$$

welche aber auch zur Bestimmung von P und Q hinreichen.

Da der ersten Gleichung gemäfs P als Function von k eben so von diesem Modul abhängt, wie der Gleichung (3.) im §. 91. gemäfs K von demselben Modul, so schliefst man, dafs $P=a.K$ sein werde, wenn durch a eine Constante vorgestellt wird. Da aber für $k=0$ $P=1$ werden soll, und der Quadrant $K=\frac{1}{2}\pi$ wird, so ist

$$1=a.\tfrac{1}{2}\pi \qquad\text{oder}\qquad a=\frac{1}{\frac{1}{2}\pi},$$

und also

$$P=\frac{K}{\frac{1}{2}\pi}=\frac{1}{\eta}.$$

Substituiren wir die Reihe (1.) im §. 102., so erhalten wir

$$\frac{1}{\eta}=P=1+\frac{1^2}{2^2}k^2+\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}k^4+\frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}k^6+\frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2}k^8+\text{etc.},$$

und dieselbe Reihe kann auch leicht mittelst der Gleichung (1.) hergeleitet werden. Setzen wir der Kürze wegen

$$\overset{1}{a}=\frac{1^2}{2^2},\qquad \overset{2}{a}=\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2},\qquad \overset{3}{a}=\frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}\text{ etc.},$$

so dafs

$2^2.\overset{1}{a}=1^2,\quad 4^2.\overset{2}{a}=3^2.\overset{1}{a},\quad 6^2.\overset{3}{a}=5^2.\overset{2}{a},\quad 8^2.\overset{4}{a}=7^2.\overset{3}{a},\quad 10^2.\overset{5}{a}=9^2.\overset{4}{a}$ etc.
ist, so ist

$$P = 1+\overset{1}{a}k^2+\overset{2}{a}k^4+\overset{3}{a}k^6+\overset{4}{a}k^8+\text{etc.}$$

Wären die drei ersten Glieder der Gleichung (2.) für sich $=0$, so könnte man schliefsen, dafs Q nur um einen constanten Factor von P verschieden sei. Da übrigens Q für $k=0$ selbst $=0$ werden soll, und wie man leicht übersieht, nach Potenzen von k^2 ebenfalls fortschreitet, so setzen wir

$$Q = \overset{1}{a}\overset{1}{\nu}k^2+\overset{2}{a}\overset{2}{\nu}k^4+\overset{3}{a}\overset{3}{\nu}k^6+\overset{4}{a}\overset{4}{\nu}k^8+\overset{5}{a}\overset{5}{\nu}k^{10}+\text{etc.}$$

Substituiren wir diese Reihe und ihre Differenziale in den drei ersten Gliedern der Gleichung (2.), so erhalten wir, nach einer leichten Reduction,

$$(1-k^2).\frac{\partial^2 Q}{\partial k^2}+\frac{1-3k^2}{k}.\frac{\partial Q}{\partial k}-Q$$

$$=\overset{1}{\nu}+3^2\overset{1}{a}(\overset{2}{\nu}-\overset{1}{\nu})k^2+5^2\overset{2}{a}(\overset{3}{\nu}-\overset{2}{\nu})k^4+7^2\overset{3}{a}(\overset{4}{\nu}-\overset{3}{\nu})k^6+9^2\overset{4}{a}(\overset{5}{\nu}-\overset{4}{\nu})k^8+\text{etc.}$$

Ferner erhalten wir durch die Substitution der Reihe P den Ausdruck

$$2P-\frac{2(1-k^2)}{k}.\frac{\partial P}{\partial k} = 1+\frac{3}{2}\overset{1}{a}.k^2+\frac{5}{3}\overset{2}{a}.k^4+\frac{7}{4}\overset{3}{a}.k^6+\frac{9}{5}\overset{4}{a}.k^8+\text{etc.}$$

und der Gleichung (2.) gemäfs ist

$$\overset{1}{\nu}=-1;\quad \overset{2}{\nu}=\overset{1}{\nu}-\frac{2}{3.4};\quad \overset{3}{\nu}=\overset{2}{\nu}-\frac{2}{5.6};\quad \overset{4}{\nu}=\overset{3}{\nu}-\frac{2}{7.8};\ \text{etc.};$$

woraus folgt:

$$\overset{1}{\nu}=-1,$$
$$\overset{2}{\nu}=-\left(1+\frac{2}{3.4}\right),$$
$$\overset{3}{\nu}=-\left(1+\frac{2}{3.4}+\frac{2}{5.6}\right),$$
$$\overset{4}{\nu}=-\left(1+\frac{2}{3.4}+\frac{2}{5.6}+\frac{2}{7.8}\right)$$
etc.

Werden diese, nach einem einfachen Gesetze fortschreitenden Ausdrücke substituirt, so erhalten wir die folgende Reihe:

$$K'=\frac{2K}{\pi}.\log\left(\frac{4}{k}\right)-\frac{1^2}{2^2}k^2-\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}\left(1+\frac{2}{3.4}\right).k^4-\frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}.\left(1+\frac{2}{3.4}+\frac{2}{5.6}\right).k^6$$
$$-\frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2}.\left(1+\frac{2}{3.4}+\frac{2}{5.6}+\frac{2}{7.8}\right).k^8$$
$$-\frac{1^2.3^2.5^2.7^2.9^2}{2^2.4^2.6^2.8^2.10^2}.\left(1+\frac{2}{3.4}+\frac{2}{5.6}+\frac{2}{7.8}+\frac{2}{9.10}\right).k^{10}$$
$$-\text{etc.},$$

welche aber, wenn der Modul k nicht sehr klein ist, nur langsam con-

vergirt. In dieser Gestalt, oder doch in nur wenig anderer, hat *Legendre* die Reihe aufgestellt. Man kann aber dieselbe durch Umordnung ihrer Glieder leicht so gestalten, dafs sie für jeden Modul k, welcher <1 ist, rasch, und zwar schneller noch als die Reihe (1.) im §. 102. selbst, convergirt. Lösen wir nemlich die Klammern in den auf das Anfangsglied folgenden Gliedern auf, so erhalten wir

$$\begin{aligned} K' = \frac{2K}{\pi}.\log\left(\frac{4}{k}\right) &- \left(\frac{1^2}{2^2}k^2 + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}k^4 + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}k^6 + \frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2}k^8 + \text{etc.}\right) \\ &- \frac{2}{3.4}\left(\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}k^4 + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}k^6 + \frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2}k^8 + \text{etc.}\right) \\ &- \frac{2}{5.6}\left(\frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}k^6 + \frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2}k^8 + \text{etc.}\right) \\ &- \frac{2}{7.8}\left(\frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2}k^8 + \frac{1^2.3^2.5^2.7^2.9^2}{2^2.4^2.6^2.8^2.10^2}k^{10} + \text{etc.}\right) \\ &- \text{etc.} \end{aligned}$$

und die hier eingeklammerten unendlichen Reihen lassen sich summiren, oder doch auf eine einzige zurückbringen. Diese Reihe ist die oben für $\boldsymbol{P}$ gefundene. Wir setzen

$$\begin{aligned} \mathfrak{K} = 1 + \frac{1^2}{2^2}k^2 + \frac{1^2.3^2}{2^2.4_2}k^4 + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}k^6 + \frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2}k^8 \\ + \frac{1^2.3^2.5^2.7^2.9^2}{2^2.4^2.6^2.8^2.10^2}k^{10} + \text{etc.}; \end{aligned}$$

ferner setzen wir die Summen der ersten Glieder dieser Reihe

$$\mathfrak{K}_1 = 1 + \frac{1^2}{2^2}k^2,$$

$$\mathfrak{K}_2 = 1 + \frac{1^2}{2^2}k^2 + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}k^4,$$

$$\mathfrak{K}_3 = 1 + \frac{1^2}{2^2}k^2 + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}k^4 + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}k^6,$$

$$\mathfrak{K}_4 = 1 + \frac{1^2}{2^2}k^2 + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}k^4 + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}k^6 + \frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2}k^8$$

u. s. w.

Alsdann nähern sich die Gröfsen $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$, $\mathfrak{K}_4$ etc. der Grenze $\mathfrak{K}$, und es ist

$$\mathfrak{K} = \frac{2K}{\pi}, \text{ oder umgekehrt}$$

$$K = \frac{\pi}{2}.K \text{ und}$$

$$\begin{aligned} K' = \mathfrak{K}.\log\left(\frac{4}{k}\right) - (\mathfrak{K}-1) - \frac{2}{3.4}(\mathfrak{K}-\mathfrak{K}_1) - \frac{2}{5.6}(\mathfrak{K}-\mathfrak{K}_2) \\ - \frac{2}{7.8}(\mathfrak{K}-\mathfrak{K}_3) - \frac{2}{9.10}(\mathfrak{K}-\mathfrak{K}_4) - \text{etc.} \end{aligned}$$

Aus den successiven Summen der ersten Glieder der Reihe $\mathfrak{K}$ also lassen sich hiernach beide Quadranten K und K' mit ungefähr gleichem Grade der Convergenz der Reihen berechnen. Die Convergenz der Reihe für K' ist noch etwas gröfser wegen der Coefficienten $\frac{2}{3.4}$, $\frac{2}{5.6}$, $\frac{2}{7.8}$ etc. ihrer Glieder. Alle Modular-Quadranten lassen sich also hiernach berechnen, indem man k als zwischen den Grenzen 0 und $\sqrt{\frac{1}{2}}$ enthalten ansieht. Ist der Quadrant K nach der Formel $K = \frac{1}{2}\pi.\mathfrak{K}$ berechnet worden, so ist die Berechnung des Quadranten K' nach der vorstehenden Formel sehr bequem und einfach, da man, indem man die Glieder der Reihe $\mathfrak{K}$ berechnet, zugleich die Werthe von $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$, $\mathfrak{K}_4$ etc. erhält.

§. 104.

Reihe für den Quadranten E', welche desto rascher convergirt, je gröfser sein Modul k' ist.

Es kann die gesuchte Reihe für den Quadranten E' augenblicklich aus der für den Quadranten K' gefundenen Reihe

$$K' = \frac{2K}{\pi}\log\left(\frac{4}{k}\right) - \left(\frac{2K}{\pi} - 1\right) - \frac{2}{3.4}\left(\frac{2K}{\pi} - \mathfrak{K}_1\right) - \frac{2}{5.6}\left(\frac{2K}{\pi} - \mathfrak{K}_2\right)$$
$$- \frac{2}{7.8}\left(\frac{2K}{\pi} - \mathfrak{K}_3\right) - \text{etc.}$$

hergeleitet werden. Da nemlich nach §. 93.

$$E' = k^2 K' - (k - k^3).\frac{\partial K'}{\partial k} \quad \text{und} \quad \frac{\partial K}{\partial k} = \frac{E - k'^2 K}{k - k^3}$$

ist, so erhalten wir

$$(k - k^3).\frac{\partial K'}{\partial k} = \frac{2(E - k'^2 K)}{\pi}\log\left(\frac{4}{k}\right) - \frac{2Kk'^2}{\pi} - \frac{2}{\pi}(E - k'^2 K)$$
$$- \frac{2}{3.4}\left(\frac{2}{\pi}(E - k'^2 K) - (k - k^3)\frac{\partial \mathfrak{K}_1}{\partial k}\right)$$
$$- \frac{2}{5.6}\left(\frac{2}{\pi}(E - k'^2 K) - (k - k^3)\frac{\partial \mathfrak{K}_2}{\partial k}\right) - \text{etc.}$$

und da

$$k^2.K' = \frac{2Kk^2}{\pi}\log\left(\frac{4}{k}\right) - \left(\frac{2Kk^2}{\pi} - k^2\right) - \frac{2}{3.4}\left(\frac{2Kk^2}{\pi} - k^2\mathfrak{K}_1\right)$$
$$- \frac{2}{5.6}\left(\frac{2Kk^2}{\pi} - k^2\mathfrak{K}_2\right) - \text{etc.}$$

ist, so findet sich, wenn von dieser Reihe die vorige subtrahirt wird,

$$E' = \frac{2(K-E)}{\pi}\log\left(\frac{4}{k}\right) + \frac{2Kk'^2}{\pi} - \left(\frac{2(K-E)}{\pi} - k^2\right)$$
$$- \frac{2}{3.4}\left(\frac{2(K-E)}{\pi} + (k-k^3).\frac{\partial \mathfrak{K}_1}{\partial k} - k^2\mathfrak{K}_1\right)$$
$$- \frac{2}{5.6}\left(\frac{2(K-E)}{\pi} + (k-k^3).\frac{\partial \mathfrak{K}_2}{\partial k} - k^2\mathfrak{K}_2\right)$$
$$- \frac{2}{7.8}\left(\frac{2(K-E)}{\pi} + (k-k^3).\frac{\partial \mathfrak{K}_3}{\partial k} - k^2\mathfrak{K}_3\right)$$
$$- \text{etc.}$$

Der Ausdruck gestattet noch manche Reductionen. Es ist zunächst, wie in §. 103.,

$$\mathfrak{K}_r = 1 + \overset{1}{a}k^2 + \overset{2}{a}k^4 + \overset{3}{a}k^6 \ldots\ldots + \overset{r}{a}k^{2r},$$

also

$$\frac{\partial \mathfrak{K}_r}{\partial k} = 2\overset{1}{a}k + 4\overset{2}{a}k^3 + 6\overset{3}{a}k^5 \ldots\ldots + 2r.\overset{r}{a}k^{2r-1},$$

also

$$(k-k^3).\frac{\partial \mathfrak{K}_r}{\partial k} = 2\overset{1}{a}k^2 + 4\overset{2}{a}k^4 + 6\overset{3}{a}k^6 \ldots\ldots + 2r.\overset{r}{a}k^{2r}$$
$$- 2\overset{1}{a}k^4 - 4\overset{2}{a}k^6 \ldots\ldots - (2r-2)^{r-1}\overset{r-1}{a}.k^{2r} - 2r\overset{r}{a}k^{2r+2}$$

und

$$-k^2.\mathfrak{K}_r = -k^2 - \overset{1}{a}k^4 - \overset{2}{a}k^6 \ldots\ldots - \overset{r-1}{a}.k^{2r} - \overset{r}{a}k^{2r+2};$$

folglich ist

$$(k-k^3).\frac{\partial \mathfrak{K}_r}{\partial k} - k^2\mathfrak{K}_r = -(1-2\overset{1}{a})k^2 - (3\overset{1}{a} - 4\overset{2}{a})k^4 - (5\overset{2}{a} - 6\overset{3}{a})k^6 \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots - ((2r-1)\overset{r-1}{a} - 2r\overset{r}{a})k^{2r} - (2r+1)\overset{r}{a}k^{2r+2}.$$

Da aber überhaupt $(2r)^2.\overset{r}{a} = (2r-1)^2.\overset{r-1}{a}$ und also $2r.\overset{r}{a} = \frac{(2r-1)^2}{2r}.\overset{r-1}{a}$ ist, so ist $(2r-1)\overset{r-1}{a} - 2r\overset{r}{a} = \frac{2r-1}{2r}.\overset{r-1}{a}$ und also

$$(k-k^3).\frac{\partial \mathfrak{K}_r}{\partial k} - k^2\mathfrak{K}_r$$
$$= -\left(\tfrac{1}{2}k^2 + \frac{1^2.3}{2^2.4}k^4 + \frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6}k^6 \ldots\ldots + \frac{1^2.3^2.5^2\ldots\ldots(2r-3)^2(2r-1)}{2^2.4^2.6^2\ldots\ldots(2r-2)^2.2r}k^{2r}\right)$$
$$- \frac{1^2.3^2.5^2.7^2\ldots\ldots(2r-1)^2.(2r+1)}{2^2.4^2.6^2.8^2\ldots\ldots(2r)^2}k^{2r+2}.$$

Setzen wir nun zur Abkürzung $\frac{2(K-E)}{\pi} = t$, so ist rückwärts

$$E = K - \tfrac{1}{2}\pi.t,$$

und nach §. 102. ist

$$t = \tfrac{1}{2}k^2 + \frac{1^2.3}{2^2.4}k^4 + \frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6}k^6 + \frac{1^2.3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2.8}k^8 + \text{etc.}$$

Diesen Werth als bekannt vorausgesetzt, haben wir

$$E' = t.\log\left(\frac{4}{k}\right) + \frac{2k'^2.K}{\pi} - t - \frac{2}{3.4}(t - \tfrac{1}{2}k^2) - \frac{2}{5.6}\left(t - \tfrac{1}{2}k^2 - \frac{1^2.3}{2^2.4}k^4\right)$$
$$- \frac{2}{7.8}\left(t - \tfrac{1}{2}k^2 - \frac{1^2.3}{2^2.4}k^4 - \frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6}k^6\right) - \text{etc.}$$
$$+ k^2 + \frac{2k^4}{2^2.4} + \frac{2.1^2.3^2}{2^2.4^2.6}k^6 + \frac{2.1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2.8}k^8 + \frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2.10}k^{10} + \text{etc.}$$

Substituirt man nun auch noch für $\frac{2k'^2 K}{\pi}$ die Reihe

$$1 - \frac{3k^2}{2^2} - \frac{1^2.7k^4}{2^2.4^2} - \frac{1^2.3^2.11}{2^2.4^2.6^2}k^6 - \frac{1^2.3^2.5^2.15}{2^2.4^2.6^2.8^2}k^8 - \frac{1^2\,3^2.5^2.7^2.19}{2^2.4^2.6^2.8^2.10^2}k^{10} + \text{etc.},$$

so erhalten wir den mehr reducirten Ausdruck

$$E' = t.\log\left(\frac{4}{k}\right) + 1 - t - \frac{2}{3.4}(t - \tfrac{1}{2}k^2) - \frac{2}{5.6}\left(t - \tfrac{1}{2}k^2 - \frac{1^2.3}{2^2.4}k^4\right)$$
$$- \frac{2}{7.8}\left(t - \tfrac{1}{2}k^2 - \frac{1^2.3}{2^2.4}k^4 - \frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6}k^6\right) - \text{etc.}$$
$$+ \frac{1.k^2}{2^2} + \frac{1^2.k^4}{2^2.4^2} + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2.6^2}k^6 + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2.8^2}k^8 + \text{etc.},$$

welcher leicht auch also dargestellt werden kann:

$$E' = t.\log\left(\frac{4}{k}\right) + 1 - (t - \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2}k^2) - \frac{2}{3.4}\left(t - \tfrac{1}{2}k^2 - \tfrac{1}{2}.\frac{1^2.3}{2^2.4}k^4\right)$$
$$- \frac{2}{5.6}\left(t - \tfrac{1}{2}k^2 - \frac{1^2.3}{2^2.4}k^4 - \tfrac{1}{2}.\frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6}k^6\right)$$
$$- \frac{2}{7.8}\left(t - \tfrac{1}{2}k^2 - \frac{1^2.3}{2^2.4}k^4 - \frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6}k^6 + \tfrac{1}{2}.\frac{1^2.3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2.8}k^8\right)$$
$$- \text{etc.}$$

Setzen wir also noch

$$t_1 = \tfrac{1}{2}.\frac{k^2}{2},$$

$$t_2 = \tfrac{1}{2}k^2 + \tfrac{1}{2}.\frac{1^2.3}{2^2.4}k^4,$$

$$t_3 = \tfrac{1}{2}k^2 + \frac{1^2.3}{2^2.4}k^4 + \tfrac{1}{2}.\frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6}k^6,$$

$$t_4 = \tfrac{1}{2}k^2 + \frac{1^2.3}{2^2.4}k^4 + \frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6}k^6 + \tfrac{1}{2}.\frac{1^2.3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2.8}k^8,$$

$$t_5 = \tfrac{1}{2}k^2 + \frac{1^2.3}{2^2.4}k^4 + \frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6}k^6 + \frac{1^2.3^2\,5^2.7}{2^2.4^2.6^2.8}k^8 + \tfrac{1}{2}.\frac{1^2.3^2.5^2.7^2.9}{2^2.4^2.6^2.8^2.10}k^{10}$$

u. s. w.

so nähern sich auch diese Ausdrücke ohne Ende dem Werthe $\mathfrak{L}$, und wir haben

$$E' = t.\log\left(\frac{4}{k}\right) + 1 - (t - t_1) - \frac{2}{3.4}(t - t_2) - \frac{2}{5.6}(t - t_3) - \frac{2}{7.8}(t - t_4)$$
$$- \frac{2}{9.10}(t - t_5) - \text{etc.}; \text{ so wie}$$

$$E = K - \tfrac{1}{2}\pi.t.$$

Berechnet man nach dieser Formel den Quadranten E, so ist die Berechnung des Quadranten E' nach der vorigen Formel sehr einfach.

§. 105.

Andere Reihen für u und $\mathrm{el}\,u$, welche nach Potenzen von k und $\frac{k}{k'}$ fortschreiten.

Die im §. 99. entwickelten Reihen können auch also dargestellt werden:

1. $$u = \mathrm{am}\,u + \frac{1^2}{2^2}(\mathrm{am}\,u - \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u)k^2$$
$$+ \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}(\mathrm{am}\,u - \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u - \tfrac{2}{3}\mathrm{sn}^3 u\,\mathrm{cn}\,u)k^4$$
$$+ \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}\left(\mathrm{am}\,u - \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u - \tfrac{2}{3}\mathrm{sn}^3 u\,\mathrm{cn}\,u - \frac{2.4}{3.5}\mathrm{sn}^5 u\,\mathrm{cn}\,u\right)k^6$$
$$+ \frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2}\left(\mathrm{am}\,u - \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u - \tfrac{2}{3}\mathrm{sn}^3 u\,\mathrm{cn}\,u - \frac{2.4}{3.5}\mathrm{sn}^5 u\,\mathrm{cn}\,u - \frac{2.4.6}{3.5.7}\mathrm{sn}^7 u\,\mathrm{cn}\,u\right)k^8$$
$$+ \text{etc.},$$

2. $$\mathrm{el}\,u = \mathrm{am}\,u - \frac{1}{2^2}(\mathrm{am}\,u - \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u)k^2$$
$$- \frac{1^2.3}{2^2.4^2}(\mathrm{am}\,u - \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u - \tfrac{2}{3}\mathrm{sn}^3 u\,\mathrm{cn}\,u)k^4$$
$$- \frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6^2}\left(\mathrm{am}\,u - \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u - \tfrac{2}{3}\mathrm{sn}^3 u\,\mathrm{cn}\,u - \frac{2.4}{3.5}\mathrm{sn}^5 u\,\mathrm{cn}\,u\right)k^6$$
$$- \text{etc., und}$$

3. $$u - \mathrm{el}\,u = \tfrac{1}{2}(\mathrm{am}\,u - \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u)k^2$$
$$+ \frac{1^2.3}{2^2.4}(\mathrm{am}\,u - \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u - \tfrac{2}{3}\mathrm{sn}^3 u\,\mathrm{cn}\,u)k^4$$
$$+ \frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6}\left(\mathrm{am}\,u - \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u - \tfrac{2}{3}\mathrm{sn}^3 u\,\mathrm{cn}\,u - \frac{2.4}{3.5}\mathrm{sn}^5 u\,\mathrm{cn}\,u\right)k^6$$
$$+ \text{etc.}$$

Man wird diese Reihen zur Berechnung von u und $\mathrm{el}\,u$ dann anwenden, wenn die Amplitude φ dieselbe bleiben, der Modul k aber sich ändern soll, weil dann auch alle Coefficienten der Potenzen von k in diesen Reihen dieselben bleiben, und also bei jeder neuen Berechnung immer wieder

gebraucht werden können. Die Convergenz dieser Reihen vermindert sich aber, wenn das Argument u gröſser und gröſser genommen wird. Wird $u > \frac{1}{2}K$, so wird man sofort $K-u$ für u setzen; dadurch verwandelt sich $\operatorname{am} u$ in $\operatorname{amc} u = \frac{1}{2}\pi - \operatorname{arc\,tang}(k' \operatorname{tn} u)$, und es ist nun also $\operatorname{amc} u$ beträchtlich geringer; $\operatorname{el} u$ verwandelt sich nun in

$$\operatorname{elc} u = E - \operatorname{el} u + k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{snc} u.$$

Setzen wir also $\operatorname{amc} u = \psi$ und $\operatorname{am} u = \varphi$, so haben wir $\operatorname{tang}\psi . \operatorname{tang}\varphi = \frac{1}{k'}$ und

$$4. \begin{cases} u = K - \psi - \frac{1^2}{2^2}\lambda^1(\psi)k^2 - \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}\lambda^2(\psi).k^4 - \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}\lambda^3(\psi).k^6 - \text{etc.} \\ \operatorname{el} u = E + k^2 \sin\varphi \sin\psi - \psi + \frac{1}{2^2}\lambda^1(\psi).k^2 + \frac{1^2.3}{2^2.4^2}\lambda^2(\psi).k^4 \\ \qquad + \frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6}\lambda^3(\psi).k^6 + \text{etc.} \\ u - \operatorname{el} u = K - E - k^2 \sin\varphi \sin\psi - \frac{1}{2}\lambda^1(\psi)k^2 - \frac{1^2.3}{2^2.4}\lambda^2(\psi)k^4 \\ \qquad - \frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6}\lambda^3(\psi)k^6 + \text{etc.} \end{cases}$$

Diese Reihen convergiren um desto rascher, je gröſser u wird. Denn je gröſser $\varphi = \operatorname{am} u$ genommen wird, desto kleiner wird ψ, und desto rascher nähern sich also die Gröſsen $\lambda^1(\psi)$, $\lambda^2(\psi)$, $\lambda^3(\psi)$, $\lambda^4(\psi)$ etc. der Grenze Null. Diese Formeln verfehlen nur dann ihren Zweck, wenn der Modul k wenig von Eins verschieden ist, weil, der Formel $\operatorname{tang}\psi = \frac{1}{k' \operatorname{tang}\varphi}$ gemäſs, dann ψ dennoch eine beträchtliche Gröſse haben kann.

Setzen wir in den Formeln (1.), (2.), (3.) $k'u$ für u und $\frac{ik}{k'}$ statt k, so verwandelt sich $\operatorname{am} u$ in $\frac{1}{2}\pi - \operatorname{amc} u$; ferner $\operatorname{el} u$ in $\frac{E - \operatorname{elc} u}{k'}$; daher erhalten wir sofort noch

$$5. \begin{cases} k'.u = \frac{1}{2}\pi - \operatorname{amc} u - \frac{1^2}{2^2}\lambda^1(\frac{1}{2}\pi - \operatorname{amc} u).\frac{k^2}{k'^2} + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}\lambda^2(\frac{1}{2}\pi - \operatorname{amc} u).\frac{k^4}{k'^4} \\ \qquad - \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}\lambda^3(\frac{1}{2}\pi - \operatorname{amc} u).\frac{k^6}{k'^6} + - \text{etc.} \\ \frac{E - \operatorname{elc} u}{k'} = \frac{1}{2}\pi - \operatorname{amc} u + \frac{1}{2^2}\lambda^1(\frac{1}{2}\pi - \operatorname{amc} u).\frac{k^2}{k'^2} - \frac{1^2.3}{3^2.4^2}\lambda^2(\frac{1}{2}\pi - \operatorname{amc} u).\frac{k^4}{k'^4} \\ \qquad - \frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6^2}\lambda^3(\frac{1}{2}\pi - \operatorname{amc} u).\frac{k^6}{k'^6} - + \text{etc.} \end{cases}$$

Setzen wir in der Formel (1.) ui für u und k' für k, so erhalten wir, da $\operatorname{am}'(ui) = i\,\mathfrak{Am}' u = i\,\mathfrak{L}\operatorname{am} u$ ist, sogleich

$$6.\quad u = \mathfrak{L}\mathrm{am}\,u + \frac{1^2}{2^2}\left(\mathfrak{L}\mathrm{am}\,u - \frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{cn}\,u}\right)k'^2 + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}\left(\mathfrak{L}\mathrm{am}\,u - \frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{cn}\,u} + \tfrac{2}{3}.\frac{\mathrm{tn}^3\,u}{\mathrm{cn}\,u}\right)k'^4$$
$$+ \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}\left(\mathfrak{L}\mathrm{am}\,u - \frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{cn}\,u} + \tfrac{2}{3}.\frac{\mathrm{tn}^3\,u}{\mathrm{cn}\,u} - \frac{2.4}{3.5}.\frac{\mathrm{tn}^5\,u}{\mathrm{cn}\,u}\right)k'^6$$
$$+ \frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2}\left(\mathfrak{L}\mathrm{am}\,u - \frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{cn}\,u} + \tfrac{2}{3}.\frac{\mathrm{tn}^3\,u}{\mathrm{cn}\,u} - \frac{2.4}{3.5}.\frac{\mathrm{tn}^5\,u}{\mathrm{cn}\,u} + \frac{2.4.6}{3.5.7}.\frac{\mathrm{tn}^7\,u}{\mathrm{cn}\,u}\right)k'^8$$
$$+ \text{etc.}$$

Dieser Formel bedient man sich mit Vortheil, wenn der Modul k der gegebenen Amplitude $\mathrm{am}\,u$ wenig von Eins verschieden und das Argument $u < \frac{1}{2}K$ ist. Die eingeklammerten Coefficienten nähern sich, wenn $\mathrm{am}\,u < \frac{1}{4}\pi$ ist, ebenfalls der Grenze Null, was fast auf dieselbe Art bewiesen werden kann, wie die Formel $\lambda(\phi) = 0$ im §. 100. bewiesen worden ist. Jene Coefficienten sind übrigens abwechselnd negativ und positiv. Da $u - \mathfrak{E}\mathfrak{l}'u = \mathrm{el}\,u - \mathrm{tn}\,u\,\mathrm{dn}\,u$ nach §. 70. ist, so verwandelt sich die Formel (3.) in

$$7.\quad \mathrm{el}\,u = \mathrm{tn}\,u\,\mathrm{dn}\,u + \tfrac{1}{2}\left(\mathfrak{L}\mathrm{am}\,u - \frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{cn}\,u}\right)k'^2 + \frac{1^2.3}{2^2.4}\left(\mathfrak{L}\mathrm{am}\,u - \frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{cn}\,u} + \tfrac{2}{3}.\frac{\mathrm{tn}^3\,u}{\mathrm{cn}\,u}\right)k'^4$$
$$+ \frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6}\left(\mathfrak{L}\mathrm{am}\,u - \frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{cn}\,u} + \tfrac{2}{3}.\frac{\mathrm{tn}^3\,u}{\mathrm{cn}\,u} - \frac{2.4}{3.5}.\frac{\mathrm{tn}^5\,u}{\mathrm{cn}\,u}\right)k'^6 + \text{etc.}$$

und auch diese Formel ist zweckmäſsig, wenn k groſs und das Argument $u < \frac{1}{2}K$ ist.

Ist das Argument $u > \frac{1}{2}K$, also $K - u < \frac{1}{2}K$, so bedient man sich am besten der Formel

$$8.\quad u = K - \mathfrak{L}\mathrm{amc}\,u - \frac{1^2}{2^2}\left(\mathfrak{L}\mathrm{amc}\,u - \frac{\mathrm{tnc}\,u}{\mathrm{cnc}\,u}\right)k'^2 - \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}\left(\mathfrak{L}\mathrm{amc}\,u - \frac{\mathrm{tnc}\,u}{\mathrm{cnc}\,u} + \tfrac{2}{3}.\frac{\mathrm{tnc}^3\,u}{\mathrm{cnc}\,u}\right)k'^4$$
$$- \frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6}\left(\mathfrak{L}\mathrm{amc}\,u - \frac{\mathrm{tnc}\,u}{\mathrm{cnc}\,u} + \tfrac{2}{3}.\frac{\mathrm{tnc}^3\,n}{\mathrm{cnc}\,u} - \frac{2.4}{3.5}.\frac{\mathrm{tnc}^5\,u}{\mathrm{cnc}\,u}\right).k'^6$$
$$- \frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2}\left(\mathfrak{L}\mathrm{amc}\,u - \frac{\mathrm{tnc}\,u}{\mathrm{cnc}\,u} + \tfrac{2}{3}.\frac{\mathrm{tnc}^3\,u}{\mathrm{cnc}\,u} - \frac{2.4}{3.5}.\frac{\mathrm{tnc}^5\,u}{\mathrm{cnc}\,u} + \frac{2.4.6}{3.5.7}.\frac{\mathrm{tnc}^7\,u}{\mathrm{cnc}\,u}\right).k'^6$$
$$- \text{etc.,}$$

wenn der Modul k wenig von Eins verschieden ist.

Setzen wir auch in der Formel (7.) $K - u$ für u, so erhalten wir, da $\mathrm{el}\,u = E - \mathrm{elc}\,u + k^2\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u$, und $\mathrm{tnc}\,u\,\mathrm{dnc}\,u - k^2\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u = \frac{\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{tn}\,u}$ $= \frac{k'^2.\,\mathrm{tnc}\,u}{\mathrm{dnc}\,u}$ ist, die Reihe

$$9.\quad \mathrm{el}\,u = E - \frac{\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{tn}\,u} - \tfrac{1}{2}\left(\mathfrak{L}\mathrm{amc}\,u - \frac{\mathrm{tnc}\,u}{\mathrm{cnc}\,u}\right).k'^2 - \frac{1^2.3}{2^2.4}\left(\mathfrak{L}\mathrm{amc}\,u - \frac{\mathrm{tnc}\,u}{\mathrm{cnc}\,u} + \tfrac{2}{3}.\frac{\mathrm{tnc}^3\,u}{\mathrm{cnc}\,u}\right)k'^4$$
$$- \frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6}\left(\mathfrak{L}\mathrm{amc}\,u - \frac{\mathrm{tnc}\,u}{\mathrm{cnc}\,u} + \tfrac{2}{3}.\frac{\mathrm{tnc}^3\,u}{\mathrm{cnc}\,u} - \frac{2.4}{3.5}.\frac{\mathrm{tnc}^5\,u}{\mathrm{cn}\,u}\right)k'^6 - \text{etc.,}$$

welche dann zur Berechnung von $\mathrm{el}\,u$ dient, wenn der Modul k wenig von Eins verschieden und das Argument $u > \frac{1}{2}K$ ist, die Reihe (7.) also nicht mehr rasch genug convergirt.

Wie die Quadranten K und E unter diesen Umständen zu berechnen sind, ist in §. 103. — §. 105. umständlich gezeigt worden.

Zusatz. Es ist $\partial\,\mathrm{el}\,u = \mathrm{dn}^2 u.\partial u = \frac{k'^2.\partial u}{\mathrm{dnc}^2 u}$. Setzt man nun $\varphi = \frac{1}{2}\pi - \mathrm{amc}\,u$, so ist $\partial\varphi = \partial u.\mathrm{dnc}\,u$, also $\partial u = \frac{\partial\varphi}{\mathrm{dnc}\,u}$: folglich ist $\partial\,\mathrm{el}\,u = k'^2.\frac{\partial\varphi}{\mathrm{dnc}^3 u} = \frac{k'^2.\partial\varphi}{\sqrt{(1-k^2\,\mathrm{snc}^2 u)^3}} = \frac{k'^2.\partial\varphi}{\sqrt{(1-k^2\cos^2\varphi)^3}}$. Da nun

$$(1-k^2\cos^2\varphi)^{-\frac{3}{2}} = 1 + \tfrac{3}{2}k^2\cos^2\varphi + \frac{3.5}{2.4}k^4\cos^4\varphi + \frac{3.5.7}{2.4.6}k^6\cos^6\varphi + \ldots.$$

ist, so erhält man, wenn man diese Reihe mit $k'^2.\partial\varphi$ multiplicirt und integrirt:

$$\mathrm{el}\,u = k'^2(\varphi + \frac{3}{2^2}k^2(\tfrac{1}{2}\pi - \lambda'(\tfrac{1}{2}\pi-\varphi)) + \frac{3^2.5}{2^2.4^2}k^4(\tfrac{1}{2}\pi - \lambda^2(\tfrac{1}{2}\pi-\varphi))$$
$$+ \frac{3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2}k^6(\tfrac{1}{2}\pi - \lambda^3(\tfrac{1}{2}\pi-\varphi)) + \frac{3^2.5^2.7^2.9}{2^2.4^2.6^2.8^2}.k^8(\tfrac{1}{2}\pi - \lambda^4(\tfrac{1}{2}\pi-\varphi)) + \ldots.$$

Für $u = K$ hat man noch die Reihe

$$E = \tfrac{1}{2}\pi.k'^2\left(1 + \frac{3}{2^2}k^2 + \frac{3^2.5}{2^2.4^2}k^4 + \frac{3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2}k^6 + \frac{3^2.5^2.7^2.9}{2^2.4^2.6^2.8^2}k^8 + \ldots.\right);$$

daher kann die vorige Reihe auch also dargestellt werden:

$$1. \quad \mathrm{el}\,u = E - k'^2\Big[\psi + \frac{3}{2^2}k^2\lambda^1(\psi) + \frac{3^2.5}{2^2.4^2}k^4\lambda^2(\psi) + \frac{3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2}k^6\lambda^3(\psi)$$
$$+ \frac{3^2.5^2.7^2.9}{2^2.4^2.6^2.8^2}k^8\lambda^4(\psi)\ldots.\Big],$$

wenn man wieder $\psi = \mathrm{amc}\,u$ setzt. Es kann diese Reihe als eine Umformung der Reihe $\mathrm{el}\,u = E + k^2\sin\varphi\sin\psi - \psi + \frac{1}{2^2}k^2\lambda^1(\psi) + \ldots.$ angesehen werden. Wird wieder $\varphi = \frac{1}{2}\pi - \mathrm{amc}\,u$ gesetzt, so folgt aus $\mathrm{el}\,u = \frac{1}{k'}\int\frac{\partial\varphi}{\sqrt{\left(1+\frac{k^2}{k'^2}\sin^2\varphi\right)^3}}$ noch die Reihe

$$2. \quad \mathrm{el}\,u = \frac{1}{k'}\Big(\varphi - \frac{3}{2^2}.\frac{k^2}{k'^2}\lambda'(\varphi) + \frac{3^2.5}{2^2.4^2}.\frac{k^4}{k'^4}\lambda^2(\varphi) - \frac{3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2}.\frac{k^6}{k'^6}\lambda^3(\varphi)$$
$$+ \frac{3^2.5^2.7^2.9}{2^2.4^2.6^2.8^2}.\frac{k^8}{k'^8}\lambda^4(\varphi) - + \ldots.\Big)$$

§. 106.

Reihen zur Berechnung von u und el u aus am u, welche zum Theil nach Potenzen von sn u fortschreiten.

Wenn man in der Reihe (1.) des §. 105. die Klammern auflöset, so erhält man

$$u = \operatorname{am} u \left(1 + \frac{1^2}{2^2} k^2 + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2} k^4 + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2} k^6 + \frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2} k^8 + \text{etc.}\right)$$
$$- \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \left(\frac{1^2}{2^2} k^2 + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2} k^4 + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2} k^6 + \text{etc.}\right)$$
$$- \tfrac{2}{3} \operatorname{sn}^3 u \operatorname{cn} u \left(\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2} k^4 + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2} k^6 + \text{etc.}\right)$$

u. s. w.

Wenden wir nun dieselbe Bezeichnung an, wie in §. 103., so erhalten wir die Formel

$$1. \quad u = \mathfrak{K}.\operatorname{am} u - (\mathfrak{K} - 1) \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u - \tfrac{2}{3} (\mathfrak{K} - \mathfrak{K}_1) \operatorname{sn}^3 u \operatorname{cn} u$$
$$- \frac{2.4}{3.5} (\mathfrak{K} - \mathfrak{K}_2) \operatorname{sn}^5 u \operatorname{sn} u - \frac{2.4.6}{3.5.7} (\mathfrak{K} - \mathfrak{K}_3) \operatorname{sn}^7 u \operatorname{cn} u$$
$$- \frac{2.4.6.8}{3.5.7.9} (\mathfrak{K} - \mathfrak{K}_4) \operatorname{sn}^9 u \operatorname{cn} u - \text{etc.}$$

Diese Reihe hat immer einen hohen Grad der Convergenz und ist vorzüglich dann anzuwenden, wenn der Modul k constant, hingegen am u veränderlich ist. Wird am $u >$ amc u, so wird man $K - u$ für u setzen. Dieselben Zahlen $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$, $\mathfrak{K}_4$ etc. also, welche zur Berechnung von K und K' dienen, dienen hier auch zur Berechnung von u aus am u.

Setzen wir ferner

$$\mathfrak{N}_1 = 1 - \frac{1}{2^2} k^2,$$
$$\mathfrak{N}_2 = 1 - \frac{1}{2^2} k^2 - \frac{1^2.3}{2^2.4^2} k^4,$$
$$\mathfrak{N}_3 = 1 - \frac{1}{2^2} k^2 - \frac{1^2.3}{2^2.4^2} k^4 - \frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6^2} k^6,$$
$$\mathfrak{N}_4 = 1 - \frac{1}{2^2} k^2 - \frac{1^2.3}{2^2.4^2} k^4 - \frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6^2} k^6 - \frac{1^2.3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2.8^2} k^8$$

etc., und

$$\mathfrak{N} = 1 - \frac{1}{2^2} k^2 - \frac{1^2.3}{2^2.4^2} k^4 - \frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6^2} k^6 - \frac{1^2.3^2.5^2.7}{2^2.3^2.6^2.8^2} k^8 - \text{etc.},$$

so dafs $E = \frac{1}{2}\pi.\mathfrak{N}$ ist, so finden wir auf ähnliche Art wie vorhin:

$$2.\quad \mathrm{el}\,u = \mathfrak{N}.\mathrm{am}\,u + (1-\mathfrak{N})\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u + \tfrac{2}{3}(\mathfrak{N}_1-\mathfrak{N})\,\mathrm{sn}^3 u\,\mathrm{cn}\,u + \frac{2.4}{3.5}(\mathfrak{N}_2-\mathfrak{N})\,\mathrm{sn}^5 u\,\mathrm{cn}\,u + \frac{2.4.6}{3.5.7}(\mathfrak{N}_3-\mathfrak{N})\,\mathrm{sn}^7 u\,\mathrm{cn}\,u + \frac{2.4.6.8}{3.5.7.9}(\mathfrak{N}_4-\mathfrak{N})\,\mathrm{sn}^9 u\,\mathrm{cn}\,u + \text{etc.}$$

Auch für $u-\mathrm{el}\,u$ läſst sich eine ähnliche Reihe herleiten. Dadurch, daſs man die Sätze des §. 31. anwendet, und ferner, indem man ui für u setzt, lassen sich aus diesen Reihen leicht noch andere herleiten; womit wir uns hier aber nicht aufhalten.

§. 107.

Reihen für u und $\mathrm{el}\,u$, welche nach dem Sinus der vervielfachten Amplitude $\varphi = \mathrm{am}\,u$ fortschreiten.

Wenn man in der Reihe

$$u = \varphi + \frac{1^2}{2^2}\lambda^1(\varphi).k^2 + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}\lambda^2(\varphi).k^4 + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}\lambda^3(\varphi).k^6 + \text{etc.}$$

für $\lambda^1(\varphi)$, $\lambda^2(\varphi)$, $\lambda^3(\varphi)$ die in §. 100. gefundenen Werthe substituirt, so erhält man eine Reihe von der Form

$$1.\quad \mathrm{arg\,am}(\varphi) = \overset{0}{a}.\varphi - \frac{\overset{1}{a}}{1}\sin 2\varphi + \frac{\overset{2}{a}}{2}\sin 4\varphi - \frac{\overset{3}{a}}{3}\sin 6\varphi + \frac{\overset{4}{a}}{4}\sin 8\varphi - \frac{\overset{5}{a}}{5}\sin 10\varphi + - \text{etc.}$$

und die darin vorkommenden Coefficienten sind selbst ausgedrückt durch die Reihen

$$2.\quad \begin{cases} \overset{0}{a} = 1 + \frac{1^2}{2^2}k^2 + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}k^4 + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}k^6 + \frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2}k^8 + \text{etc.} \\ \overset{1}{a} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}k^2 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}k^4 + \frac{3}{4}\cdot\frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}k^6 + \frac{5}{6}\cdot\frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2}k^8 + \text{etc.} \\ \overset{2}{a} = \frac{2.1}{3.4}\cdot\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}k^4 + \frac{3.2}{4.5}\cdot\frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}k^6 + \frac{4.3}{5.6}\cdot\frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2}k^8 + \text{etc.} \\ \overset{3}{a} = \frac{3.2.1}{4.5.6}\cdot\frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}k^6 + \frac{4.3.2}{5.6.7}\cdot\frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2}k^8 + \text{etc.} \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Diese Reihen schreiten nach einem einfachen Gesetze fort; die erste Reihe ist offenbar

$$\overset{0}{a} = \frac{2K}{\pi}.$$

Differenziirt man die Reihe (1.), so erhält man, wenn $\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)} = \Delta$ gesetzt wird, die Gleichung

$$\frac{1}{\triangle} = \overset{0}{a} - 2\overset{1}{a}\cos 2\varphi + 2\overset{2}{a}\cos 4\varphi - 2\overset{3}{a}\cos 6\varphi + 2\overset{4}{a}\cos 8\varphi$$
$$- 2\overset{5}{a}\cos 10\varphi + - \text{etc.}$$

Multiplicirt man diese Reihe mit $\cos 2\varphi$, so erhält man

$$\frac{\cos 2\varphi}{\triangle} = \overset{0}{a}\cos 2\varphi - \overset{1}{a}(1 + \cos 4\varphi) + \overset{2}{a}(\cos 2\varphi + \cos 6\varphi)$$
$$- \overset{3}{a}(\cos 4\varphi + \cos 8\varphi) + - \text{etc.}$$

Hieraus folgt

$$\int_0 \frac{\cos\varphi . \partial\varphi}{\triangle} = \frac{\overset{0}{a}}{2}\sin 2\varphi - \overset{1}{a}\left(\sin\varphi + \frac{\sin 4\varphi}{4}\right) + \overset{2}{a}\left(\frac{\sin 2\varphi}{2} + \frac{\sin 6\varphi}{6}\right)$$
$$- \overset{3}{a}\left(\frac{\sin 4\varphi}{4} + \frac{\sin 8\varphi}{8}\right) + \text{etc.}$$

Setzt man nun $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, so wird $\sin 2\varphi = \sin 4\varphi = 6\varphi$ etc. $= 0$ und es bleibt also nur noch die einfache Gleichung

$$\overset{1}{a} . \tfrac{1}{2}\pi = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\varphi . \partial\varphi}{\triangle}.$$

Es ist aber $\cos 2\varphi = 1 - 2\sin^2\varphi = 1 - \frac{2}{k^2} . k^2 \sin^2\varphi = 1 - \frac{2}{k^2}(1 - \triangle^2) = 1 - \frac{2}{k^2} + \frac{2\triangle^2}{k^2}$, also

$$\overset{1}{a} . \tfrac{1}{2}\pi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2}{k^2} - 1\right) . \frac{\partial\varphi}{\triangle} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{k^2} . \partial\varphi . \triangle,$$

oder auch

$$\overset{1}{a} . \tfrac{1}{2}\pi = \left(\frac{2}{k^2} - 1\right)K - \frac{2}{k^2}E = \frac{2}{k^2}(K - E) - K,$$

folglich

$$4. \quad \overset{1}{a} = \frac{4}{\pi k^2}(K - E) - \frac{2K}{\pi}.$$

In ähnlicher Weise können auch die folgenden Coefficienten $\overset{2}{a}$, $\overset{3}{a}$, $\overset{4}{a}$ etc. in geschlossenen Ausdrücken angegeben werden. Indessen können diese Coefficienten auch recurrirend aus den beiden vorigen $\overset{0}{a}$ und $\overset{1}{a}$ berechnet werden; die allgemeine Recursions-Formel leiten wir also her. Differenziirt man die vorhin angegebene Reihe für $\frac{1}{\triangle}$ noch einmal, so erhält man

$$\frac{k^2 \sin\varphi \cos\varphi}{\triangle^3} = 4\overset{1}{a}\sin 2\varphi - 8\overset{2}{a}\sin 4\varphi + 12\overset{3}{a}\sin 6\varphi - 16\overset{4}{a}\sin 8\varphi$$
$$+ 20\overset{5}{a}\sin 10\varphi - + \text{etc.}$$

Es ist aber $\triangle^2 = 1 - k^2\sin^2\varphi = 1 - \frac{k^2}{2}(1 - \cos 2\varphi) = 1 - \frac{k^2}{2} + \frac{k^2}{2}\cos 2\varphi$ und $\sin\varphi\cos\varphi = \frac{\sin 2\varphi}{2}$, also ist auch

$$\frac{k^2 \sin 2\varphi}{\triangle(2-k^2+k^2\cos 2\varphi)} = \frac{\sin 2\varphi}{\triangle\left(\frac{2}{k^2}-1+\cos 2\varphi\right)} = 4\overset{1}{a}\sin 2\phi - 8\overset{2}{a}\sin 4\phi + \text{etc.}$$

oder

$$\frac{\sin 2\varphi}{\triangle} = \left\{\begin{array}{r} 4n\overset{1}{a}\sin 2\phi - 8n\overset{2}{a}\sin 4\phi + 12n\overset{3}{a}\sin 6\phi - 16n\overset{4}{a}\sin 8\phi + \text{etc.} \\ + \;\; 2\overset{1}{a}\sin 4\phi - \;\; 4\overset{2}{a}\sin 6\phi + \;\; 6\overset{3}{a}\sin 8\phi - \text{etc.} \\ - 4\overset{2}{a}\sin 2\phi + 6\overset{3}{a}\sin 4\phi - \;\; 8\overset{4}{a}\sin 6\phi + 10\overset{5}{a}\sin 8\phi + \text{etc.} \end{array}\right\}$$

wenn der Kürze wegen $n = \frac{2}{k^2} - 1$ gesetzt wird. Einen ähnlichen Ausdruck für $\frac{\sin 2\varphi}{\triangle}$ erhalten wir, wenn wir die anfängliche Reihe für $\frac{1}{\triangle}$ noch mit $\sin 2\phi$ multipliciren, nämlich

$$\begin{aligned} \frac{\sin 2\varphi}{\triangle} = {} & \overset{0}{a}\sin 2\phi - \overset{1}{a}\sin 4\phi + \overset{2}{a}\sin 6\phi - \overset{3}{a}\sin 8\phi + - \text{etc.} \\ & - \overset{2}{a}\sin 2\phi + \overset{3}{a}\sin 4\phi - \overset{4}{a}\sin 6\phi + \overset{5}{a}\sin 8\phi - + \text{etc.}, \end{aligned}$$

und da diese beiden Entwicklungen identisch sein müssen, so ist

$$5.\quad \left\{\begin{array}{l} 3\overset{2}{a} = \;\; 4\left(\frac{2}{k^2}-1\right).\overset{1}{a} - 1.\overset{0}{a}, \\ 5\overset{3}{a} = \;\; 8\left(\frac{2}{k^2}-1\right).\overset{2}{a} - 3.\overset{1}{a}, \\ 7\overset{4}{a} = 12\left(\frac{2}{k^2}-1\right).\overset{3}{a} - 5.\overset{2}{a}, \\ 9\overset{5}{a} = 16\left(\frac{2}{k^2}-1\right).\overset{4}{a} - 7.\overset{3}{a}, \\ 11\overset{6}{a} = 20\left(\frac{2}{k^2}-1\right).\overset{5}{a} - 9.\overset{4}{a} \\ \text{u. s. w.} \end{array}\right.$$

Nach diesen einfachen Formeln geht die Berechnung von $\overset{2}{a}, \overset{3}{a}, \overset{4}{a}, \overset{5}{a}$ etc. sehr bequem von Statten. Ueberhaupt ist

$$(2r+1).\overset{r+1}{a} = 4r\left(\frac{2}{k^2}-1\right).\overset{r}{a} - (2r-1)\overset{r-1}{a}.$$

Die Reihen (2.) zeigen, was aus diesen Recursions-Formeln nicht sogleich ersichtlich ist: daſs die Coefficienten $\overset{0}{a}, \overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a}$ etc. eine rasch convergirende Reihe bilden.

Substituiren wir auch in der Reihe (2.) des §. 99. die Ausdrücke des §. 100., so erhalten wir für el$u$ eine Reihe von der Form

$$6.\quad \text{el}\,u = \overset{0}{c}.\phi + \overset{1}{c}\sin 2\phi - \frac{\overset{2}{c}}{2}\sin 4\phi + \frac{\overset{3}{c}}{3}\sin 6\phi - \frac{\overset{4}{c}}{4}\sin 8\phi + \frac{\overset{5}{c}}{5}\sin 10\phi - + \text{etc.}$$

Für die hierin vorkommenden Coefficienten selbst haben wir die Reihen

$$7.\quad\begin{cases}\overset{0}{c} = 1 - \frac{1}{2^2}k^2 - \frac{1^2.3}{2^2.4^2}k^4 - \frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6^2}k^6 - \frac{1^2.3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2.8^2}k^8 - \text{etc.}\\ \overset{1}{c} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1^2}{2^2}k^2 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6^2}k^4 + \frac{3}{4}\cdot\frac{1^2.3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2.8^2}k^6 + \text{etc.}\\ \overset{2}{c} = \frac{2.1}{3.4}\cdot\frac{1^2.3}{2^2.4^2}k^4 + \frac{3.2}{4.5}\cdot\frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6^2}k^6 + \frac{4.3}{5.6}\cdot\frac{1^2.3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2.8^2}k^8 + \text{etc.}\\ \overset{3}{c} = \frac{3.2.1}{4.5.6}\cdot\frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6^2}k^6 + \frac{4.3.2}{5.6.7}\cdot\frac{1^2.3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2.8^2}k^8 + \text{etc.}\\ \text{u. s. w.}\end{cases}$$

Die erste Reihe kam schon oft vor. Es ist

$$8.\quad \overset{0}{c} = \frac{2E}{\pi}.$$

Die Coefficienten $\overset{0}{c}, \overset{1}{c}, \overset{2}{c}, \overset{3}{c}$ etc. hangen auf eine ziemlich einfache Weise zusammen mit den Coefficienten $\overset{0}{a}, \overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a}$ etc. Multiplicirt man die anfängliche Reihe für $\frac{1}{\triangle}$ mit $\triangle = \frac{k^2}{2}\left(\frac{2}{k^2} - 1 + \cos 2\varphi\right)$, so erhält man

$$\begin{aligned}\triangle = \left(1-\frac{k^2}{2}\right)&(\overset{0}{a} - 2\overset{1}{a}\cos 2\varphi + 2\overset{2}{a}\cos 4\varphi - 2\overset{3}{a}\cos 6\varphi + 2\overset{4}{a}\cos 8\varphi - + \text{etc.})\\ &+ \frac{k^2}{2}\cdot(\overset{0}{a}\cos 2\varphi - \overset{1}{a}(1+\cos 4\varphi) + \overset{2}{a}(\cos 2\varphi + \cos 6\varphi)\\ &\qquad - \overset{3}{a}(\cos 4\varphi + \cos 8\varphi) + \text{etc.}))\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}\triangle = \left(1-\frac{k^2}{2}\right)&(\overset{0}{a} - 2\overset{1}{a}\cos 2\varphi + 2\overset{2}{a}\cos 4\varphi - 2\overset{3}{a}\cos 6\varphi + 2\overset{4}{a}\cos 8\varphi - + \text{etc.})\\ &+ \frac{k^2}{2}(-\overset{1}{a} + \overset{2}{a}\cos 2\varphi - \overset{3}{a}\cos 4\varphi + \overset{4}{a}\cos 6\varphi - \overset{5}{a}\cos 8\varphi + - \text{etc.})\\ &+ \frac{k^2}{2}(\quad + \overset{0}{a}\cos 2\varphi - \overset{1}{a}\cos 4\varphi + \overset{2}{a}\cos 6\varphi - \overset{3}{a}\cos 8\varphi + - \text{etc.})\end{aligned}$$

Differenziirt man aber die Gleichung (6.), so erhält man auch

$$\triangle = \overset{0}{c} + 2\overset{1}{c}\cos 2\varphi - 2\overset{2}{c}\cos 4\varphi + 2\overset{3}{c}\cos 6\varphi - 2\overset{4}{c}\cos 8\varphi + - \text{etc.},$$

und da diese Reihe mit der vorigen identisch sein muſs, so finden sich die Gleichungen

$$9.\quad\begin{cases}\overset{0}{c} = \left(1-\frac{k^2}{2}\right)\overset{0}{a} - \frac{k^2}{2}\overset{1}{a}, & 2\overset{3}{c} = \frac{k^2}{2}(\overset{4}{a}+\overset{2}{a}) - 2\left(1-\frac{k^2}{2}\right)\overset{3}{a},\\ 2\overset{1}{c} = \frac{k^2}{2}(\overset{2}{a}+\overset{0}{a}) - 2\left(1-\frac{k^2}{2}\right)\overset{1}{a}, & 2\overset{4}{c} = \frac{k^2}{2}(\overset{5}{a}+\overset{3}{a}) - 2\left(1-\frac{k^2}{2}\right)\overset{4}{a},\\ 2\overset{2}{c} = \frac{k^2}{2}(\overset{3}{a}+\overset{1}{a}) - 2\left(1-\frac{k^2}{2}\right)\overset{2}{a}, & \text{u. s. w.}\end{cases}$$

Noch etwas einfacher sind die Ausdrücke, welche man wie folgt erhält. Differenziirt man die vorige Reihe für $\triangle$, so erhält man $\partial\triangle = \frac{-k^2 \sin\varphi\cos\varphi}{\triangle}.\partial\varphi$, also

$$\frac{\partial\triangle}{\partial\varphi} = -\frac{k^2\sin 2\varphi}{2\triangle} = -4\overset{1}{c}\sin 2\phi + 8\overset{2}{c}\sin 4\phi - 12\overset{3}{c}\sin 6\phi + - \text{etc.}$$

oder

$$\frac{\sin 2\varphi}{\triangle} = \frac{2}{k^2}(4\overset{1}{c}\sin 2\phi - 8\overset{2}{c}\sin 4\phi + 12\overset{3}{c}\sin 6\phi - 16\overset{4}{c}\sin 8\phi + - \text{etc.})$$

Wird diese Reihe mit der vorigen für $\frac{\sin 2\varphi}{\triangle}$ verglichen, so hat man

$$10.\quad \begin{cases} 4\overset{1}{c} = \frac{k^2}{2}(\overset{0}{a} - \overset{2}{a}), & 12\overset{3}{c} = \frac{k^2}{2}(\overset{2}{a} - \overset{4}{a}), \\ 8\overset{2}{c} = \frac{k^2}{2}(\overset{1}{a} - \overset{3}{a}), & 16\overset{4}{c} = \frac{k^2}{2}(\overset{3}{a} - \overset{5}{a}) \\ & \text{u. s. w.} \end{cases}$$

§. 108.

Entwicklung der Hülfs-Function $\lambda^n(\varphi)$ in eine nach Potenzen von φ fortschreitende Reihe.

Für die folgenden Betrachtungen ist die Kenntnifs der höheren Differenzial-Verhältnisse einer unbestimmten Potenz von $\sin\phi$, deren Exponent übrigens eine positive ganze Zahl sein soll, nöthig. Erforderliche Ausdrücke dieser Art finden sich bereits in G. T. d. P. F. §. 112., nämlich

$$\frac{\partial^{2r}\sin^n\varphi}{\partial\varphi^{2r}} = S(-1)^\alpha[n]^{2\beta}.\overset{\alpha}{\underset{(\beta)}{C}}.\sin^{n-2\beta}\phi \quad \text{und}$$

$$\frac{\partial^{2r+1}\sin^n\varphi}{\partial\varphi^{2r+1}} = S(-1)^\alpha[n]^{2\beta+1}.\overset{\alpha}{\underset{(\beta)}{C}}.\sin^{n-2\beta-1}\phi.\cos\phi,$$

worin $\alpha + \beta = r$ die gemeinschaftliche Bedingungs-Gleichung der beiden veränderlichen positiven ganzen Zahlen α und β ist. Unter $\overset{\alpha}{\underset{(\beta)}{C}}$ wird eine aus den Elementen der Scale

$$(\beta) = [n^2, (n-2)^2, (n-4)^2, \ldots. (n-2\beta)^2],$$

welche $\beta + 1$ Elemente befafst, bei unbedingter Wiederholbarkeit gebildete Combinations-Classe des αten Grades verstanden.

Setzen wir in der ersten Formel $2n$ für n und dann noch $n+r$ für r, so verwandelt sie sich in

$$\frac{\partial^{2n+2r}.\sin^{2n}\varphi}{\partial\varphi^{2n+2r}} = (S(-1)^\alpha[2n]^{2\beta}.\overset{\alpha}{\underset{(\beta)}{C}}.\sin^{2n-2\beta}\phi) \quad \text{cond.}\ (\alpha+\beta = n+r).$$

Setzen wir in diesem Ausdrucke $\phi = 0$, so ist $\sin^{2n-2\beta}\phi = 0$ für $\beta < n$, aber $= 1$ für $\beta = n$, oder $\alpha = r$; daher ist nun

$$\frac{\partial^{2n+2r}.\sin^{2n}\varphi}{\partial\varphi^{2n+2r}} = (-1)^r.(2n)'.\overset{r}{\underset{(n)}{C}}.$$

Die in diesem Ausdrucke geforderte Scale ist

$$(n) = [(2n)^2, (2n-2)^2, \ldots. (2n-2n)^2]$$

und ihr letztes Element also $=0$. Alle Elemente dieser Scale haben den gemeinschaftlichen Factor $2^2=4$; daher kann man diesen Factor absondern, und die einfachere Scale

$$(n) = [1^2, 2^2, 3^2, \ldots. n^2]$$

nehmen, welche die Quadrate der n ersten Zahlen der natürlichen Zahlenreihe begreift, wenn man nur $2^{2r}.\overset{r}{\underset{(n)}{C}}$ für das vorige $\overset{r}{\underset{(n)}{C}}$ setzt und die Combinations-Classe nun auf diese neue Scale bezieht. Setzen wir

$$\sin^{2n}\varphi = \varphi^{2n} - A_1.\varphi^{2n+2} + A_2.\varphi^{2n+4} - A_3.\varphi^{2n+6} + A_4.\varphi^{2n+8} - + \text{etc.},$$

so ist nach *Maclaurin's* Satze

$$(-1)^r.A_r = \frac{\partial^{2n+2r}\sin^{2n}\varphi}{(2n+2r)'.\partial\varphi^{2n+2r}} \text{ (für } \varphi=0\text{), und also}$$

$$A_r = \frac{(2n)'}{(2n+2r)'}.2^{2r}.\overset{r}{\underset{(n)}{C}} = [2n]^{-2\alpha}.4^r.\overset{r}{\underset{(n)}{C}}.$$

Die Substitution dieses Werthes giebt die unendliche Reihe

$$\sin^{2n}\varphi = S(-1)^\alpha[2n]^{-2\alpha}.4^\alpha.\overset{\alpha}{\underset{(n)}{C}}.\varphi^{2n+2\alpha}\ *).$$

Die Reihen für $\sin^{2n}\varphi$ und $\sin^{2n+1}\varphi$ lassen sich leicht umkehren, wodurch man Reihen für die Potenzen von φ erhält, welche nach Potenzen von $\sin\varphi$ fortschreiten. Nicht auf diesem Wege sind jene Reihen hergeleitet worden vom Hrn. Prof. *Scherk* in *Crelle's* Journal der Mathematik Band XI., Seite 101.

Multiplicirt man die vorhin gefundene Reihe mit $\partial\varphi$, und integrirt, so entsteht

$$\int_0 \sin^{2n}\varphi.\partial\varphi = S(-1)^\alpha[2n]^{-(2\alpha+1)}.4^\alpha.\overset{\alpha}{\underset{(n)}{C}}.\varphi^{2n+2\alpha+1}.$$

Da aber nach §. 99.

$$\lambda^n(\varphi) = \frac{n'}{(-1)^n.[-\tfrac{1}{2}]^n}.\int_0 \sin^{2n}\varphi.\partial\varphi$$

---

*) Für die ungerade Potenz des Sinus erhält man mit Bezugnahme auf die Scale $(n) = [1^2, 3^2, 5^2, 7^2, \ldots. (2n+1)^2]$ die Reihe

$$\sin^{2n+1}\varphi = S(-1)^\alpha[2n+1]^{2\alpha}.\overset{\alpha}{\underset{(n)}{C}}.\varphi^{2n+2\alpha+1},$$

und zwar auf ähnliche Weise.

ist, so erhalten wir, wenn wir beachten daſs $[2n\overset{-(2\alpha+1)}{]} = \frac{(2n)'}{(2n+2\alpha+1)'}$ und $(2n)' = (-1)^n . n' . 2^{2n} . [-\tfrac{1}{2}\overset{n}{]}$ ist, endlich die Formel

$$\lambda^n(\phi) = S(-1)^\alpha . n' . n' . 2^{2n+2\alpha} . \underset{(n)}{\overset{\alpha}{C}} . \frac{\varphi^{2n+2\alpha+1}}{(2n+2\alpha+1)'} .$$

Zusatz. Für die Combinationsklasse $\underset{(n)}{\overset{m}{C}}$ läſst sich nach G. T. d. P. F. §. 113 — 115. auch leicht ein analytischer Ausdruck herleiten. Setzt man daselbst nur $m+n$ für m; ferner $a=0$, $\overset{1}{a}=1^2$, $\overset{2}{a}=2^2$, $\overset{3}{a}=3^2$, ... $\overset{\alpha}{a}=\alpha^2$, ... $\overset{n}{a}=n^2$, so ist

$$\overset{\alpha}{\psi}_n = (\alpha^2-0^2)(\alpha^2-1^2)(\alpha^2-2^2)\ldots.(\alpha^2-(\alpha-1)^2).(\alpha^2-(\alpha+1)^2)(\alpha^2-(\alpha+2)^2)\ldots$$
$$\ldots(\alpha^2-n^2) \text{ oder}$$

$$\overset{\alpha}{\psi}_n = (-1)^{n-\alpha}.(\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots.1)(\alpha(\alpha+1)\ldots.(2\alpha-1))(1.2.3\ldots.(n-\alpha))$$
$$\times((2\alpha+1)(2\alpha+2)\ldots.(n+\alpha)) \text{ oder}$$

$$\overset{\alpha}{\psi}_n = (-1)^{n-\alpha}\frac{(n-\alpha)'.(n+\alpha)'}{2} \text{ und also } \underset{(n)}{\overset{m}{C}} = 2S(-1)^{n-\alpha}.\frac{\alpha^{2m+2n}}{(n-\alpha)'(n+\alpha)'}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung noch mit $(2n)'$, um die Brüche unter gleiche Benennung zu bringen, so erhält man

$$\underset{(n)}{\overset{m}{C}} = \frac{2}{(2n)'}(S(-1)^\beta.[2n\overset{\beta}{\underset{\beta'}{|}}.\alpha^{2m+2n}) \quad \text{cond. } (\alpha+\beta=n)$$

zum gesuchten analytischen Ausdrucke des Werthes von $\underset{(n)}{\overset{m}{C}}$. Alle besonderen Werthe von $\underset{(n)}{\overset{m}{C}}$, für welche $m+n$ nicht >10 ist, enthält eine in G. T. d. P. F. §. 71. befindliche Tabelle, woraus ihre Werthe also entnommen werden können. Daselbst ist auch das Rechnungs-Verfahren angegeben, wodurch jene Tabelle leicht beliebig erweitert werden kann.

Zu derselben Formel kann man auch auf folgende Art gelangen: Substituirt man in dem Ausdrucke $\lambda^n(\phi) = \phi + S(-1)^\alpha[n\overset{-\alpha}{]}[n\overset{\alpha}{]}.\frac{\sin(2\alpha\varphi)}{\alpha}$ (für $\alpha>0$) statt $\sin(2\alpha\phi)$ die bekannte Reihe $S(-1)^\beta\frac{(2\alpha)^{2\beta+1}.\varphi^{2\beta+1}}{(2\beta+1)'}$, so erhält man

$$\lambda^n(\phi) = \phi + 2.S(-1)^{\alpha+\beta}.[n\overset{\alpha}{]}[n\overset{-\alpha}{]}.2^{2\beta}.\alpha^{2\beta}.\frac{\varphi^{2\beta+1}}{(2\beta+1)'}.$$

Die Potenzen von ϕ, welche niedriger im Grade sind, als ϕ^{2n+1}, haben in diesem Ausdrucke jede einen Coefficienten, welcher $=0$ ist; daher darf

man sogleich $n+\beta$ für β setzen, wodurch man erhält:

$$\lambda^n(\phi) = 2 \,.\, S(-1)^{n+\alpha+\beta} \,.\, [n]^{\alpha} \, [n]^{-\alpha} \,.\, 2^{2n+2\beta} \,.\, \alpha^{2n+2\beta} \,.\, \frac{\varphi^{2n+2\beta+1}}{(2n+2\beta+1)'} .$$

Wird diese Reihe für $\lambda^n(\phi)$ mit der früheren identificirt, so erhält man denselben Ausdruck für $\overset{m}{\underset{(n)}{C}}$, wie vorher.

§. 109.

Reihen für $\arg \operatorname{am}(\varphi)$ und $\arg \operatorname{am}(\frac{1}{2}\pi - \varphi)$, welche nach Potenzen von φ fortschreiten.

Aus der im §. 108. für $\lambda^n(\phi)$ gefundenen Reihe folgt sogleich noch

$$[-\tfrac{1}{2}]^{n}_{\overline{n'}} \,.\, [-\tfrac{1}{2}]^{n}_{\overline{n'}} \,.\, \lambda^n(\phi) = S(-1)^{\alpha} ([1, -2]^{n})^2 \,.\, 2^{2\alpha} \,.\, \overset{\alpha}{\underset{(n)}{C}} \,.\, \frac{\varphi^{2n+2\alpha+1}}{(2n+2\alpha+1)'} .$$

Wird diese Reihe mit k^{2n} multiplicirt, und dann selbst als allgemeines Glied einer neuen Reihe, nämlich der für $\arg \operatorname{am}(\phi)$ dem §. 99. gemäſs angesehen, und zu diesem Ende β für n gesetzt, so erhält man

$$\arg \operatorname{am}(\phi) = \left[S(-1)^{\alpha} ([1, -2]^{\beta})^2 \,.\, 4^{\alpha} \,.\, \overset{\alpha}{\underset{(\beta)}{C}} \,.\, k^{2\beta} \,.\, \frac{\varphi^{2\gamma+1}}{(2\gamma+1)'} \right] \text{ cond. } (\alpha+\beta=\gamma).$$

Man kann diese Reihe einfacher vorstellen unter

$$\arg \operatorname{am}(\phi) = \phi + \overset{1}{a} \,.\, \frac{\varphi^3}{3'} + \overset{2}{a} \,.\, \frac{\varphi^5}{5'} + \overset{3}{a} \,.\, \frac{\varphi^7}{7'} + \overset{4}{a} \,.\, \frac{\varphi^9}{9'} + \text{etc.},$$

und hat dann zur independenten Bestimmung der Coefficienten in dieser Reihe die allgemeine Formel

$$2. \quad \overset{r}{a} = (S(-1)^{\alpha} [1, -2]^{\beta} \, [1, -2]^{\beta} \,.\, k^{2\beta} \,.\, 2^{2\alpha} \,.\, \overset{\alpha}{\underset{(\beta)}{C}}) \quad \text{cond. } (\alpha+\beta=r)$$

oder auch, in gewöhnlicher Darstellung:

$$\overset{r}{a} = [1, -2]^{r\,2} \,.\, k^{2r} - [1, -2]^{r-1\,2} \,.\, 4 \,.\, \overset{1}{\underset{(r-1)}{C}} \,.\, k^{2r-2} + [1, -2]^{r-2\,2} \,.\, 4^2 \,.\, \overset{2}{\underset{(r-2)}{C}} \,.\, k^{2r-4} \ldots$$
$$\ldots (-1)^{r-1} \,.\, 4^{r-1} \,.\, \overset{r-1}{\underset{(1)}{C}} \,.\, k^2.$$

Diese allgemeine Formel giebt die folgende besonderen Ausdrücke:

$$3. \quad \begin{cases} \overset{1}{a} = k^2, \\ \overset{2}{a} = k^2(9k^2 - 4), \\ \overset{3}{a} = k^2(225k^4 - 180k^2 + 16), \\ \overset{4}{a} = k^2(11025k^6 - 12600k^4 + 3024k^2 - 64), \\ \overset{5}{a} = k^2(893025k^8 - 1323000k^6 + 529200k^4 - 48960k^2 + 256) \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

welche zwar im Fortgange immer mehr zusammengesetzt werden, aber

wegen der Abwechselung der Vorzeichen dennoch nicht sehr grofse Werthe haben.

Für $k=0$ ist $\overset{1}{a}=\overset{2}{a}=\overset{3}{a}=\overset{4}{a}=$ etc. $=0$;

für $k=\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ ist $\overset{1}{a}=\tfrac{1}{2}$, $\overset{2}{a}=\tfrac{1}{4}$, $\overset{3}{a}=-8\tfrac{7}{8}$, $\overset{4}{a}=-99\tfrac{7}{16}$ etc.;

für $k=1$ ist $\overset{1}{a}=1$, $\overset{2}{a}=5$, $\overset{3}{a}=61$, $\overset{4}{a}=1385$ etc.

In dem letzten Falle für $k=1$ erhält man also dieselben Coefficienten, welche in G. T. d. P. F. §. 41. berechnet wurden; wie auch sein mufs, da nun $\arg\operatorname{am}(\phi)=\int_0 \frac{\partial\varphi}{\sqrt{(1-\sin^2\varphi)}}=\int_0 \frac{\partial\partial}{\cos\varphi}=\mathfrak{L}\varphi$ wird.

Für die recurrirende Berechnung der Coefficienten $\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a}, \overset{4}{a}$ etc. findet man leicht die Formel

$$r.\overset{r}{a}=k^2.\Big[(2r-1)[2r]^{2}_{2'}.\overset{r-1}{a}-(2r-2)[2r]^{4}_{4'}.2^2.\overset{r-2}{a}+(2r-3)[2r]^{6}_{6'}.2^4.\overset{r-3}{a}\ldots(-1)^{r-1}r.2^{2r-2}\Big],$$

deren Herleitung wir übergehen, weil sie selbst nicht sehr bequem ist.

Setzen wir in der gefundenen Reihe $k'(K-u)$ für $\arg\operatorname{am}(\varphi)$ und $\frac{ik}{k'}$ statt des Moduls k, so verwandelt sich ϕ in $\tfrac{1}{2}\pi-\operatorname{am}u$. Setzen wir nun $\tfrac{1}{2}\pi-\operatorname{am}u=\phi$, so ist $\operatorname{am}u=\tfrac{1}{2}\pi-\phi$. Verwandeln wir ferner $\overset{r}{a}$ in $(-1)^r.\frac{\overset{r}{a}}{k'^{2r}}$, so erhalten wir

$$k'(K-\arg\operatorname{am}(\tfrac{1}{2}\pi-\phi)) = \phi-\frac{\overset{1}{a}}{k'^2}.\frac{\varphi^3}{3'}+\frac{\overset{2}{a}}{k'^4}.\frac{\varphi^5}{5'}-\text{etc. oder}$$

$$4.\quad \arg\operatorname{am}(\tfrac{1}{2}\pi-\phi) = K-\frac{\varphi}{k'}+\frac{\overset{1}{a}}{3'}.\left(\frac{\varphi}{k'}\right)^3-\frac{\overset{2}{a}}{5'}.\left(\frac{\varphi}{k'}\right)^5+\frac{\overset{3}{a}}{7'}.\left(\frac{\varphi}{k'}\right)^7 -\frac{\overset{4}{a}}{9'}.\left(\frac{\varphi}{k'}\right)^9+-\text{etc.},$$

und für die in dieser Reihe vorkommenden Coefficienten haben wir die Ausdrücke

$$5.\quad\begin{cases}\overset{1}{a}=k^2,\\ \overset{2}{a}=k^2(9k^2+4k'^2),\\ \overset{3}{a}=k^2(225k^4+180k^2k'^2+16k'^4),\\ \overset{4}{a}=k^2(11025k^6+1260k^4k'^2+3024k^2k'^4+64k'^6),\\ \overset{5}{a}=k^2(893025k^8+1323000k^6k'^2+529200k^4k'^4+48960k^2k'^6+256k'^8)\\ \text{u. s. w.}\end{cases}$$

Diese Reihe convergirt indessen nur dann ziemlich schnell, wenn der Modul k sehr gering und $\frac{\varphi}{k'}$ ein ächter Bruch ist.

§. 110.

Reihen für el$u$, welche nach Potenzen von φ und $\frac{1}{2}\pi-\varphi$ fortschreiten, wenn $\varphi = \operatorname{am} u$ gesetzt wird.

Gehen wir nun von der Formel $\operatorname{el} u = S[\tfrac{1}{2}]^{\overset{a}{\underset{a'}{}}}[-\tfrac{1}{2}]^{\overset{a}{\underset{a'}{}}}.\lambda^a(\varphi).k^{2a}$ des §. 99. aus, so finden wir, eben so wie vorhin, die Reihe

$$1. \quad \operatorname{el} u = \varphi - \overset{1}{a}.\frac{\varphi^3}{3'} + \overset{2}{a}.\frac{\varphi^5}{5'} - \overset{3}{a}.\frac{\varphi^7}{7'} + \overset{4}{a}.\frac{\varphi^9}{9'} - + \text{etc.},$$

und die in ihr vorkommenden Coefficienten sind ausgedrückt durch die Formel

$$2. \quad \overset{r}{a} = (S(-1)^\beta[-1,-1]^{\beta}[1,-2]^{\beta}.2^{2\alpha}.\overset{\alpha}{\underset{(\beta)}{C}}.k^{2\beta}) \quad \text{cond.}(\alpha+\beta=r),$$

woraus man die folgenden besonderen Ausdrücke erhält:

$$3. \quad \begin{cases} \overset{1}{a} = k^2, \\ \overset{2}{a} = k^2(-3k^2+4), \\ \overset{3}{a} = k^2(45k^4-60k^2+16), \\ \overset{4}{a} = k^2(-1575k^6+3520k^4-1008k^2+64), \\ \overset{5}{a} = k^2(99225k^8-189000k^6+105840k^4-16320k^2+256) \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Auch diese Ausdrücke werden im Fortgange sehr zusammengesetzt; aber ihre Werthe sind für denselben Modul k immer beträchtlich kleiner, als die Werthe der ähnlichen Ausdrücke (3.) im §. 109. Für $k=0$ ist jeder $=0$, und für $u=1$ ist jeder $=1$. So ist z. B.

$$\overset{6}{a} = 99225-189000+105840-16320+256 = 205321-205320 = +1;$$

dieser Umstand erklärt sich daraus, daſs für $k=1$,

$$\operatorname{el} u = \int_0 \partial\varphi.\sqrt{(1-\sin^2\varphi)} = \sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3'} + \frac{\varphi^5}{5'} - \frac{\varphi^7}{7'} + \text{etc. ist.}$$

Für $k=\sqrt{\frac{1}{2}}$ erhält man

$$\overset{1}{a} = \frac{1}{2}, \quad \overset{2}{a} = \frac{5}{4}, \quad \overset{3}{a} = \frac{-11}{8}, \quad \overset{4}{a} = \frac{1945}{16}, \quad \overset{5}{a} = \frac{18221}{32}, \text{ u. s. w.}$$

Die in der Reihe (1.) vorkommenden Permutations-Zahlen geben ihr einen hohen Grad der Convergenz, zumal wenn $\varphi < 1$ ist.

Setzen wir nun $k'(K-u)$ für u und $\frac{ik}{k'}$ für k, so verwandelt sich $\mathrm{el}\,u$ in $\frac{E-\mathrm{el}\,u}{k'}$ und $\varphi=\mathrm{am}\,u$ in $\frac{1}{2}\pi-\mathrm{am}\,u=\varphi'$, wenn $\varphi+\varphi'=\frac{1}{2}\pi$ gesetzt wird. Aendern wir gleichzeitig $\overset{r}{a}$ in $-\frac{\overset{r}{a}}{k'^{2r}}$, so erhalten wir die Reihe

$$\frac{E-\mathrm{el}\,u}{k'}=\varphi'+\frac{\overset{1}{a}}{k'^2}\cdot\frac{\varphi'^3}{3'}-\frac{\overset{2}{a}}{k'^4}\cdot\frac{\varphi'^5}{5'}+-\text{etc.},$$

oder auch

$$4.\quad \mathrm{el}\,u=E-k'^2\Big[\frac{\varphi'}{k'}+\frac{\overset{1}{a}}{3'}\cdot\Big(\frac{\varphi'}{k'}\Big)^3-\frac{\overset{2}{a}}{5'}\cdot\Big(\frac{\varphi'}{k'}\Big)^5+\frac{\overset{3}{a}}{7'}\cdot\Big(\frac{\varphi'}{k'}\Big)^7$$
$$-\frac{\overset{4}{a}}{9'}\cdot\Big(\frac{\varphi'}{k'}\Big)^9+\frac{\overset{5}{a}}{11'}\cdot\Big(\frac{\varphi'}{k'}\Big)^{11}-+\text{etc.}\Big],$$

und die in dieser Reihe vorkommenden Coefficienten sind nun ausgedrückt durch die Formeln

$$5.\quad\begin{cases}\overset{1}{a}=k^2,\\ \overset{2}{a}=k^2(3k^2+4k'^2),\\ \overset{3}{a}=k^2(45k^4+60k^2k'^2+16k'^4),\\ \overset{4}{a}=k^2(1575k^6+3520k^4k'^2+1008k^2k'^4+64k'^6),\\ \overset{5}{a}=k^2(99225k^8+189000k^6k'^2+105840k^4k'^4+16320k^2k'^6+256k'^8)\\ \quad\text{u. s. w.}\end{cases}$$

Die Reihe (4.) convergirt nur dann, wenn $k<\sqrt{\frac{1}{2}}$ und $\frac{\varphi'}{k'}<1$ ist, ziemlich rasch.

§. 111.

Reihe für u, welche völlig nach Potenzen von $\mathrm{sn}\,u$ fortschreitet.

Setzen wir $\mathrm{sn}\,u=t$, so ist $\partial u=\frac{\partial t}{\sqrt{(1-t^2)}\sqrt{(1-k^2t^2)}}$. Da nun aber

$$\frac{1}{\sqrt{(1-t^2)}}=(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}=S(-1)^\alpha\,[-\tfrac{1}{2}]^{\alpha}_{\alpha'}\,t^{2\alpha}\ \text{und}$$

$$\frac{1}{\sqrt{(1-k^2t^2)}}=S(-1)^\beta k^{2\beta}t^{2\beta}.[-\tfrac{1}{2}]^{\beta}_{\beta'}$$

ist, so hat das Product beider Reihen die Form

$$S\frac{\overset{\gamma}{a}}{2^\gamma.\gamma'}.t^{2\gamma}=1+\frac{\overset{1}{a}}{2}.t^2+\frac{\overset{2}{a}.t^4}{2.4}+\frac{\overset{3}{a}.t^6}{2.4.6}+\text{etc.},$$

und man findet

$$\overset{r}{a} = (-1)^r.2^r.r'.(S\frac{[-\tfrac{1}{2}]^{\alpha}}{\alpha'}\frac{[-\tfrac{1}{2}]^{\beta}}{\beta'}k^{2\beta}) \quad \text{cond.}\ (\alpha+\beta=r).$$

Da aber $\frac{[-\frac{1}{2}]^{\alpha}}{\alpha} = (-1)^{\alpha}.\frac{[1,-2]^{\alpha}}{2^{\alpha}.\alpha'}$ und $\frac{[-\frac{1}{2}]^{\beta}}{\beta'} = (-1)^{\beta}.\frac{[1,-2]^{\beta}}{2^{\beta}.\beta'}$ ist, so erhalten wir den einfacheren Ausdruck

$$1.\quad \overset{r}{a} = (S\frac{[r]^{\alpha}}{\alpha'}[1,-2]^{\alpha}[1,-2]^{\beta}.k^{2\beta}) \quad \text{cond.}\ (\alpha+\beta=r).$$

Wird nun die Reihe für $\frac{1}{\sqrt{(1-t^2)}\sqrt{(1-k^2t^2)}}$ noch mit ∂u multiplicirt und dann integrirt, so erhält man

$$2.\quad \arg\operatorname{sn}(t) = S\frac{\overset{\alpha}{a}}{2^{\alpha}.\alpha'}.\frac{t^{2\alpha+1}}{(2\alpha+1)'} = t + \frac{\overset{1}{a}}{2}.\frac{t^3}{3} + \frac{\overset{2}{a}}{2.4}.\frac{t^5}{5} + \frac{\overset{3}{a}}{2.4.6}.\frac{t^7}{7} + \text{etc.},$$

und die in dieser Reihe vorkommenden ersten Coefficienten sind

$$3.\quad \begin{cases} \overset{1}{a} = 1+k^2, \\ \overset{2}{a} = 3+2k^2+3k^4, \\ \overset{3}{a} = 15+9k^2+9k^4+15k^6, \\ \overset{4}{a} = 105+60k^2+54k^4+60k^6+105k^8, \\ \overset{5}{a} = 945+525k^2+450k^4+450k^6+525k^8+945k^{10} \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Die Reihe (2.) convergirt immer; wird aber t oder $\operatorname{sn} u > \operatorname{snc} u$, so wird man $K-u$ für u und also $\frac{\sqrt{(1-t^2)}}{\sqrt{(1-k^2t^2)}}$ für t setzen.

Anmerkung. Man findet leicht, dafs für $k=1$ $\overset{r}{a}=2.4.6\ldots.(2r)$ ist; daher ist immer $\frac{a}{2^{\alpha}\alpha'}<1$, wenn $k<1$ ist; woraus erhellet, dafs die Reihe immer convergirt.

§. 112.

Andere Darstellung und Berechnung der Coefficienten in der nach Potenzen von $\operatorname{sn} u$ fortschreitenden Reihe für u.

Da $\frac{1}{\sqrt{(1-t^2)}\sqrt{(1-k^2t^2)}} = (1-(1+k^2)t^2+k^2t^4)^{-\frac{1}{2}}$ ist, so finden wir leicht eine Formel für die recurrirende Berechnung der Coefficienten in der Reihe des §. 111., indem wir nur die in G. T. d. P. F. §. 105. entwickelte Recursions-Formel auf die Entwicklung der Potenz des vorste-

henden Trinoms anwenden. Wir haben nur $\overset{0}{a} = 1$, $\overset{1}{a} = -(1+k^2)$, $\overset{2}{a} = k^2$, $x = t^2$, $\overset{r}{A} = \frac{\overset{r}{a}}{2^r . r'}$, $\overset{r-1}{A} = \frac{\overset{r-1}{a}}{2^{r-1}.(r-1)'}$, $\overset{r-2}{A} = \frac{\overset{r-2}{a}}{2^{r-2}.(r-2)'}$ zu setzen. Führen wir aber diese Substitutionen in der Formel

$$r.\overset{0}{a}\overset{r}{A} = (n-r+1)\overset{1}{a}\overset{r-1}{A} + (2n-r+2)\overset{2}{a}\overset{r-2}{A} + (3n-r+3)\overset{3}{a}\overset{r-3}{A} + \text{etc.}$$

aus, so erhalten wir die einfache Formel

$$4. \quad \overset{r}{a} = (2r-1)(1+k^2).\overset{r-1}{a} - 4(r-1)^2.k^2.\overset{r-2}{a},$$

in deren Anwendung die successiven Coefficienten $\overset{2}{a}, \overset{3}{a}, \overset{4}{a}, \overset{5}{a}$ etc. auch sehr bequem recurrirend berechnet werden können.

Die Entwicklung kann noch auf eine andere Art gemacht werden, wodurch man noch einfachere Ausdrücke für die Coefficienten erhält. Da $(1-t^2)(1-k^2t^2) = 1-(1+k^2)t^2 + k^2t^4$ ist, so können wir dieses Trinom einstweilen als ein Binom ansehen, und $= 1 - pt^2$ setzen. Dann ist $p = 1 + k^2 - k^2t^2$. Da nun $(1-pt^2)^{-\frac{1}{2}} = S(-1)^{\alpha}\frac{[-\frac{1}{2}]^{\alpha}}{\alpha'}p^{\alpha}t^{2\alpha}$ ist, so hat man in dieser Reihe noch für p den Werth zu substituiren. Es ist aber $p^n = S(-1)^{\beta}\frac{[n]^{\beta}}{\beta'}(1+k^2)^{n-\beta}.k^{2\beta}t^{2\beta}$ und also

$$\frac{1}{\sqrt{(1-t^2)}\sqrt{(1-k^2t^2)}} = \left(S(-1)^{\gamma}\frac{[-\frac{1}{2}]^{\alpha}}{\alpha'}\frac{[\alpha]^{\beta}}{\beta'}(1+k^2)^{\alpha-\beta}k^{2\beta}.t^{2\gamma}\right) \text{ cond. } (\alpha+\beta=\gamma).$$

Wird dieses Product mit dem vorigen verglichen, so ist

$$\frac{\overset{r}{a}}{2^r.r'} = \left(S(-1)^{\alpha+\beta}\frac{[-\frac{1}{2}]^{\alpha}}{\alpha'}\frac{[\alpha]^{\beta}}{\beta'}(1+k^2)^{\alpha-\beta}.k^{2\beta}\right) \quad \text{cond. } (\alpha+\beta=r).$$

Dieser Ausdruck gestattet noch eine Reduction. Da nämlich $[\alpha]^{\beta} = 0$ ist für $\beta > \alpha$, so kann sogleich $(\alpha+\beta)$ für α gesetzt werden, wodurch man erhält:

$$\frac{\overset{r}{a}}{2^r.r'} = \left(S(-1)^{\alpha}\frac{[-\frac{1}{2}]^{\alpha+\beta}}{(\alpha+\beta)'}\frac{[\alpha+\beta]^{\beta}}{\beta'}(1+k^2)^{\alpha}.k^{2\beta}\right) \quad \text{cond. } (\alpha+2\beta=r).$$

Setzt man nun $v = \frac{1+k^2}{2k}$, so ist rückwärts $1+k^2 = 2vk$ und $(1+k^2)^{\alpha}.k^{2\beta} = (2v)^{\alpha}.k^r$; ferner ist $\frac{[\alpha+\beta]^{\beta}}{\beta'} = \frac{(\alpha+\beta)'}{\alpha'\beta'}$ und da $[-\frac{1}{2}]^{\alpha+\beta} = [-\frac{1}{2}]^{r-\beta} = (-1)^{r-\beta}\frac{[1,-2]^{r-\beta}}{2^{r-\beta}}$ ist, so ist

$$\overset{r}{a} = 2^r.r'k^r\left(S(-1)^{\beta}\frac{[1,-2]^{r-\beta}}{2^{r-\beta}}.\frac{1}{\alpha'\beta'}.(2v)^{\alpha}\right) \quad \text{cond. } (\alpha+2\beta=r), \text{ oder}$$

$$\overset{r}{a} = (2k)^r.\left(S(-1)^{\beta}[1,-2]^{r-\beta}.\frac{[r]^{2\beta}}{2^{\beta}.\beta'}.v^{\alpha}\right).$$

Setzt man nun noch $a = (2k)^r.\overset{r}{c}$, so erhalten wir

$$\arg\operatorname{sn}(t) = S\frac{\overset{\alpha}{c}}{\alpha'}.k^\alpha.\frac{t^{2\alpha+1}}{2\alpha+1},$$

oder auch

$$5.\quad \arg\operatorname{sn}(t) = t + \overset{1}{c}.\frac{k}{1}.\frac{t^3}{3} + \frac{\overset{2}{c}k^2}{1.2}.\frac{t^5}{5} + \frac{\overset{3}{c}k^3}{1.2.3}.\frac{t^7}{7} + \frac{\overset{4}{c}k^4}{1.2.3.4}.\frac{t^9}{9} + \text{etc.},$$

und zur Bestimmung der Coefficienten in dieser Reihe dient nun die Formel

$$6.\quad \overset{r}{c} = (S(-1)^\beta.[1,-2]^{r-\beta}.\underset{2^\beta.\beta'}{[r]^{2\beta}}.v^\alpha) \quad \text{cond. } (\alpha+2\beta=r).$$

Diese Formel hat nicht so viele einzelne Glieder, als die Formel (1.) für $\overset{r}{a}$ in §. 111. Man findet danach die folgenden Ausdrücke:

$$7.\quad \left\{\begin{array}{l}
\overset{1}{c} = v, \\
\overset{2}{c} = 3v^2-1, \\
\overset{3}{c} = 15v^3-9v, \\
\overset{4}{c} = 105v^4-90v^2+9, \\
\overset{5}{c} = 945v^5-1050v^3+225v, \\
\overset{6}{c} = 10395v^6-14175v^4+4725v^2-225 \\
\text{u. s. w.}
\end{array}\right.$$

Setzt man auch in der Recursions-Formel (4.) $1+k^2=2vk$, so wird sie zunächst $\overset{r}{a} = 2vk(2r-1).\overset{r-1}{a} - 4(r-1)^2k^2.\overset{r-2}{a}$. Setzt man ferner auch hierin $\overset{r}{a} = (2k)^r.\overset{r}{c}$, $\overset{r-1}{a} = (2k)^{r-1}.\overset{r-1}{c}$ und $\overset{r-2}{a} = (2k)^{r-2}.\overset{r-2}{c}$, so verwandelt sie sich in die einfachere:

$$8.\quad \overset{r}{c} = (2r-1).v.\overset{r-1}{c} - (r-1)^2.\overset{r-2}{c}.$$

Zusatz. Differenziirt man den Ausdruck $(v^2-1)^r = S(-1)^\beta\,\underset{\beta'}{[r]^\beta}\,v^{2r-2\beta}$ nach einander r mal, so erhält man

$$\frac{\partial^r(v^2-1)^r}{\partial v^r} = S(-1)^\beta[2r-2\beta]^r\,\underset{\beta'}{[r]^\beta}\,v^{r-2\beta}.$$

Da aber $[2r-2\beta]^r = \frac{(2r-2\beta)'}{(r-2\beta)'}$ und $(2r-2\beta)' = [1,-2]^{r-\beta}.2^{r-\beta}.(r-\beta)'$; ferner $(r-\beta)'[r]^\beta = r'$ ist, so ist

$$[2r-2\beta]^r.\underset{\beta'}{[r]^\beta} = [1,-2]^{r-\beta}.\frac{r'}{(r-2\beta)'}.\frac{2^{r-\beta}}{\beta'} = [1,-2]^{r-\beta}.\underset{2^\beta.\beta}{[r]^{2\beta}}.2^r,$$

und also

$$\frac{\partial^r (v^2-1)}{2^r.\partial v^r} = \left(S(-1)^\beta [1,-2]^{r-\beta}.\frac{[r]^{2\beta}}{2^\beta.\beta}.v^\alpha\right) \quad \text{cond. } (\alpha+2\beta=r),$$

oder

$$9. \quad \overset{r}{c} = \frac{\partial^r (v^2-1)^r}{2^r.\partial v^r}.$$

Da $v = \frac{k+\frac{1}{k}}{2}$ ist, so wird v nicht geändert, wenn man den Modul k mit $\frac{1}{k}$ vertauscht. Setzt man $k = \operatorname{tang}(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\nu)$, also $k^{-1} = \operatorname{tang}(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\nu)$, so ist $v = \frac{1}{\cos\nu}$, und also $v > 1$. Setzt man $\nu = \frac{1}{2}\pi$, also $k = 0$, so ist $v = \frac{1}{0}$; und setzt man $\nu = 0$, also $k = 1$, so ist $v = 1$; daher nimmt v beim Wachsen des Moduls beständig ab, von $\frac{1}{0}$ an bis auf 1.

§. 113.

Reihe für sn u, welche nach Potenzen von u fortschreitet.

Aus den Reihen u, welche nach Potenzen von $t = \operatorname{sn} u$ fortschreiten, schliefst man, dafs umgekehrt die Reihe für sn u die folgende Form haben werde:

$$\operatorname{sn} u = u + b.u^3 + c.u^5 + d.u^7 + \text{etc.},$$

und in Anwendung des Reversions-Problems könnte man auch die Coefficienten in dieser Reihe aus den Coefficienten der Reihe im §. 111. oder §. 112. herleiten. Es läfst sich indessen ein ziemlich bequemes recurrirendes Verfahren ermitteln, wodurch man die erste und dritte Potenz der Reihe für sn u zugleich erhält. Nach §. 62. ist

$$\frac{\partial^2 \operatorname{sn} u}{\partial u^2} = -(1+k^2)\operatorname{sn} u + 2k^2.\operatorname{sn}^3 u.$$

Diese Gleichung wird am einfachsten, wenn man $x = u\sqrt{(2k)}$ und $z = \sqrt{(2k)}.\operatorname{sn} u$ setzt. Nun ist $\partial u = \frac{\partial x}{\sqrt{(2k)}}$ und $\partial^2 \operatorname{sn} u = \frac{\partial^2 z}{\sqrt{(2k)}}$, also

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\sqrt{(2k)} = -(1+k^2).\frac{z}{\sqrt{(2k)}} + 2k^2.\frac{z^3}{\sqrt{(2k)^3}},$$

folglich

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -v.z + \frac{z^3}{2},$$

wenn man wieder $v = \frac{1+k^2}{2k}$ setzt. Wenn man in der obigen Reihe ebenfalls $\frac{x}{\sqrt{(2k)}}$ für u setzt, dann mit $\sqrt{(2k)}$ multiplicirt, und z für

$\sqrt{(2k)}.\mathrm{sn}\,u$ setzt, so wird das Anfangsglied der Reihe für z gerade $=x$, so dafs wir setzen können:

$$z = x - \overset{1}{a}.\frac{x^3}{3'} + \overset{2}{a}.\frac{x^5}{5'} - \overset{3}{a}.\frac{x^7}{7'} + \overset{4}{a}.\frac{x^9}{9'} - \overset{5}{a}.\frac{x^{11}}{11'} + - \text{etc. und}$$

$$z^2 = x^3 - \overset{1}{c}.\frac{x^5}{3'} + \overset{2}{c}.\frac{x^7}{5'} - \overset{3}{c}.\frac{x^9}{7'} + \overset{4}{c}.\frac{x^{11}}{9'} - \overset{5}{c}.\frac{x^{13}}{13'} + - \text{etc.}$$

Werden diese Reihen in der vorigen Differenzial-Gleichung substituirt, so findet man für ihre Coefficienten die einfache Relation

$$1.\quad \overset{r+1}{a} = r(2r+1).\overset{r-1}{c} + v.\overset{r}{a}.$$

Sind nun in der Reihe für z bereits die Coefficienten $\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \ldots \overset{r}{a}$ berechnet, so läfst sich in der Reihe für z^3 der Coefficient $\overset{r+1}{c}$ berechnen. Hieraus findet sich, der Formel (1.) gemäfs, der nächste Coefficient $\overset{r+1}{a}$, und es läfst sich also die Rechnung immer weiter fortsetzen. Dem Polynomial-Theoreme gemäfs findet man aber

$$2.\quad \overset{r}{c} = \frac{4-r}{r}.[2r+1]_{3'}.\overset{2}{a}\,\overset{1\;r-1}{a\,c} + \frac{8-r}{r}.[2r+1]_{5'}.\overset{4}{a}\,\overset{2\;r-2}{a\,c} + \frac{12-r}{r}.[2r+1]_{7'}.\overset{6}{a}\,\overset{3\;r-3}{a\,c}\ldots + 3.\overset{r}{a}.$$

Durch die combinirte Anwendung der Formeln (1.) und (2.) erhält man die gesuchten Coefficienten, oder die Reihe

$$3.\quad \mathrm{sn}\,u = u - \frac{v(2k)}{3'}u^3 + \frac{v^2+3}{5'}(2k)^2.u^5 - \frac{v^3+33v}{7'}(2k)^3.u^7$$
$$+ \frac{v^4+306v^2+189}{9'}(2k)^4.u^9$$
$$- \frac{v^5+2766v^3+8289v}{11'}(2k)^5.u^{11} + - \text{etc.}$$

Zusatz. Hebt man aus dieser Reihe die Glieder $u - \frac{(2vk).u^3}{3'} + \frac{(2vk)^2.u^5}{5'} - \frac{(2vk)^3.u^7}{7'} + - \text{etc.}$ hervor, so bilden sie für sich eine Reihe, welche summirt werden kann. Multiplicirt man dieselbe nämlich mit $\sqrt{(1+k^2)} = \sqrt{(2vk)}$, so ist das Product gerade $= \sin(u\sqrt{(1+k^2)})$ und also jene Reihe $= \frac{\sin(u\sqrt{(1+k^2)})}{\sqrt{(1+k^2)}}$. Werden die übrigen Glieder hinzugefügt, so ist

$$\mathrm{sn}\,u = \frac{\sin(u\sqrt{(1+k^2)})}{\sqrt{(1+k^2)}} + \frac{3}{5'}(2k)^2.u^5 - \frac{33v}{7'}(2k)^3.u^7$$
$$+ \frac{306v^2+189}{9'}(2k)^4.u^9 - \frac{2766v^3+8289v}{11'}(2k)^6.u^{11} + - \text{etc.},$$

und diese Reihe convergirt noch rascher als die vorige.

§. 114.

Reihen für $\mathrm{cn}\,u$, $\mathrm{dn}\,u$ und $\mathrm{am}\,u$, welche nach Potenzen des Argumentes u fortschreiten.

Aus der Reihe für $\mathrm{sn}\,u$ §. 113. schliefst man, dafs die Reihe für $\mathrm{cn}\,u$ die folgende Form haben werde:

$$\mathrm{cn}\,u = 1 - \overset{1}{a}.\frac{u^2}{2'} + \overset{2}{a}.\frac{u^4}{4'} - \overset{3}{a}.\frac{u^6}{6'} + \overset{4}{a}.\frac{u^8}{8'} - + \text{etc.}$$

Da nun nach §. 62. $\frac{\partial^2\,\mathrm{cn}\,u}{\partial u^2} = -\mathrm{cn}\,u + 2k^2(\mathrm{cn}\,u - \mathrm{cn}^3 u)$ ist, so nehmen wir noch eine Reihe von der Form

$$\mathrm{cn}^3 u = 1 - \overset{1}{c}.\frac{u^2}{2'} + \overset{2}{c}.\frac{u^4}{4'} - \overset{3}{c}.\frac{u^6}{6'} + \overset{4}{c}.\frac{u^8}{8'} - + \text{etc.}$$

Substituiren wir die beiden Reihen in der angegebenen Differenzial-Gleichung, so erhalten wir die einfache Relation

$$\overset{r+1}{a} = \overset{r}{a} + 2k^2(\overset{r}{c} - \overset{r}{a}).$$

Aufserdem erhält man nach dem Polynomial-Theoreme die Gleichung

$$\overset{r}{c} = \frac{4-r}{r}.[2r]^{2}_{2'}\,\overset{1}{a}\,\overset{r-1}{c} + \frac{8-r}{r}.[2r]^{4}_{4'}\,\overset{2}{a}\,\overset{r-2}{c} + \frac{12-r}{r}.[2r]^{6}_{6'}\,\overset{3}{a}\,\overset{r-3}{c} \ldots + 3.\overset{r}{a}.$$

Die Rechnung nach diesen beiden Formeln ist ziemlich bequem, und man findet

$$1.\quad \mathrm{cn}\,u = 1 - \frac{u^2}{2'} + \frac{1+4k^2}{4'}.u^4 - \frac{1+44k^2+16k^4}{6'}u^6$$
$$+ \frac{1+408k^2+912k^4+64k^6}{8'}.u^8$$
$$- \frac{1+3688k^2+30768k^4+15808k^6+256k^8}{10'}.u^{10}$$
$$+ \frac{1+33212k^2+870640k^4+1538560k^6+259328k^8+1024k^{10}}{12'}.u^{12}$$
$$- + \text{etc.}$$

Nach §. 30. erhält man hieraus sogleich für die Differente noch die Reihe

$$2.\quad \mathrm{dn}\,u = 1 - \frac{k^2u^2}{2'} + \frac{k^2(k^2+4)}{4'}.u^4 - \frac{k^2(k^4+44k^2+16)}{6'}.u^6$$
$$+ \frac{k^2(k^6+408k^4+912k^2+64)}{8'}.u^8$$
$$- \frac{k^2(k^8+3688k^6+30768k^4+15808k^2+256)}{10'}.u^{10}$$
$$+ \frac{k^2(k^{10}+33212k^8+870640k^6+1538560k^4+259328k^2+1024)}{12'}.u^{12}$$
$$- + \text{etc.}$$

Wird diese Reihe noch mit ∂u multiplicirt und integrirt, so erhält man sofort

$$3.\quad \operatorname{am} u = u - \frac{k^2}{3'}.u^3 + \frac{k^2(k^2+4)}{5'}.u^5 - \frac{k^2(k^4+44k^2+16)}{7'}.u^7$$
$$+ \frac{k^2(k^6+408k^4+912k^2+64)}{9'}.u^9$$
$$- \frac{k^2(k^8+3688k^6+30768k^4+15808k^2+256)}{11'}.u^{11}$$
$$+ \frac{k^2(k^{10}+33212k^8+870640k^6+1538560k^4+259328k^2+1024)}{13'}.u^{13}$$
$$-+ \text{etc.}$$

Zusatz 1. Die Reihe für $\operatorname{cn} u$ kann offenbar auch also dargestellt werden:

$$8.\quad \operatorname{cn} u = \cos u + \frac{4k^2}{4'}.u^4 - \frac{44k^2+16k^4}{6'}.u^6 + \frac{408k^2+912k^4+64k^6}{8'}.u^8$$
$$- \frac{3688k^2+30768k^4+15808k^6+256k^8}{10'}.u^{10}$$
$$+ \frac{33212k^2+870640k^4+1538560k^6+259328k^8+1024k^{10}}{12'}.u^{12}$$
$$-+ \text{etc.}$$

Hebt man aber die Glieder $1 - \frac{u^2}{2'} + \frac{4k^2}{4'}u^4 - \frac{16k^4}{6'}u^6 \ldots = x$ hervor, so ist $(x-1).4k^2+1 = 1 - \frac{2^2k^2u^2}{2'} + \frac{2^4k^4u^4}{4'} - \frac{2^6k^6u^6}{6'} +- \text{etc.} = \cos(2ku)$, also $(x-1).4k^2 = -(1-\cos(2ku)) = -2\sin^2(ku)$, folglich $1-x = \frac{\sin^2(ku)}{2k^2}$, oder $x = 1 - \frac{\sin^2(ku)}{2k^2}$. Es ist demnach auch

$$5.\quad \operatorname{cn} u = 1 - \frac{\sin^2(ku)}{2k^2} + \frac{1}{4'}.u^4 - \frac{1+44k^2}{6'}.u^6 + \frac{1+408k^2+912k^4}{8'}.u^8$$
$$- \frac{1+3688k^2+30768k^4+15808k^6}{10'}.u^{10}$$
$$+ \frac{1+33212k^2+870640k^4+1538560k^6+259328k^8}{12'}.u^{12}$$
$$-+ \text{etc.}$$

Aehnliche Ausdrücke erhält man nach §. 30. leicht auch für $\operatorname{dn} u$, und wenn man sie mit ∂u multiplicirt und integrirt, so erhält man

$$6.\quad \operatorname{am} u = \frac{\sin(ku)}{k} + \frac{4k^2}{5'}.u^5 - \frac{k^2(44k^2+16)}{7'}.u^7 + \frac{k^2(408k^4+912k^2+64)}{9'}.u^9$$
$$- \frac{k^2(3688k^6+30768k^4+15808k^2+256)}{11'}.u^{11} +- \text{etc.},$$

$$7.\quad \mathrm{am}\,u = \left(1-\frac{k^2}{4}\right)u + \frac{k^2}{4}\sin(2u) + \frac{k^4}{5'}.u^5 - \frac{k^2(k^4+44k^2)}{7'}.u^7$$
$$+\frac{k^2(k^6+408k^4+912k^2)}{9'}.u^9$$
$$-\frac{k^2(k^8+3688k^6+30768k^4+15808k^2)}{11'}.u^{11}$$
$$+\frac{k^2(k^{10}+33212k^8+870640k^6+1538560k^4+259328k^2)}{13'}.u^{13}$$
$$-+\text{etc.}$$

Diese Reihe hat unfehlbar einen höheren Grad der Convergenz, als die vorige.

Zusatz 2. Setzt man in der Formel (3.) $k'u$ für u und $\frac{ik}{k'}$ für k, so erhält man

$$\tfrac{1}{2}\pi - \mathrm{amc}\,u = k'u + \frac{k'k^2}{3'}u^3 - \frac{k'k^2(-k^2+4k'^2)}{5'}u^5 + \text{etc.},$$

also ist

$$8.\quad \mathrm{amc}\,u = \tfrac{1}{2}\pi - k'\left(u + \frac{k^2}{3'}u^3 - \frac{k^2(4k'^2-k^2)}{5'}u^5 + \frac{k^2(16k'^4-44k^2k'^2+k^4)}{7'}u^7\right.$$
$$\left.-\frac{k^2(64k'^6-912k^2k'^4+408k^4k'^2-k^6)}{9'}u^9 + - \text{etc.}\right).$$

Aus den Formeln (6.) und (7.) können ähnliche Ausdrücke für $\mathrm{amc}\,u$ hergeleitet werden, welche noch rascher convergiren.

Ueberhaupt läfst sich die Anzahl solcher nach Potenzen von u fortschreitender Reihen leicht noch ansehnlich vermehren.

§. 115.

Die sieben ersten Glieder der Reihen für $\mathrm{el}\,u$ und $\mathrm{lm}\,u$, welche nach Potenzen von u fortschreiten.

Multiplicirt man die Reihe (3.) des §. 113. mit sich selbst, so erhält man, wenn wieder $v=\frac{1+k^2}{2k}$ ist,

$$\mathrm{sn}^2u = u^2 - \frac{2^4kv}{4'}u^4 + \frac{2^4k^2(8v^2+9)}{6'}u^6 - \frac{2^8k^3(4v^3+27v)}{8'}u^8$$
$$+\frac{2^9k^4(16v^4+486v^2+189)}{10'}u^{10} - \frac{2^{11}.k^5(131v^5+7596v^3+16659v)}{12'}u^{12}$$
$$+-\text{etc.}$$

Wird diese Reihe mit k^2 multiplicirt und dann von Eins subtrahirt, so entsteht

$$\mathrm{dn}^2 u = 1 - k^2 u^2 + \frac{2^4 k^3 v}{4'} u^4 - \frac{2^4 k^4 (8v^2 + 9)}{6'} u^6 + \frac{2^8 k^5 (4v^3 + 27v)}{8'} u^8$$
$$- \frac{2^9 k^6 (16v^4 + 486v^2 + 189)}{10'} u^{10} + \frac{2^{11} k^7 (131v^5 + 7596v^3 + 16659v)}{12'} u^{12}$$
$$- + \text{etc.}$$

Multiplicirt man also mit ∂u und integrirt, so erhält man

$$\mathrm{el}\, u = u - \frac{2k^2 u^3}{5'} + \frac{2^4 k^3 v}{5'} u^5 - \frac{2^4 k^4 (8v^2 + 9)}{7'} u^6 + \frac{2^8 k^5 (4v^3 + 27v)}{9'} u^9$$
$$- \frac{2^9 k^6 (16v^4 + 486v^2 + 189)}{11'} u^{11} + \frac{2^{11} k^7 (131v^5 + 7596v^3 + 16659v)}{13'} u^{13}$$
$$- + \text{etc.}$$

Wird diese Reihe aufs Neue mit ∂u multiplicirt, und dann integrirt, so erhält man endlich

$$\mathrm{lm}\, u = \frac{u^2}{2} - \frac{2k^2 . u^4}{4'} + \frac{2^4 k^3 . v}{6'} . u^6 - \frac{2^4 k^4 (8v^2 + 9)}{8'} . u^8 + \frac{2^8 k^5 (4v^3 + 27v)}{10'} . u^{10}$$
$$- \frac{2^9 k^6 . (16v^4 + 486v^2 + 189)}{12'} . u^{12} + \frac{2^{11} k^7 . (131v^5 + 7596v^3 + 16659v)}{14'} . u^1$$
$$- + \text{etc.}$$

Elfter Abschnitt.

§. 116.

Von den Modular-Integralen der zweiten Art.

Die Modular-Integrale der zweiten Art sind solche Integrale, deren Werthe im Allgemeinen durch Modularlogarithmen und durch Modular-Integrale der ersten Art ausgedrückt werden. Es ist nach §. 65.

$$\frac{\mathrm{el}(a + u) + \mathrm{el}(a - u)}{2} = \mathrm{el}\, a - \frac{k^2 \,\mathrm{sn}\, a \,\mathrm{cn}\, a \,\mathrm{dn}\, a \,\mathrm{sn}^2 u}{1 - k^2 \,\mathrm{sn}^2 a \,\mathrm{sn}^2 u}.$$

Wird diese Gleichung mit ∂u multiplicirt und so integrirt, dafs das Integral für $u = 0$ verschwindet, so erhält man

$$\frac{\mathrm{lm}(a + u) - \mathrm{lm}(a - u)}{2} = u . \mathrm{el}\, a - \int_0 \frac{k^2 \,\mathrm{sn}\, a \,\mathrm{cn}\, a \,\mathrm{dn}\, a \,\mathrm{sn}^2 u \,\partial u}{1 - k^2 \,\mathrm{sn}^2 a \,\mathrm{sn}^2 u},$$

und es ist also rückwärts:

$$1. \quad \int_0 \frac{k^2 \,\mathrm{sn}\, a \,\mathrm{cn}\, a \,\mathrm{dn}\, a \,\mathrm{sn}^2 u \,\partial u}{1 - k^2 \,\mathrm{sn}^2 u \,\mathrm{sn}^2 a} = u . \mathrm{el}\, a - \frac{\mathrm{lm}(a + u) - \mathrm{lm}(a - u)}{2}.$$

Schon im §. 39. kam vor, dafs

$$\frac{k^2 \,\mathrm{sn}\, a \,\mathrm{cn}\, a \,\mathrm{cn}^2 u}{\mathrm{dn}\, a (1 - k^2 \,\mathrm{sn}^2 a \,\mathrm{sn}^2 u)} = \frac{k^2 \,\mathrm{sn}\, a \,\mathrm{cn}\, a}{\mathrm{dn}\, a} - \frac{k^2 \,\mathrm{sn}\, a \,\mathrm{cn}\, a \,\mathrm{dn}\, a \,\mathrm{sn}^2 u}{1 - k^2 \,\mathrm{sn}^2 a \,\mathrm{sn}^2 u}$$

ist. Multiplicirt man diese Gleichung mit ∂u und integrirt, so entsteht

die Gleichung

$$\int_0 \frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{snc} a \operatorname{cn}^2 u \, \partial u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u} = k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{snc} a . u - \int_0 \frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn}^2 u \, \partial u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u};$$

und wird hierin für das auf der rechten Seite befindliche Integral sein Werth, der Gleichung (1.) gemäfs, substituirt, so erhält man die Gleichung

$$\int_0 \frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{snc} a \operatorname{cn}^2 u \, \partial u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u} = (k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{snc} a - \operatorname{el} a) u + \frac{\operatorname{lm}(a+u) - \operatorname{lm}(a-u)}{2},$$

welche aber noch eine kleine Reduction gestattet. Da nämlich $k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{snc} a - \operatorname{el} a = \operatorname{elc} a - E$ ist, so erhalten wir

$$2. \quad \int_0 \frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{snc} a . \operatorname{cn}^2 u . \partial u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u} = -u(E - \operatorname{elc} a) + \frac{\operatorname{lm}(a+u) - \operatorname{lm}(a-u)}{2}.$$

Da ferner $\operatorname{tn} a \operatorname{dn} a - \frac{\operatorname{tn} a \operatorname{dn} a \operatorname{dn}^2 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u} = \frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn}^2 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u}$ ist, so erhalten wir, wenn diese Gleichung mit ∂u multiplicirt und integrirt wird,

$$\int_0 \frac{\operatorname{tn} a \operatorname{dn} a \operatorname{dn}^2 u \, \partial u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u} = \operatorname{tn} a \operatorname{dn} a . u - \int_0 \frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn}^2 u \, \partial u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u},$$

und es ist also

$$3. \quad \int_0 \frac{\operatorname{tn} a \operatorname{dn} a \operatorname{dn}^2 u . \partial u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u} = (\operatorname{tn} a \operatorname{dn} a - \operatorname{el} a) . u + \frac{\operatorname{lm}(a+u) - \operatorname{lm}(a-u)}{2}.$$

Da $\operatorname{tn} a \operatorname{dn} a - \operatorname{el} a = \mathfrak{El}' a - a$ ist, so kann dieser Ausdruck noch für den Coefficienten von u in der vorigen Gleichung substituirt werden.

Sehen wir von den constanten Factoren in den drei obigen Integralen ab, so sind dieselben

$$\int \frac{\operatorname{sn}^2 u . \partial u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u}, \quad \int \frac{\operatorname{cn}^2 u . \partial u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u} \quad \text{und} \quad \int \frac{\operatorname{dn}^2 u . \partial u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u},$$

und nach den drei verschiedenen Modular-Functionen, welche in den Zählern vorkommen, nennen wir das in der Gleichung (1.) vorkommende Integral das *Sinus-Integral,* das in der Gleichung (2.) vorkommende Integral das *Cosinus-Integral* und das in der Gleichung (3.) vorkommende endlich das *Differente-Integral.* Die veränderliche Gröfse u nennen wir das *Argument des Integrals* und die Constante a *den Parameter.* Jedes der drei Integrale hängt also von drei Gröfsen ab: von dem Argumente u, von dem Parameter a und von dem Modul k. Wir wenden die folgende Bezeichnung an

$$\mathfrak{S}(u, a) = \int_0 \frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a . \operatorname{sn}^2 u . \partial u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u}, \quad \mathfrak{C}(u, a) = \int_0 \frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{snc} a . \operatorname{cn}^2 u . \partial u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u},$$

$$\mathfrak{D}(u, a) = \int_0 \frac{\operatorname{tn} a \operatorname{dn} a . \operatorname{dn}^2 u . \partial u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u}$$

und ändern diese Bezeichnung ab in $\mathfrak{S}'(u,a)$, $\mathfrak{E}'(u,a)$, $\mathfrak{D}'(u,a)$, wenn der Modul k mit k' vertauscht wird. Hiernach haben wir also die drei Fundamental-Formeln

$$\mathfrak{S}(u,a) = \quad u.\,\mathrm{el}\,a - \frac{\mathrm{lm}(a+u)-\mathrm{lm}(a-u)}{2},$$

$$\mathfrak{E}(u,a) = -u(E-\mathrm{elc}\,a) + \frac{\mathrm{lm}(a+u)-\mathrm{lm}(a-u)}{2},$$

$$\mathfrak{D}(u,a) = \quad u(\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,a - \mathrm{el}\,a) + \frac{\mathrm{lm}(a+u)-\mathrm{lm}(a-u)}{2}, \text{ oder auch}$$

$$\mathfrak{D}(u,a) = \quad u(\mathfrak{El}'a - a) + \frac{\mathrm{lm}(a+u)-\mathrm{lm}(a-u)}{2}.$$

Die vorstehenden drei Integrale hängen auf eine einfache Weise von einander ab. Es ist zunächst

$$\mathfrak{S}(u,a) + \mathfrak{E}(u,a) = k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a.u \quad \text{und}$$

$$\mathfrak{S}(u,a) + \mathfrak{D}(u,a) = \mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,a.u = \frac{\mathrm{sn}\,a}{\mathrm{snc}\,a}.u,$$

$$\mathfrak{D}(u,a) - \mathfrak{E}(u,a) = \frac{\mathrm{dnc}\,a}{\mathrm{tnc}\,a}.u = \frac{k'\,\mathrm{cnc}\,a}{\mathrm{cn}\,a}.u,$$

da $\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,a - k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a = \frac{k'^2\,\mathrm{tn}\,a}{\mathrm{dn}\,a} = \frac{\mathrm{dnc}\,a}{\mathrm{tnc}\,a} = \frac{k'\,\mathrm{cnc}\,a}{\mathrm{cn}\,a}$ ist.

§. 117.

Eintheilung der Modular-Integrale der zweiten Art in vier Classen.

Die Modular-Integrale der zweiten Art haben einige Aehnlichkeit mit den im Zusatze zu §. 61. aufgeführten achtzehn Integralen; die zu integrirenden, mit ∂u multiplicirten Functionen des §. 61. enthalten im Zähler entweder nur eine Modular-Function des Argumentes u, oder zwei verschiedene Modular-Functionen des veränderlichen Argumentes u; wogegen in den Zählern der Integrale $\mathfrak{S}(u,a)$, $\mathfrak{E}(u,a)$ und $\mathfrak{D}(u,a)$ hinter dem Integrations-Zeichen das *Quadrat* einer Modular-Function des Argumentes u vorkommt.

Diese Aehnlichkeit läſst sich noch weiter verfolgen. Die Ausdrücke der Werthe der Modular-Integrale enthalten jeder den halben Unterschied der Modular-Logarithmen der Argumente $a+u$ und $a-u$, und so wie die Werthe der im §. 61. aufgeführten achtzehn Integrale sich theils als hyperbolische, theils als cyklische Arcus darstellen lassen, so läſst sich auch die Differenz $\frac{\mathrm{lm}(a+u)-\mathrm{lm}(a-u)}{2}$ bald als ein hyperbolischer,

bald als ein cyklischer Arcus ausdrücken. Setzt man überhaupt $\text{lm}\,x = \log(\varphi x)$, so ist auch $\text{lm}(a+u) = \log\varphi(a+u)$ und $\text{lm}(a-u) = \log\varphi(a-u)$, also

$$\frac{\text{lm}(a+u) - \text{lm}(a-u)}{2} = \log\sqrt{\frac{\varphi(a+u)}{\varphi(a-u)}}.$$

Sind nun a und u entweder beide reell, oder beide imaginär, so läſst sich der Bruch $\frac{\varphi(a+u)}{\varphi(a-u)}$ in beiden Fällen unter die Form $\frac{P+Q}{P-Q}$ bringen, worin P und Q reell ist, und es ist also die Differenz

$$\frac{\text{lm}(a+u) - \text{lm}(a-u)}{2} = \log\sqrt{\frac{P+Q}{P-Q}} = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{Q}{P}\right)$$

ein *hyperbolischer Arcus, welcher auch wohl als ein Aggregat mehrerer hyperbolischen Arcus* dargestellt werden kann.

Wenn aber eines der beiden Argumente a und u reell, das andere hingegen imaginär ist, so läſst sich die Differenz $\frac{\text{lm}(a+u) - \text{lm}(a-u)}{2}$ in beiden Fällen in der Form $\log\sqrt{\frac{P+Qi}{P-Qi}}$ darstellen, in welcher wieder P und Q reell sind und es ist also nun

$$\frac{\text{lm}(a+u) - \text{lm}(a-u)}{2i} = \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{P+Qi}{P-Qi}} = \text{arc tang}\left(\frac{Q}{P}\right)$$

ein *cyklischer* Arcus, welcher auch wohl als ein Aggregat *mehrerer cyklischen Arcus* dargestellt werden kann.

Man kann daher die Modular-Integrale der zweiten Art eintheilen in solche, welche von *hyperbolischer Natur* sind und in solche, welche von *cyklischer Natur* sind, oder besser sogleich in vier Classen von Integralen, wovon zwei zur ersten und zwei zur zweiten Gattung gehören.

Die drei Integrale $\mathfrak{S}(u, a)$, $\mathfrak{C}(u, a)$, $\mathfrak{D}(u, a)$ machen, wenn a und u reell sind, eine Classe von Integralen mit hyperbolischer Natur aus; setzt man aber ai für a, so wird jedes der drei Integrale imaginär; es enthält dann den Factor i; läſst man diesen Factor weg, so sind die Integrale reell und von cyklischer Natur; wir bezeichnen sie aus diesem Grunde mit $S(u, a)$, $C(u, a)$, $D(u, a)$.

Setzen wir in den vorigen sechs Integralen ui für u und führen sogleich reelle cyklische Modular-Functionen des Argumentes u ein, so erhalten sie den Modul k'. Um dieses zu vermeiden, vertauschen wir in den sechs vorigen Integralen zuerst die beiden conjugirten Modul, ehe wir ui für i setzen. Dadurch erhalten die Sinus-Integrale den Factor $-i$,

die Cosinus- und Differente-Integrale aber den Factor i, und nach Weglassung dieser Factoren verwandeln sich die drei Integrale $\mathfrak{S}'(u,a)$, $\mathfrak{C}'(u,a)$ und $\mathfrak{D}'(u,a)$ in drei andere von cyklischer Natur, welche wir durch $'S(u,a)$, $'C(u,a)$ und $'D(u,a)$ bezeichnen. Die drei Integrale $S'(u,a)$, $C'(u,a)$ und $D'(u,a)$ aber verwandeln sich nun in drei Integrale von hyperbolischer Natur, welche wir durch $'\mathfrak{S}(u,a)$, $'\mathfrak{C}(u,a)$ und $'\mathfrak{D}(u,a)$ bezeichnen. Hiernach haben wir also im Ganzen zwölf Modular-Integrale der zweiten Art, und hiervon rechnen wir

Zur ersten Classe: $S(u,a)$, $C(u,a)$, $D(u,a)$;
Zur zweiten Classe: $\mathfrak{S}(u,a)$, $\mathfrak{C}(u,a)$, $\mathfrak{D}(u,a)$;
Zur dritten Classe: $'S(u,a)$, $'C(u,a)$, $'D(u,a)$;
Zur vierten Classe: $'\mathfrak{S}(u,a)$, $'\mathfrak{C}(u,a)$, $'\mathfrak{D}(u,a)$.

Bald nachher werden wir einen hinreichenden Grund für diese besondere Anordnung der Reihefolge der vier Classen angeben.

Die folgenden einfachen Gleichungen drücken in imaginärer Form den gegenseitigen Zusammenhang unter den zwölf Integralen aufs vollständigste aus:

1. $\mathfrak{S}(u,ai)=iS(u,a)$, $\mathfrak{C}(u,ai)=iC(u,a)$, $\mathfrak{D}(u,ai)=iD(u,a)$,
2. $S(u,ai)=i\mathfrak{S}(u,a)$, $C(u,ai)=i\mathfrak{C}(u,a)$, $D(u,ai)=i\mathfrak{D}(u,a)$,
3. $\mathfrak{S}'(ui,a)=-i'S(u,a)$, $\mathfrak{C}'(ui,a)=i'C(u,a)$, $\mathfrak{D}'(ui,a)=i'D(u,a)$,
4. $'S'(ui,a)=-i\mathfrak{S}(u,a)$, $'C'(ui,a)=i\mathfrak{C}(u,a)$, $'D'(ui,a)=i\mathfrak{D}(u,a)$,
5. $S'(ui,a)=-i'\mathfrak{S}(u,a)$, $C'(ui,a)=i'\mathfrak{C}(u,a)$, $D'(ui,a)=i'\mathfrak{D}(u,a)$,
6. $'\mathfrak{S}'(ui,a)=-iS(u,a)$, $'\mathfrak{C}'(ui,a)=iC(u,a)$, $'\mathfrak{D}'(ui,a)=iD(u,a)$,
7. $'S(u,ai)=i'\mathfrak{S}(u,a)$, $'C(u,ai)=i'\mathfrak{C}(u,a)$, $'D(u,ai)=i'\mathfrak{D}(u,a)$,
8. $'\mathfrak{S}(u,ai)=i'S(u,a)$, $'\mathfrak{C}(u,ai)=i'C(u,a)$, $'\mathfrak{D}(u,ai)=i'D(u,a)$,

und aus ihnen erhält man noch durch Zusammensetzung die folgenden Formeln:

9. $S'(ui,ai)='S(u,a)$, $C'(ui,ai)=-'C(u,a)$, $D'(ui,ai)=-'D(u,a)$,
10. $'S'(ui,ai)=S(u,a)$, $'C'(ui,ai)=-C(u,a)$, $'D'(ui,ai)=-D(u,a)$,
11. $\mathfrak{S}'(ui,ai)='\mathfrak{S}(u,a)$, $\mathfrak{C}'(ui,ai)=-'\mathfrak{C}(u,a)$, $\mathfrak{D}'(ui,ai)=-'\mathfrak{D}(u,a)$,
12. $'\mathfrak{S}'(ui,ai)=\mathfrak{S}(u,a)$, $'\mathfrak{C}'(ui,ai)=-\mathfrak{C}(u,a)$, $'\mathfrak{D}'(ui,ai)=-\mathfrak{D}(u,a)$,

in welchen sich das an den Buchstaben $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ auf der rechten Seite befindliche Comma auf eine Vertauschung des Moduls k mit k' bezieht,

hingegen das Comma zur Linken auf die Unterscheidung der ersten Classe von der dritten, oder auch der zweiten Classe von der vierten,

§. 118.

Fundamental-Formeln für die Integrale der ersten Classe.

Setzt man in den Ausdrücken für $\mathfrak{S}(u, a)$, $\mathfrak{C}(u, a)$, $\mathfrak{D}(u, a)$ im §. 116. jetzt ai für a und läſst man den davon herrührenden Factor i auf beiden Seiten weg, so erhält man für die Modular-Integrale der ersten Classe (zweiter Art) zunächst die folgenden Ausdrücke:

$$1.\quad\begin{cases} S(u,a) = \int_0 \dfrac{k^2\, \mathfrak{S}\mathrm{n}\, a\, \mathfrak{C}\mathrm{n}\, a\, \mathfrak{D}\mathrm{n}\, a\, \mathrm{sn}^2 u\,.\,\partial u}{1+k^2\, \mathfrak{S}\mathrm{n}^2 a\, \mathrm{sn}^2 u}, \\ C(u,a) = \int_0 \dfrac{k^2\, \mathfrak{S}\mathrm{n}\, a\, \mathfrak{C}\mathrm{n}\, a\,.\,\mathrm{cn}^2 u\,.\,\partial u}{\mathfrak{D}\mathrm{n}\, a\,(1+k^2\, \mathfrak{S}\mathrm{n}^2 a\, \mathrm{sn}^2 u)}, \\ D(u,a) = \int_0 \dfrac{\mathfrak{T}\mathrm{n}\, a\, \mathfrak{D}\mathrm{n}\, a\,.\,\mathrm{dn}^2 u\,.\,\partial u}{1+k^2\, \mathfrak{S}\mathrm{n}^2 a\, \mathrm{sn}^2 u}, \end{cases}$$

welche sich, wenn man cyklische Functionen statt der hyperbolischen einführt, in

$$2.\quad\begin{cases} S(u,a) = \int_0 \dfrac{k^2\, \mathrm{tn}' a\, \mathrm{dn}' a\,.\,\mathrm{sn}^2 u\,.\,\partial u}{\mathrm{cn}'^2 a\,(1+k^2\, \mathrm{tn}'^2 a\, \mathrm{sn}^2 u)} = \int_0 \dfrac{\mathrm{dnc}' a}{\mathrm{tnc}' a\, \mathrm{snc}'^2 a}\,.\,\dfrac{\mathrm{sn}^2 u\,.\,\partial u}{1+k^2\, \mathrm{tn}'^2 a\, \mathrm{sn}^2 u}, \\ C(u,a) = \int_0 \dfrac{k^2\, \mathrm{tn}' a\,.\,\mathrm{cn}^2 u\,.\,\partial u}{\mathrm{dn}' a\,(1+k^2\, \mathrm{tn}'^2 a\, \mathrm{sn}^2 u)}, \\ D(u,a) = \int_0 \dfrac{\mathrm{tn}' a\, \mathrm{dn}' a\,.\,\mathrm{dn}^2 u\,.\,\partial u}{1+k^2\, \mathrm{tn}'^2 a\, \mathrm{sn}^2 u} \end{cases}$$

verwandeln. Die Werthe dieser Integrale werden durch die Formeln:

$$3.\quad\begin{cases} S(u,a) = \quad u\,.\,\mathfrak{E}\mathrm{l}\, a - \dfrac{\mathrm{lm}(u+ai) - \mathrm{lm}(u-ai)}{2i}, \\ C(u,a) = -u\,(a - \mathfrak{E}' + \mathrm{elc}' a) + \dfrac{\mathrm{lm}(u+ai) - \mathrm{lm}(u-ai)}{2i}, \\ D(u,a) = \quad u\,(\mathrm{el}' a - a) + \dfrac{\mathrm{lm}(u+ai) - \mathrm{lm}(u-ai)}{2i}, \end{cases}$$

ausgedrückt und die darin vorkommende Differenz $\dfrac{\mathrm{lm}(u+ai) - \mathrm{lm}(u-ai)}{2i}$ ist zwar reell, läſst sich aber im Allgemeinen nicht anders in einer reellen Form darstellen, als durch Entwicklung in unendliche Reihen.

Setzt man den Parameter $a = K'$, so hat man, da $\dfrac{\mathrm{lm}(u+iK') - \mathrm{lm}(u-iK')}{2i} = (K' - \mathfrak{E}')u + \tfrac{1}{2}\pi$ ist, die folgenden particulären

Bestimmungen:

$$4.\quad S(u,K') = \tfrac{1}{0},\qquad C(u,K') = \tfrac{1}{2}\pi,\qquad D(u,K') + \tfrac{1}{2}\pi.$$

Setzt man aber das Argument $u = K$, so erhält man, da $\frac{\operatorname{lm}(K+ai) - \operatorname{lm}(K-ai)}{2i} = E.a$ ist, die Bestimmungen

$$5.\quad \begin{cases} S(K,a) = K.\mathfrak{E}l\,a - E.a = (K-E)a + (\operatorname{tn}'a\operatorname{dn}'a - \operatorname{el}'a).K, \\ C(K,a) = K(E' - \operatorname{elc}'a) - (K-E)a, \\ D(K,a) = K.\operatorname{el}'a - (K-E)a. \end{cases}$$

Den Zusammenhang unter den Integralen der ersten Classe drücken endlich die drei Formeln aus:

$$6.\quad \begin{cases} S(u,a) + C(u,a) = \frac{k^2\operatorname{tn}'a}{\operatorname{dn}'a}.u = \frac{\operatorname{dnc}'a}{\operatorname{tnc}'a}.u = \frac{k\operatorname{cnc}'a}{\operatorname{cn}'a}.u, \\ S(u,a) + D(u,a) = \operatorname{tn}'a\operatorname{dn}'a.u = \frac{\operatorname{sn}'a}{\operatorname{snc}'a}.u, \\ D(u,a) - C(u,a) = (k'^2\operatorname{sn}'a\operatorname{snc}'a).u. \end{cases}$$

§. 119.

Fundamental-Formeln für die Integrale der dritten Classe.

Vertauscht man in den Formeln des §. 116. den Modul k mit k', und setzt ui für u, so erhält man, den Formeln (3.) des §. 117. gemäſs:

$$'S(u,a) = \int_0 \frac{k'^2\operatorname{sn}'a\operatorname{cn}'a\operatorname{dn}'a\operatorname{tn}^2u.\partial u}{1 + k'^2\operatorname{sn}'^2a\operatorname{tn}^2u},$$

$$'C(u,a) = \int_0 \frac{k'^2\operatorname{sn}'a\operatorname{snc}'a.\partial u}{\operatorname{cn}^2u(1 + k'^2\operatorname{sn}'^2a\operatorname{tn}^2u)},$$

$$'D(u,a) = \int_0 \frac{\operatorname{tn}'a\operatorname{dn}'a\operatorname{dn}^2u.\partial u}{\operatorname{cn}^2u(1 + k'^2\operatorname{sn}'^2a\operatorname{tn}^2u)},$$

und da $\operatorname{cn}^2u(1 + k'^2\operatorname{sn}'^2a\operatorname{tn}^2u) = 1 - \operatorname{dn}'^2a.\operatorname{sn}^2u$ ist, so lassen sich jene Integrale auch also darstellen:

$$1.\quad \begin{cases} 'S(u,a) = \int_0 \frac{k'^2\operatorname{sn}'a\operatorname{cn}'a\operatorname{dn}'a.\operatorname{sn}^2u.\partial u}{1 - \operatorname{dn}'^2a.\operatorname{sn}^2u}, \\ 'C(u,a) = \int_0 \frac{k'^2\operatorname{sn}'a\operatorname{snc}'a.\partial u}{1 - \operatorname{dn}'^2a.\operatorname{sn}^2u}, \\ 'D(u,a) = \int_0 \frac{\operatorname{tn}'a\operatorname{dn}'a.\operatorname{dn}^2u.\partial u}{1 - \operatorname{dn}'^2a.\operatorname{sn}^2u}. \end{cases}$$

Für die Werthe dieser drei Integrale erhält man die Formeln:

$$2.\quad \begin{cases} {}'S(u,a) = -u.\mathrm{el}'a + \dfrac{\mathrm{lm}'(a+ui)-\mathrm{lm}'(a-ui)}{2i}, \\ {}'C(u,a) = -u(E'-\mathrm{elc}'a) + \dfrac{\mathrm{lm}'(a+ui)-\mathrm{lm}'(a-ui)}{2i}, \\ {}'D(u,a) = u(\mathrm{tn}'a\,\mathrm{dn}'a-\mathrm{el}'a) + \dfrac{\mathrm{lm}'(a+ui)-\mathrm{lm}'(a-ui)}{2i}. \end{cases}$$

Setzt man den Parameter $a=K'$, so hat man, da $\frac{\mathrm{lm}'(K'+ui)-\mathrm{lm}'(K'-ui)}{2i} = E'.u$ ist, die particulären Formeln

$$3.\quad {}'S(u,K')=0,\quad {}'C(u,K')=0,\quad {}'D(u,K)=\tfrac{1}{0}.$$

Nimmt man aber das Argument $u=K$, so erhält man, da $\frac{\mathrm{lm}'(a+iK)-\mathrm{lm}'(a-iK)}{2i} = (K-E)a+\frac{1}{2}\pi$ ist,

$$4.\quad \begin{cases} {}'S(K,a) = (K-E).a - K.\mathrm{el}'a + \tfrac{1}{2}\pi, \\ {}'C(K,a) = (K-E).a - K(E'-\mathrm{elc}'a) + \tfrac{1}{2}\pi, \\ {}'D(K,a) = (K-E).a + K(\mathrm{tn}'a\,\mathrm{dn}'a - \mathrm{el}'a) + \tfrac{1}{2}\pi. \end{cases}$$

Der Zusammenhang unter den Integralen der dritten Classe wird ausgedrückt durch die allgemeinen Formeln:

$$5.\quad \begin{cases} {}'C(u,a) - {}'S(u,a) = k'^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a.u, \\ {}'D(u,a) - {}'S(u,a) = \mathrm{tn}'a\,\mathrm{dn}'a.u = \dfrac{\mathrm{sn}'a}{\mathrm{snc}'a}.u, \\ {}'D(u,a) - {}'C(u,a) = \dfrac{\mathrm{dnc}'a}{\mathrm{tnc}'a}.u = \dfrac{k\,\mathrm{cnc}'a}{\mathrm{cn}'a}.u. \end{cases}$$

§. 120.

Die einfachsten reellen Relationen unter den Integralen der ersten und dritten Classe.

Man findet leicht $1-\mathrm{dn}'^2a\,\mathrm{sn}^2(K-u) = \frac{k'^2(\mathrm{sn}'^2a+\mathrm{cn}'^2a\,\mathrm{sn}^2u)}{\mathrm{dn}^2u}$.
Daher ist

$${}'S(K-u,a) = \int\frac{-\mathrm{dn}'a}{\mathrm{tn}'a}.\frac{\mathrm{cn}^2u.\partial u}{1+\frac{\mathrm{sn}^2u}{\mathrm{tn}'^2a}} = \int\frac{-k^2\,\mathrm{tnc}'a}{\mathrm{dnc}'a}.\frac{\mathrm{cn}^2u.\partial u}{1+k^2\,\mathrm{tnc}'^2a\,\mathrm{sn}^2u},$$

oder

$$\partial\,{}'S(K-u,a) = -\partial\,C(u,K'-a),$$

und also

$${}'S(K-u,a)+C(u,K'-a) = \text{const.}$$

Die Constante findet man, indem man entweder $u=0$, oder $u=K$ setzt. Daher ist

$$6.\quad \begin{cases} {}'S(K-u,a)+C(u,K'-a) = {}'S(K,a) = C(K,K'-a) \text{ und} \\ {}'S(u,K'-a)+C(K-u,a) = {}'S(K,K'-a) = C(K,a); \end{cases}$$

denn man braucht in der vorigen Gleichung nur $K-u$ für u und $K'-a$ für a zu seten. Ferner findet man, da

$$1-\mathrm{dn}'^2 a\,\mathrm{sn}^2(K-u) = \frac{k'^2\,\mathrm{cnc}'^2 a}{\mathrm{dnc}'^2 a\,\mathrm{dn}^2 u}(1+k^2\,\mathrm{tnc}'^2 a\,\mathrm{sn}^2 u)$$ ist,

$$'C(K-u,a) = \int \frac{-\mathrm{tnc}' a\,\mathrm{dnc}' a\,.\,\mathrm{dn}^2 a\,.\,\partial u}{1+k^2\,\mathrm{tnc}'^2 a\,\mathrm{sn}^2 u}$$

oder

$$\partial\, 'C(K-u,a) = -\partial D(u,K'-a);$$

daher haben wir

$$7.\quad \begin{cases} 'C(K-u,a)+D(u,K'-a) = \,'C(K,a) = D(K,K'-a) \text{ und} \\ 'C(u,K'-a)+D(K-u,a) = \,'C(K,K'-a) = D(K,a). \end{cases}$$

Ferner findet man

$$\partial\, 'D(K-u,a) = \frac{-\mathrm{dnc}' a}{\mathrm{cnc}' a\,\mathrm{snc}' a}\cdot\frac{\partial u}{1+k^2\,\mathrm{tnc}'^2 a\,\mathrm{sn}^2 u},$$ und da

$$\partial S(u,K'-a) = \frac{k^2\,\mathrm{tnc}' a\,\mathrm{dnc}' a}{\mathrm{cnc}'^2 a}\cdot\frac{\mathrm{sn}^2 u\,.\,\partial u}{1+k^2\,\mathrm{tnc}'^2 a\,\mathrm{sn}^2 u}$$

ist, so haben wir

$$8.\quad \begin{cases} \partial S(u,K'-a)-\partial\, 'D(K-u,a) = \dfrac{\partial u}{\mathrm{sn}' a\,\mathrm{snc}' a}, \text{ also ist} \\ S(u,K'-a)-\, 'D(K-u,a) = \dfrac{u}{\mathrm{sn}' a\,\mathrm{snc}' a} -\, 'D(K,a). \end{cases}$$

Setzt man in dieser Gleichung $K-u$ für u, und $K'-a$ für a, so hat man auch

$$S(K-u,a)-\,'D(u,K'-a) = \frac{K-u}{\mathrm{sn}' a\,\mathrm{snc}' a} -\,'D(K,K'-a).$$

Setzt man hierin $u=0$, so hat man noch

$$9.\quad S(K,a) = \frac{K}{\mathrm{sn}' a\,\mathrm{snc}' a} -\,'D(K,K'-a).$$

Wird von dieser Gleichung die vorige subtrahirt, so erhält man

$$10.\quad 'D(u,K'-a)-S(K-u,a) = \frac{u}{\mathrm{sn}' a\,\mathrm{snc}' a} - S(K,a).$$

§. 121.

Fundamental-Formeln für die Modular-Integrale der zweiten und vierten Classe.

Die Fundamental-Formeln für die Modular-Integrale der zweiten Classe kamen schon gröfstentheils im §. 116. vor und es bleibt fast nur übrig, einige particulären Bestimmungen aus ihnen herzuleiten. Setzt man den Parameter $a=K$ und erinnert sich, dafs $\frac{\mathrm{lm}(K+u)-\mathrm{lm}(K-u)}{2} = E.u$ ist, so erhält man

$$1.\quad \mathfrak{S}(u,K)=0,\quad \mathfrak{C}(u,K)=0,\quad \mathfrak{D}(u,K)=\tfrac{1}{2}.$$

30*

Setzt man aber das Argument $u = K$, so erhält man

$$2. \quad \begin{cases} \mathfrak{S}(K, a) = K.\,\mathrm{el}\,a - E.a, \\ \mathfrak{C}(K, a) = E.a - K(E - \mathrm{elc}\,a), \\ \mathfrak{D}(K, a) = K(\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,a - \mathrm{el}\,a) + E.a. \end{cases}$$

Zu diesen Formeln fügen wir noch eine allgemeine hinzu. Vertauscht man in den Formeln, wodurch die Werthe der Integrale ausgedrückt werden, das Argument u mit dem Parameter, so verwandelt sich die Gleichung

$$\mathfrak{S}(u, a) = u.\,\mathrm{el}\,a - \frac{\mathrm{lm}(a+u) - \mathrm{lm}(a-u)}{2} \text{ in}$$

$$\mathfrak{S}(a, u) = a.\,\mathrm{el}\,u - \frac{\mathrm{lm}(a+u) - \mathrm{lm}(a-u)}{2},$$

indem $\mathrm{lm}(a-u) = \mathrm{lm}(u-a)$ ist. Durch die Subtraction erhält man also

$$3. \quad \mathfrak{S}(a, u) - \mathfrak{S}(u, a) = a.\,\mathrm{el}\,u - u.\,\mathrm{el}\,a.$$

Aehnliche Formeln lassen sich auch leicht für das Cosinus- und Differente-Integral, und überhaupt für die Integrale der drei übrigen Classen herleiten.

Die Integrale der vierten Classe werden ausgedrückt durch die Formeln

$$4. \quad \begin{cases} {}'\mathfrak{S}(u, a) = \int_0 \frac{k'^2\,\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}^2 u.\partial u}{\mathrm{cn}^2 a\left(1 - \frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{snc}^2 a}\right)} = \int_0 \frac{\mathrm{dnc}\,a}{\mathrm{tnc}\,a}.\frac{{}'\mathrm{sn}^2 u.\partial u}{\mathrm{snc}^2 a - \mathrm{sn}^2 u}, \\ {}'\mathfrak{C}(u, a) = \int_0 \frac{k'^2\,\mathrm{tn}\,a.\partial u}{\mathrm{dn}\,a\left(1 - \frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{snc}^2 a}\right)} = \int_0 \frac{\mathrm{dnc}\,a}{\mathrm{tnc}\,a}.\frac{\partial u}{1 - \frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{snc}^2 a}}, \\ {}'\mathfrak{D}(u, a) = \int_0 \frac{\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,a.\mathrm{dn}^2 u.\partial u}{1 - \frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{snc}^2 a}}, \end{cases}$$

welche man erhält, wenn man in den Formeln (1.) des §. 119. ai für a setzt und den Factor i auf beiden Seiten wegläfst.

Setzt man in den Formeln (2.) des §. 119. ebenfalls ai für a, und beachtet, dafs überhaupt $\mathrm{lm}'(ix) = -\mathfrak{Lm}'x$ ist, so erhält man

$$5. \quad \begin{cases} {}'\mathfrak{S}(u, a) = -u.\mathfrak{El}'a + \frac{\mathfrak{Lm}'(a+u) - \mathfrak{Lm}'(a-u)}{2}, \\ {}'\mathfrak{C}(u, a) = -u(a - E + \mathrm{elc}\,a) + \frac{\mathfrak{Lm}'(a+u) - \mathfrak{Lm}'(a-u)}{2}, \\ {}'\mathfrak{D}(u, a) = -u(a - \mathrm{el}\,a) + \frac{\mathfrak{Lm}'(a+u) - \mathfrak{Lm}'(a-u)}{2}, \end{cases}$$

Der gemeinschaftliche Nenner oder Divisor in den Ausdrücken (4.) wird schon $= 0$, wenn $\mathrm{snc}\,a = \mathrm{sn}\,u$, also $a + u = K$ wird; und weil dann

die Beschleunigung des Wachsens der drei Integrale unendlich grofs wird, so werden die drei Integrale $'\mathfrak{S}(u,a)$, $'\mathfrak{C}(u,a)$ und $'\mathfrak{D}(u,a)$ früher unendlich, ehe a oder u die Gröfse von K erreicht: dann nämlich schon, wenn $u = K - a$ wird.

Setzt man in den Formeln (6.) des §. 118. noch ui für u, indem man zugleich die beiden conjugirten Modul k und k' mit einander vertauscht, so werden sie

$$6.\quad \begin{cases} '\mathfrak{C}(u,a) - '\mathfrak{S}(u,a) = \frac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a}.u, \\ '\mathfrak{D}(u,a) - '\mathfrak{S}(u,a) = \frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{snc} a}.u, \\ '\mathfrak{D}(u,a) - '\mathfrak{C}(u,a) = k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{snc} a.u. \end{cases}$$

Setzt man in den Formeln (4.) $K - a$ für a, so lassen sie sich also darstellen:

$$7.\quad \begin{cases} '\mathfrak{S}(u,K-a) = \int_0 \frac{\operatorname{dn} a}{\operatorname{tn} a}.\frac{\operatorname{sn}^2 u.\partial u}{\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2 u}, \\ '\mathfrak{C}(u,K-a) = \int_0 \frac{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a.\partial u}{\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2 u}, \\ '\mathfrak{D}(u,K-a) = \int_0 \frac{\operatorname{sn} a \operatorname{snc} a.\operatorname{dn}^2 u.\partial u}{\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2 u}. \end{cases}$$

§. 122.

Kennzeichen bei Bestimmung der Classe, zu welcher ein Modular-Integral der zweiten Art gehört.

Ein Modular-Integral hat immer eine von den vier Formen:
$\int \frac{A \operatorname{sn}^2 u.\partial u}{1+n\operatorname{sn}^2 u}$, $\int \frac{A \operatorname{cn}^2 u.\partial u}{1+n\operatorname{sn}^2 u}$, $\int \frac{A \operatorname{dn}^2 u.\partial u}{1+n\operatorname{sn}^2 u}$, $\int \frac{A\,\partial u}{1+n\operatorname{sn}^2 u}$, wenn man unter A und n constante Coefficienten vorstellt. Die Classe, zu welcher ein solches Integral gehört, mufs lediglich nach dem Nenner $1 + n\operatorname{sn}^2 u$, oder nach dem Coefficienten n bestimmt werden. Sieht man auf die verschiedenen Werthe von n in den zwölf Integralen der zweiten Art, so überzeugt man sich, dafs die Zahl n

entweder zwischen den Grenzen $\frac{1}{0}$ und 0 enthalten und also positiv ist,
oder zwischen den Grenzen 0 und $-k^2$, also negativ,
oder zwischen den Grenzen $-k^2$ und -1, also negativ,
oder zwischen den Grenzen -1 und $-\frac{1}{0}$, also negativ ist,

wenn man die Zahl n allmälig abnehmen läfst. Diese vier verschiedenen Werthe von n beziehen sich der Reihe nach gerade auf die vier Classen

der Modular-Integrale der zweiten Art, in der Anordnung, in welcher dieselben in §. 117. aufgeführt worden sind. Zu den Integralen

der **ersten** Classe rechnen wir $S(u,a)$, $C(u,a)$ und $D(u,a)$, welche von *cyklischer Art* sind, weil in ihnen $n = k^2\,\mathfrak{S}\mathrm{n}^2 a = k^2\,\mathrm{tn}'^2 a$, und also zwischen den Grenzen $\frac{1}{0}$ und 0 enthalten ist.

Zu der **zweiten** Classe rechnen wir $\mathfrak{S}(u,a)$, $\mathfrak{C}(u,a)$ und $\mathfrak{D}(u,a)$, welche von *hyperbolischer Art* sind, weil in ihnen $n = -k^2\,\mathrm{sn}^2 a$ und also zwischen den Grenzen 0 und $-k^2$ enthalten ist.

Zu der **dritten** Classe rechnen wir $'S(u,a)$, $'C(u,a)$ und $'D(u,a)$, welche von *cyklischer Art* sind, weil in ihnen $n = -\mathrm{dn}'^2 a$, und also zwischen den Grenzen $-k^2$ und -1 enthalten ist.

Zu der **vierten** Classe endlich rechnen wir die Integrale $'\mathfrak{S}(u,a)$, $'\mathfrak{C}(u,a)$ und $'\mathfrak{D}(u,a)$, welche von *hyperbolischer Art* sind, weil in ihnen $n = -\mathfrak{D}\mathrm{n}'^2 a = \frac{-1}{\mathrm{snc}^2 a} = -(1 + k'^2\,\mathrm{tn}^2 a)$ und also zwischen den Grenzen -1 und $-\frac{1}{0}$ enthalten ist.

Hieraus ersieht man also, daſs die in §. 117. angegebene Reihefolge der Classen der Modular-Integrale der zweiten Art keine willkürliche ist.

§. 123.

Die Modular-Integrale der ersten und zweiten Classe mit dem Modul $\frac{1}{k}$ zurückgeführt auf solche Integrale mit dem Modul k.

Setzen wir in dem Modular-Integrale $\mathfrak{S}(u,a) = \int_0 \frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}^2 u\,.\,\partial u}{1 - k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u}$ der zweiten Classe ka für a, ku für u und $\frac{1}{k}$ statt des Moduls k, also auch $k\,.\,\partial u$ für u, so verwandelt sich nach §. 30. der Zähler $k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}^2 u\,.\,\partial u$ in $\frac{1}{k^2}\,.\,k\,\mathrm{sn}\,a\,.\,\mathrm{dn}\,a\,.\,\mathrm{cn}\,a\,.\,k^2\,\mathrm{sn}^2 u\,.\,k\,\partial u = k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,.\,\mathrm{sn}^2 u\,.\,\partial u$, und da der Nenner $1 - k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u$ ebenfalls ungeändert bleibt, so ist

$$1.\quad \mathfrak{S}\left(ku, ka, \frac{1}{k}\right) = \mathfrak{S}(u,a).$$

Wenn man in den Formeln $\mathfrak{C}(u,a) = \int_0 \frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cn}^2 u\,.\,\partial u}{\mathrm{dn}\,a\,(1 - k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u)}$ und $\mathfrak{D}(u,a) = \int_0 \frac{\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,.\,\mathrm{dn}^2 u\,.\,\partial u}{1 - k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u}$ dieselben Abänderungen macht, so verwandelt sich der Zähler $\frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cn}^2 u\,.\,\partial u}{\mathrm{dn}\,a}$ in $\frac{1}{k^2}\,.\,\frac{k\,\mathrm{sn}\,a\,.\,\mathrm{dn}\,a\,.\,\mathrm{dn}^2 u\,.\,k\,\partial u}{\mathrm{cn}\,a} =$ $\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}^2 u\,.\,\partial u$ und der Zähler $\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,.\,\mathrm{dn}^2 u\,.\,\partial u$ in $k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a\,.\,\mathrm{cn}^2 u\,.\,\partial u$;

daher erhält man

$$2.\quad \mathfrak{C}\left(ku, ka, \frac{1}{k}\right) = \mathfrak{D}(u, a),$$

$$3.\quad \mathfrak{D}\left(ku, ka, \frac{1}{k}\right) = \mathfrak{C}(u, a).$$

Setzt man in den vorstehenden Gleichungen noch ai für a und wendet die Formeln (1.) des §. 117. an, so verwandeln sie sich sofort in

$$4.\quad S\left(ku, ka, \frac{1}{k}\right) = S(u, a),$$

$$5.\quad C\left(ku, ka, \frac{1}{k}\right) = D(u, a),$$

$$6.\quad D\left(ku, ka, \frac{1}{k}\right) = C(u, a).$$

Zusatz. Die vorigen Formeln können auch wie folgt bewiesen werden. Da nach §. 81.

$$\mathrm{lm}\left(ku + ka, \frac{1}{k}\right) = \mathrm{lm}(u+a) - \frac{k'^2}{2}.(u+a)^2 \text{ und}$$

$$\mathrm{lm}\left(ku - ka, \frac{1}{k}\right) = \mathrm{lm}(u-a) - \frac{k'^2}{2}.(u-a)^2 \text{ ist, so ist auch}$$

$$\frac{\mathrm{lm}\left(ku+ka, \frac{1}{k}\right) - \mathrm{lm}\left(ku-ka, \frac{1}{k}\right)}{2} = \frac{\mathrm{lm}(u+a) - \mathrm{lm}(u-a)}{2} - k'^2.au.$$

Ferner ist $\mathrm{el}\left(ka, \frac{1}{k}\right) = \frac{\mathrm{el}\, a - k'^2.a}{k}$; also verwandelt sich $u.\mathrm{el}\, a$ in $u.\mathrm{el}\, a - k'^2.au$ und folglich $u.\mathrm{el}\, a - \frac{\mathrm{lm}(a+u) - \mathrm{lm}(a-u)}{2}$ wieder in $u.\mathrm{el}\, a - \frac{\mathrm{lm}(a+u) - \mathrm{lm}(a-u)}{2}$, d. h. es verwandelt sich $\mathfrak{S}(u, a)$ wieder in $\mathfrak{S}(u, a)$, wenn ka für a, ku für u und $\frac{1}{k}$ statt des Moduls k gesetzt wird.

§. 124.

Die Modular-Integrale der ersten und zweiten Classe, mit dem Modul $\frac{ik}{k'}$, zurückgeführt auf solche Integrale mit dem Modul k.

Setzen wir in dem Integrale $\mathfrak{S}(u, a)$ an die Stelle von u, $k'(K-u)$, und $k'a$ für a, wie auch $\frac{ik}{k'}$ statt des Moduls k, so verwandelt sich $\mathfrak{S}(u, a)$ in $\mathfrak{S}\left(k'(K-u), k'a, \frac{ik}{k'}\right)$. Dabei verwandelt sich ∂u in $-k'\partial u$ und überhaupt der Zähler $k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn}^2 u.\partial u$ in

$$\frac{k^2}{k'^2}.\operatorname{cnc} a.\operatorname{snc} a.\frac{1}{\operatorname{dn} a}.\operatorname{cn}^2 u.k'\partial u = \frac{k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{snc} a \operatorname{cn}^2 u.\partial u}{\operatorname{dn}^2 a}.$$

Der Nenner $1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u$ verwandelt sich in

$$1+\frac{k^2}{k'^2}.\mathrm{cnc}^2 a.\mathrm{cn}^2 u=\frac{\mathrm{dn}^2 a+k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{cn}^2 u}{\mathrm{dn}^2 a}=\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{dn}^2 a};$$

folglich ist

$$\mathfrak{S}\left(k'(K-u),k'a,\frac{ik}{k'}\right)=\text{const.}+\mathfrak{C}(u,a).$$

Setzt man, um die Constante zu bestimmen, $u=K$, so erhält man const. $=-\mathfrak{C}(K,a)$, und also

$$1.\quad \mathfrak{S}\left[k'(K-u),k'a,\frac{ik}{k'}\right]=-\mathfrak{C}(K,a)+\mathfrak{C}(u,a),$$

in welcher Formel nun auch noch für $\mathfrak{C}(K,a)$ der in §. 121. hergeleitete Werth substituirt werden kann. Eben so findet man umgekehrt

$$2.\quad \mathfrak{C}\left[k'(K-u),k'a,\frac{ik}{k'}\right]=-\mathfrak{S}(K,a)+\mathfrak{S}(u,a).$$

Der Zähler $\mathrm{tn}\,a.\mathrm{dn}\,a.\mathrm{dn}^2 u.\partial u$ von $\mathfrak{D}(u,a)$ verwandelt sich in

$$k'\,\mathrm{tn}\,a.\frac{1}{\mathrm{dn}\,a}.\frac{\mathrm{dn}^2 u}{k'^2}.(-k'\partial u)=\frac{-\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,a.\mathrm{dn}^2 u.\partial u}{\mathrm{dn}^2 a},$$

und da sich der Nenner $1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u$ in $\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{dn}^2 a}$ verwandelt, so erhalten wir

$$3.\quad \mathfrak{D}\left[k'(K-u),k'a,\frac{ik}{k'}\right]=\mathfrak{D}(K,a)-\mathfrak{D}(u,a),$$

indem für $u=K$ der Ausdruck verschwinden soll.

Setzen wir in den entwickelten drei Formeln ai für a, so verwandeln sie sich in

$$4.\quad S\left[k'(K-u),k'a,\frac{ik}{k'}\right]=-C(K,a)+C(u,a),$$

$$5.\quad C\left[k'(K-u),k'a,\frac{ik}{k'}\right]=-S(K,a)+S(u,a).$$

$$6.\quad D\left[k'(K-u),k'a,\frac{ik}{k'}\right]=\;D(K,a)-D(u,a).$$

Die Formeln (1.), (2.), (3.) bieten den bemerkenswerthen Umstand dar, dafs sie noch auf eine zweite und einfachere Weise dargestellt werden können. Setzt man in der Formel (1.) $K-u$ für u, so erhält man

$$\partial\mathfrak{S}\left(k'u,k'a,\frac{ik}{k'}\right)=\partial\mathfrak{C}(K-u,a)=-\frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{cnc}^2 u.\partial u}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{snc}^2 u},$$

und da $\mathrm{cnc}^2 u=\frac{k'^2\,\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{dn}^2 u}$, $\mathrm{snc}^2 u=\frac{\mathrm{cn}^2 u}{\mathrm{dn}^2 u}$ ist, so erhält man zunächst

$$\partial\mathfrak{S}\left(k'u,k'a,\frac{ik}{k'}\right)=-\frac{k^2 k'^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{sn}^2 u.\partial u}{\mathrm{dn}^2 u-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{cn}^2 u}.$$

Da aber

$$\mathrm{dn}^2 u-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{cn}^2 u=1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a-k^2\,\mathrm{cn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u=\mathrm{dn}^2 a(1-k^2\mathrm{snc}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u)$$

ist, so reducirt sich die Formel auf

$$\mathfrak{S}\left(k'u, k'a, \frac{ik}{k'}\right) = -\int_0 \frac{k^2 \operatorname{snc} a \operatorname{cnc} a \operatorname{dnc} a \operatorname{sn}^2 u \,.\, \partial u}{1 - k^2 \operatorname{snc}^2 a \operatorname{sn}^2 u},$$

oder

$$7. \quad \mathfrak{S}\left(k'u, k'a, \frac{ik}{k'}\right) = -\mathfrak{S}(u, K-a).$$

Eben so findet man

$$8. \quad \mathfrak{C}\left(k'u, k'a, \frac{ik}{k'}\right) = -\mathfrak{C}(u, K-a)$$

und

$$\partial\mathfrak{D}\left(k'u, k'a, \frac{ik}{k'}\right) = \frac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a} \cdot \frac{\partial u}{1-k^2 \operatorname{snc}^2 a \operatorname{sn}^2 u}$$

$$= \frac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a} \cdot \partial u + \frac{k^2 \operatorname{snc} a \operatorname{cnc} a \operatorname{dnc} a \operatorname{sn}^2 u \,.\, \partial u}{1 - k^2 \operatorname{snc}^2 a \operatorname{sn}^2 u},$$

oder

$$\mathfrak{D}\left(k'u, k'a, \frac{ik}{k'}\right) = \frac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a} u + \mathfrak{S}(u, K-a),$$

und da $\mathfrak{S}(u, K-a) = \operatorname{tnc} a \operatorname{dnc} a . u - \mathfrak{D}(u, K-a)$ ist, so erhält man

$$\mathfrak{D}\left(k'u, k'a, \frac{ik}{k'}\right) = \frac{u}{\operatorname{sn} a \operatorname{snc} a} - \mathfrak{D}(u, K-a).$$

Vergleicht man diese Resultate mit den früheren, so erhält man die Relationen

$$10. \quad \begin{cases} \mathfrak{C}(K-u, a) + \mathfrak{S}(u, K-a) = \mathfrak{C}(K, a), \\ \mathfrak{S}(K-u, a) + \mathfrak{C}(u, K-a) = \mathfrak{S}(K, a), \\ \mathfrak{D}(K-u, a) - \mathfrak{D}(u, K-a) = \mathfrak{D}(K, a) - \frac{u}{\operatorname{sn} a \operatorname{snc} a}, \end{cases}$$

woraus, wenn $u = K$ gesetzt wird, folgt:

$$11. \quad \begin{cases} \mathfrak{S}(K, K-a) = \mathfrak{C}(K, a), \\ \mathfrak{C}(K, K-a) = \mathfrak{S}(K, a), \\ \mathfrak{D}(K, K-a) = \frac{K}{\operatorname{sn} a \operatorname{snc} a} - \mathfrak{D}(K, a). \end{cases}$$

Die Formeln (10.) können nun auch also dargestellt werden:

$$\mathfrak{C}(K-u, a) + \mathfrak{S}(u, K-a) = \mathfrak{S}(K, K-a),$$
$$\mathfrak{S}(K-u, a) + \mathfrak{C}(u, K-a) = \mathfrak{C}(K, K-a),$$
$$\mathfrak{D}(K-u, a) - \mathfrak{D}(u, K-a) = \frac{K-u}{\operatorname{sn} a \operatorname{snc} a} - \mathfrak{D}(K, K-a),$$

und wird hierin $K-u$ für u, ferner $K-a$ für a gesetzt, so entsteht

$$\mathfrak{C}(u, K-a) + \mathfrak{S}(K-u, a) = \mathfrak{S}(K, a),$$
$$\mathfrak{S}(u, K-a) + \mathfrak{C}(K-u, a) = \mathfrak{C}(K, a),$$
$$\mathfrak{D}(u, K-a) - \mathfrak{D}(K-u, a) = \frac{u}{\operatorname{sn} a \operatorname{snc} a} - \mathfrak{D}(K, a).$$

Diese Formeln stimmen wieder mit den Formeln (10.) überein. Für die Integrale der vierten Classe erhält man leicht die Formeln

$$12.\quad \begin{cases} {}'\mathfrak{S}(K-u, a) = {}'\mathfrak{S}(u, K-a) + \frac{u}{\operatorname{sn} a \operatorname{snc} a} + \text{const.}, \\ {}'\mathfrak{C}(K-u, a) = {}'\mathfrak{D}(u, K-a) + \text{const.}, \\ {}'\mathfrak{D}(K-u, a) = {}'\mathfrak{C}(u, K-a) + \text{const.} \end{cases}$$

§. 125.

Die Modular-Integrale der zweiten und dritten Classe mit den Moduln $\frac{1}{k}$ und $\frac{ik}{k'}$, zurückgeführt auf Integrale mit dem Modul k.

Es ist nach §. 123. $\mathfrak{S}(ui, a) = \mathfrak{S}\left(k'ui, k'a, \frac{1}{k'}\right)$. Da aber $\mathfrak{S}'(ui, a) = -i.{}'S(u, a)$ und aus demselben Grunde auch

$$\mathfrak{S}\left(k'ui, k'a, \frac{1}{k'}\right) = -i.{}'S\left(k'u, k'a, \frac{ik}{k'}\right)$$

ist, so erhalten wir die Gleichung

$$1.\quad {}'S\left(k'u, k'a, \frac{ik}{k'}\right) = {}'S(u, a).$$

Ganz eben so erhält man noch die Gleichungen

$$2.\quad {}'C\left(k'u, k'a, \frac{ik}{k'}\right) = {}'D(u, a),$$

$$3.\quad {}'D\left(k'u, k'a, \frac{ik}{k'}\right) = {}'C(u, a).$$

Setzt man in den drei vorigen Gleichungen ai für a, und beachtet die Formeln (7.) des §. 117., so erhält man noch

$$4.\quad {}'\mathfrak{S}\left(k'u, k'a, \frac{ik}{k'}\right) = {}'\mathfrak{S}(u, a),$$

$$5.\quad \mathfrak{C}'\left(k'u, k'a, \frac{ik}{k'}\right) = {}'\mathfrak{C}(u, a),$$

$$6.\quad {}'\mathfrak{D}\left(k'u, k'a, \frac{ik}{k'}\right) = {}'\mathfrak{D}(u, a).$$

Setzt man in den Gleichungen (1.), (2.), (3.) des §. 124. jetzt $K-ui$ für u, so verwandeln sie sich zunächst in

$$\mathfrak{S}\left(k'ui, k'a, \frac{ik}{k'}\right) = -\mathfrak{C}(K, a) + \mathfrak{C}(K-ui, a),$$

$$\mathfrak{C}\left(k'ui, k'a, \frac{ik}{k'}\right) = -\mathfrak{S}(K, a) + \mathfrak{S}(K-ui, a),$$

$$\mathfrak{D}\left(k'ui, k'a, \frac{ik}{k'}\right) = \mathfrak{D}(K, a) - \mathfrak{D}(K-ui, a).$$

Beachtet man nun, daſs $-i(u+iK) = K-ui$ ist, und vertauscht den

Modul k mit dem conjugirten k', also auch K mit K', so giebt die Anwendung der Formeln (3.) des §. 117. auf der Stelle

$$'S\left(ku, ka, \frac{1}{k}\right) = 'C(u+iK', a) - i.\,\mathfrak{C}'(K', a),$$

$$'C\left(ku, ka, \frac{1}{k}\right) = 'S(u+iK', a) + i.\,\mathfrak{S}'(K', a),$$

$$'D\left(ku, ka, \frac{1}{k}\right) = 'D(u+iK', a) - i.\,\mathfrak{D}'(K', a),$$

und diese Formeln können auch also dargestellt werden:

$$7.\quad 'S\left(ku, ka, \frac{1}{k}\right) = 'C(u+iK', a) - 'C(iK', a),$$

$$8.\quad 'C\left(ku, ka, \frac{1}{k}\right) = 'S(u+iK', a) - 'S(iK', a),$$

$$9.\quad 'D\left(ku, ka, \frac{1}{k}\right) = 'D(u+iK', a) - 'D(iK', a).$$

Setzt man in den vorstehenden Formeln noch ai für a, so werden sie

$$10.\quad '\mathfrak{S}\left(ku, ka, \frac{1}{k}\right) = '\mathfrak{C}(u+iK', a) - '\mathfrak{C}(iK', a),$$

$$11.\quad '\mathfrak{C}\left(ku, ka, \frac{1}{k}\right) = '\mathfrak{S}(u+iK', a) - '\mathfrak{S}(iK', a),$$

$$12.\quad '\mathfrak{D}\left(ku, ka, \frac{1}{k}\right) = '\mathfrak{D}(u+iK', a) - '\mathfrak{D}(iK', a).$$

Wendet man die Lehrsätze des §. 30. auf die Formeln (4.) des §. 121. an, so erhält man die folgenden Formeln:

$$13.\quad '\mathfrak{S}\left(ku, ka, \frac{1}{k}\right) = -\mathfrak{S}(u, K-a),$$

$$14.\quad '\mathfrak{C}\left(ku, ka, \frac{1}{k}\right) = \mathfrak{D}(u, K-a)\frac{a}{\operatorname{sn} a \operatorname{snc} a},$$

$$15.\quad '\mathfrak{D}\left(ku, ka, \frac{1}{k}\right) = \mathfrak{C}(u, K-a).$$

Vertauscht man in den Formeln (7 — 9.) des §. 124. k mit k', so hat man

$$\mathfrak{S}\left(ku, ka, \frac{ik'}{k}\right) = -\mathfrak{S}'(u, K'-a);\quad \mathfrak{C}\left(ku, ka, \frac{ik'}{k}\right) = -\mathfrak{C}'(u, K'-a) \text{ und}$$

$$\mathfrak{D}\left(ku, ka, \frac{ik'}{k}\right) = \frac{u}{\operatorname{sn}' a \operatorname{snc}' a} - \mathfrak{D}'(u, K'-a),$$

und setzt man hierin ui für u, so verwandeln sie sich sofort in

$$16.\quad 'S\left(ku, ka, \frac{1}{k}\right) = -'S(u, K'-a),$$

$$17.\quad 'C\left(ku, ka, \frac{1}{k}\right) = -'C(u, K'-a),$$

$$18.\quad 'D\left(ku, ka, \frac{1}{k}\right) = \frac{u}{\operatorname{sn}' a \operatorname{snc}' a} - 'D(u, K'-a).$$

Zusatz. Auf ähnliche Art erhält man aus den Formeln (13—15.) noch

$$19.\quad S\left(k'u, k'a, \frac{ik}{k'}\right) = -{}'S(u, K'-a),$$

$$20.\quad C\left(k'u, k'a, \frac{ik}{k'}\right) = {}'D(u, K'-a) - \frac{u}{\operatorname{sn} a \operatorname{snc} a},$$

$$21.\quad D\left(k'u, k'a, \frac{ik}{k'}\right) = {}'C(u, K'-a).$$

und vergleicht man diese Resultate mit den in §. 124. gefundenen, so hat man noch

$$22.\quad \begin{cases} {}'C(u, K'-a) + D(K-u, a) = D(K, a), \\ {}'S(u, K'-a) + C(K-u, a) = C(K, a), \\ {}'D(u, K'-a) - S(K-u, a) = \dfrac{u}{\operatorname{sn}' a \operatorname{snc}' a} - S(K, a), \end{cases}$$

und also dieselben Formeln, wie im §. 120.

§. 126.

Die auf das Argument $K-u$ bezogenen Integrale aller vier Classen zurückgeführt auf Integrale des Argumentes u.

Es ist nach §. 73. $\operatorname{lm}(a+K-u) = \operatorname{lm}(K-(u-a)) = \frac{EK}{2} + \operatorname{lm}(u-a) + \log\left(\frac{\operatorname{dn}(u-a)}{\sqrt{k'}}\right) - E(u-a)$, und eben so ist $\operatorname{lm}(a+u-K) = \operatorname{lm}(K-(a+u)) = \frac{EK}{2} + \operatorname{lm}(u+a) + \log\left(\frac{\operatorname{dn}(u+a)}{\sqrt{k'}}\right) - E(u+a)$. Wird also die zweite Gleichung von der ersten subtrahirt, so erhält man $\frac{\operatorname{lm}(a+K-u) - \operatorname{lm}(a+u-K)}{2} = \log\sqrt{\frac{\operatorname{dn}(u-a)}{\operatorname{dn}(u+a)}} + E.a - \frac{\operatorname{lm}(u+a) - \operatorname{lm}(u-a)}{2}$.

Setzt man aber in der Formel $\mathfrak{S}(u, a) = u.\operatorname{el} a - \frac{\operatorname{lm}(a+u) - \operatorname{lm}(a-u)}{2}$ für u an die Stelle $K-u$, so erhält man

$\mathfrak{S}(K-u, a) = (K-u)\operatorname{el} a - \frac{\operatorname{lm}(a+K-u) - \operatorname{lm}(a+u-K)}{2}$; daher ist

$$\mathfrak{S}(K-u, a) = (K-u)\operatorname{el} a + \frac{\operatorname{lm}(u+a) - \operatorname{lm}(u-a)}{2} - \log\sqrt{\frac{\operatorname{dn}(u-a)}{\operatorname{dn}(u+a)}} - Ea,$$

also

$$\mathfrak{S}(K-u, a) + \mathfrak{S}(u, a) = K.\operatorname{el} a - E.a - \log\sqrt{\frac{\operatorname{dn}(u-a)}{\operatorname{dn}(u+a)}}.$$

Da ferner

$$\log\sqrt{\frac{\operatorname{dn}(u-a)}{\operatorname{dn}(u+a)}} = \mathfrak{Arc\,Tang}\,(k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{snc} a \operatorname{sn} u \operatorname{snc} u)$$
$$= \tfrac{1}{2}\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\operatorname{sn} 2u}{\operatorname{sn} 2a}\right) - \tfrac{1}{2}\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\operatorname{cnc} 2u}{\operatorname{cnc} 2a}\right)$$

ist, nach §. 37., so kann der eine oder auch der andere Werth noch in der vorigen Formel substituirt werden.

Da $\mathfrak{S}(K, a) = K.\mathrm{el}\,a - E.a$ ist, so kann die vorige Formel einfacher also dargestellt werden:

$$\mathfrak{S}(K-u, a) + \mathfrak{S}(u, a) = \mathfrak{S}(K, a) - \log \sqrt{\frac{\mathrm{dn}(u-a)}{\mathrm{dn}(u+a)}}.$$

Da

$$\mathfrak{C}(u, a) = k^2 \,\mathrm{sn}\, a \,\mathrm{snc}\, a . u - \mathfrak{S}(u, a),$$
$$\mathfrak{C}(K-u, a) = k^2 \,\mathrm{sn}\, a \,\mathrm{snc}\, a . (K-u) - \mathfrak{S}(K-u, a) \text{ und}$$
$$\mathfrak{C}(K, a) = k^2 \,\mathrm{sn}\, a \,\mathrm{snc}\, a . K - \mathfrak{S}(K, a)$$

ist, so ist

$$\mathfrak{C}(u, a) + \mathfrak{C}(K-u, a) - \mathfrak{C}(K, a) = -\mathfrak{S}(K-u, a) - \mathfrak{S}(u, a) + \mathfrak{S}(K, a),$$

folglich

$$2. \quad \mathfrak{C}(K-u, a) + \mathfrak{C}(u, a) = \mathfrak{C}(K, a) + \log \sqrt{\frac{\mathrm{dn}(u-a)}{\mathrm{dn}(u+a)}} \text{ und}$$

$$3. \quad \mathfrak{D}(K-u, a) + \mathfrak{D}(u, a) = \mathfrak{D}(K, a) + \log \sqrt{\frac{\mathrm{dn}(u-a)}{\mathrm{dn}(u+a)}}.$$

Setzt man in den vorstehenden drei Formeln ai für a, und läſst den Factor i auf beiden Seiten weg, so erhält man noch

$$4. \quad S(K-u, a) + S(u, a) = S(K, a) - \varphi,$$
$$5. \quad C(K-u, a) + C(u, a) = C(K, a) + \varphi,$$
$$6. \quad D(K-u, a) + D(u, a) = D(K, a) + \varphi,$$

wenn der Kürze wegen gesetzt wird

$$\varphi = \mathrm{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{dnc}'a}{\mathrm{tnc}'a} . \mathrm{sn}\, u \,\mathrm{snc}\, u\right) = \tfrac{1}{2} \mathrm{arc\,tang}\left(\frac{k \,\mathrm{cnc}\, 2u}{k' \,\mathrm{cnc}' 2a}\right) - \tfrac{1}{2} \mathrm{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{sn}\, 2u}{\mathrm{tn}' 2a}\right).$$

Nach §. 77. ist

$$\mathrm{lm}'(a - ui + iK)$$
$$= \frac{EK-K^2}{2} + \mathrm{lm}'(a-ui) + \log(\mathrm{sn}'(a-ui).\sqrt{k'}) + i((K-E)(a-ui) + \tfrac{1}{2}\pi)$$

und

$$\mathrm{lm}'(a + ui - iK)$$
$$= \frac{EK-K^2}{2} + \mathrm{lm}'(a+ui) + \log(\mathrm{sn}'(a+ui).\sqrt{k'}) - i((K-E)(a+ui) + \tfrac{1}{2}\pi),$$

woraus folgt

$$\frac{\mathrm{lm}'(a-ui+iK) - \mathrm{lm}'(a+ui-iK)}{2i}$$
$$= -\frac{\mathrm{lm}'(a+ui) - \mathrm{lm}'(a-ui)}{2i} + \frac{1}{i} \log \sqrt{\frac{\mathrm{sn}'(a-ui)}{\mathrm{sn}'(a+ui)}} + (K-E)a + \tfrac{1}{2}\pi.$$

Da nun aber

$$'S(u,a) = -\quad u\,.\,\mathrm{el}'a + \frac{\mathrm{lm}'(a+ui) - \mathrm{lm}'(a-ui)}{2i} \quad \text{und}$$

$$'S(K-u,a) = -(K-u)\,\mathrm{el}'a + \frac{\mathrm{lm}'(a-ui+iK) - \mathrm{lm}'(a+ui-iK)}{2i}$$

ist, so erhält man durch die Addition dieser beiden Gleichungen

$$'S(K-u,a) + 'S(u,a) = -K.\mathrm{el}'a + (K-E)a + \tfrac{1}{2}\pi - \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\mathrm{sn}'(a+ui)}{\mathrm{sn}'(a-ui)}}$$

oder

$$7.\quad 'S(K-u,a) + 'S(u,a) = 'S(K,a) - \psi,$$

wenn man setzt:

$$\psi = \quad \mathrm{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{dn}'a}{\mathrm{tn}'a}.\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u\right) \quad \text{oder}$$

$$\psi = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{sn}\,2u}{\mathrm{tn}'2a}\right) + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{k\,\mathrm{cnc}\,2u}{k'\,\mathrm{cnc}'2a}\right).$$

Da $'C(u,a) = 'S(u,a) + k'^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a.u$ ist, so leitet man hieraus

$$'C(K-u,a) + 'C(u,a) - 'C(K,a) = 'S(K-u,a) + 'S(u,a) - 'S(K,a)$$

her und es ist also

$$8.\quad 'C(K-u,a) + 'C(u,a) = 'C(K,a) - \psi, \quad \text{wie auch}$$

$$9.\quad 'D(K-u,a) + 'D(u,a) = 'D(K,a) - \psi,$$

wenn in diesen beiden Formeln ψ denselben Werth hat, welchen es in der Gleichung (7.) hat. Setzt man in diesen Formeln ai für a, so erhält man noch

$$'\mathfrak{S}(K-u,a) + '\mathfrak{S}(u,a) = '\mathfrak{S}(K,a) + \log\sqrt{\frac{\mathrm{tn}(a+u)}{\mathrm{tn}(a-u)}},$$

$$'\mathfrak{C}(K-u,a) + '\mathfrak{C}(u,a) = '\mathfrak{C}(K,a) + \log\sqrt{\frac{\mathrm{tn}(a+u)}{\mathrm{tn}(a-u)}},$$

$$'\mathfrak{D}(K-u,a) + '\mathfrak{D}(u,a) = '\mathfrak{D}(K,a) + \log\sqrt{\frac{\mathrm{tn}(a+u)}{\mathrm{tn}(a-u)}},$$

in welchen Formeln aber $'\mathfrak{S}(K,a)$, $'\mathfrak{C}(K,a)$ und $'\mathfrak{D}(K,a)$ imaginär sind.

Der imaginäre Theil dieser Ausdrücke ist $-\frac{\pi i}{2} = \log\frac{1}{\sqrt{-1}}$; substituirt man aber die Werthe

$$'\mathfrak{S}(K,a) = (K-E)a - K.\mathfrak{El}'a + \log\frac{1}{\sqrt{-1}},$$

$$'\mathfrak{C}(K,a) = (K-E)a - K(a + \mathrm{elc}\,a - E) + \log\frac{1}{\sqrt{-1}}$$

$$= K(E - \mathrm{elc}\,a) - E.a + \log\frac{1}{i},$$

$$'\mathfrak{D}(K,a) = (K-E)a - K(a - \mathrm{el}\,a) + \log\frac{1}{\sqrt{-1}}$$

$$= K.\mathrm{elc}\,a - E.a + \log\frac{1}{i},$$

so erhält man die Formeln

$$10. \quad '\mathfrak{S}(K-u, a) + '\mathfrak{S}(u, a) = (K-E)\, a - K.\mathfrak{El}'a + \log \sqrt{\frac{\text{tn}(u+a)}{\text{tn}(u-a)}},$$

$$11. \quad '\mathfrak{C}(K-u, a) + '\mathfrak{C}(u, a) = K(E - \text{elc}\, a) - E.a + \log \sqrt{\frac{\text{tn}(u+a)}{\text{tn}(u-a)}},$$

$$12. \quad '\mathfrak{D}(K-u, a) + '\mathfrak{D}(u, a) = K.\, \text{el}\, a - E.a + \log \sqrt{\frac{\text{tn}(u+a)}{\text{tn}(u-a)}},$$

welche gleichwohl reell sind, wenn nur $u > a$ und $u + a < K$ ist.

§. 127.

Die auf das Argument $u + iK'$ bezogenen Modular-Integrale der zweiten Art.

Vertauscht man in der Formel

$$'\mathfrak{S}(K-u, a) + '\mathfrak{S}(u, a) = '\mathfrak{S}(K, a) + \log \sqrt{\frac{\text{tn}(a+u)}{\text{tn}(a-u)}}$$

die beiden conjugirten Modul und setzt ferner ai für a und ui für u, so verwandelt sie sich zunächst in

$$'\mathfrak{S}'(K'-ui, ai) + '\mathfrak{S}'(ui, ai) = i.'S'(K', a) + \log \sqrt{\frac{\text{sn}(a+u)}{\text{sn}(a-u)}}.$$

Da aber $-i(u+iK') = K'-ui$, also $'\mathfrak{S}'(K'-ui, ai) = -\mathfrak{S}(u+iK', a)$ und $'\mathfrak{S}'(ui, ai) = \mathfrak{S}(u, a)$ ist, so erhält man

$$\mathfrak{S}(u+iK', a) = \mathfrak{S}(u, a) - \log \sqrt{\frac{\text{sn}(a+u)}{\text{sn}(a-u)}} - i.'S'(K', a) \quad \text{oder}$$

$$1. \quad \mathfrak{S}(u+iK', a) = \mathfrak{S}(u, a) - \log \sqrt{\frac{\text{sn}(a+u)}{\text{sn}(a-u)}} + \mathfrak{S}(iK, a).$$

Eben so findet man noch die beiden Formeln

$$2. \quad \mathfrak{C}(u+iK', a) = \mathfrak{C}(u, a) + \log \sqrt{\frac{\text{sn}(a+u)}{\text{sn}(a-u)}} + \mathfrak{C}(iK', a),$$

$$3. \quad \mathfrak{D}(u+iK', a) = \mathfrak{D}(u, a) + \log \sqrt{\frac{\text{sn}(a+u)}{\text{sn}(a-u)}} + \mathfrak{D}(iK', a).$$

Durch dasselbe Verfahren, ohne aber zugleich ai für a zu setzen, erhält man

$$S(u+iK', a) = S(u, a) + \frac{1}{i} \log \sqrt{\frac{\text{tn}'(a+ui)}{\text{tn}'(a-ui)}} - i'\mathfrak{S}'(K', a),$$

und diese Gleichung läſst sich also darstellen:

$$4. \quad S(u+iK', a) = S(u, a) + \text{arc tang}\left(\frac{1}{\text{sn}'a\ \text{snc}'a} \cdot \frac{\text{tn}\, u}{\text{dn}\, u}\right) + S(iK', a).$$

Ganz eben so erhält man noch

$$5. \quad C(u+iK', a) = C(u, a) - \text{arc tang}\left(\frac{1}{\text{sn}'a\ \text{snc}'a} \cdot \frac{\text{tn}\, u}{\text{dn}\, u}\right) + C(iK', a),$$

$$6. \quad D(u+iK', a) = D(u, a) - \text{arc tang}\left(\frac{1}{\text{sn}'a\ \text{snc}'a} \cdot \frac{\text{tn}\, u}{\text{dn}\, u}\right) + D(iK', a).$$

Setzt man in den Formeln (1.), (2.), (3.) des §. 126. ai für a, ui für u und k' für k, so verwandelt sich $\frac{\mathrm{dn}(u-a)}{\mathrm{dn}(u+a)}$ in $\frac{\mathrm{snc}(u+a)}{\mathrm{snc}(u-a)}$, und den Formeln (11.) des §. 117. gemäfs erhalten wir nun

$$7.\quad '\mathfrak{S}(u+iK',a) = '\mathfrak{S}(u,a) - \log\sqrt{\frac{\mathrm{snc}(u-a)}{\mathrm{snc}(u+a)}} + '\mathfrak{S}(iK',a),$$

$$8.\quad '\mathfrak{C}(u+iK',a) = '\mathfrak{C}(u,a) - \log\sqrt{\frac{\mathrm{snc}(u-a)}{\mathrm{snc}(u+a)}} + '\mathfrak{C}(iK',a),$$

$$9.\quad '\mathfrak{D}(u+iK',a) = '\mathfrak{D}(u,a) - \log\sqrt{\frac{\mathrm{snc}(u-a)}{\mathrm{snc}(u+a)}} + '\mathfrak{D}(iK',a).$$

Da

$$\log\sqrt{\frac{\mathrm{sn}(u+a)}{\mathrm{sn}(u-a)}} = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{cnc}\,a}{\mathrm{cn}\,a}\cdot\frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{cnc}\,u}\right),$$

also

$$\log\sqrt{\frac{\mathrm{snc}(u-a)}{\mathrm{snc}(u+a)}} = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{cnc}\,a}{\mathrm{cn}\,a}\cdot\frac{\mathrm{cnc}\,u}{\mathrm{cn}\,u}\right)$$

ist, so ist auch

$$\frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\mathrm{snc}(u-ai)}{\mathrm{snc}(u+ai)}} = \mathrm{arc\,tang}\left(\frac{k'}{k}\,\mathrm{cnc}'a\,\mathrm{cn}'a\,\frac{\mathrm{cnc}\,u}{\mathrm{cn}\,u}\right).$$

Setzt man also in den vorigen Gleichungen ai für a, so erhält man die folgenden:

$$10.\quad 'S(u+iK',a) = 'S(u,a) - \mathrm{arc\,tang}\left(\frac{k'}{k}\,\mathrm{cnc}'a\,\mathrm{cn}'a\,\frac{\mathrm{cnc}\,u}{\mathrm{cn}\,u}\right) + 'S(iK',a),$$

$$11.\quad 'C(u+iK',a) = 'C(u,a) - \mathrm{arc\,tang}\left(\frac{k'}{k}\,\mathrm{cnc}'a\,\mathrm{cn}'a\,\frac{\mathrm{cnc}\,u}{\mathrm{cn}\,u}\right) + 'C(iK',a),$$

$$12.\quad 'D(u+iK',a) = 'D(u,a) - \mathrm{arc\,tang}\left(\frac{k'}{k}\,\mathrm{cnc}'a\,\mathrm{cn}'a\,\frac{\mathrm{cnc}\,u}{\mathrm{cn}\,u}\right) + 'D(iK',a).$$

Für das Cosinus- und Differente-Integral erhält man nun die Ausdrücke

$$'\mathfrak{C}(u,a) = \left(\frac{k'\cos\alpha'}{\cos\alpha} - '\mathfrak{A}\right).u + '\mathfrak{U}, \qquad '\mathfrak{D}(u,a) = \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} - '\mathfrak{A}\right).u + '\mathfrak{U}.$$

§. 128.

Die auf den Parameter $K-a$ bezogenen Integrale der zweiten Classe, zurückgeführt auf andere mit dem Parameter a.

Nach §. 121. ist $\mathfrak{S}(u,a) = \mathfrak{S}(a,u) + u.\mathrm{el}\,a - a.\mathrm{el}\,u$ und also auch $\mathfrak{S}(u,K-a) = \mathfrak{S}(K-a,u) + u.\mathrm{elc}\,a - (K-a).\mathrm{el}\,u$. Werden diese beiden Gleichungen addirt, so erhält man

$$\mathfrak{S}(a,u) + \mathfrak{S}(a,K-a) = \mathfrak{S}(a,u) + \mathfrak{S}(K-a,u) + u(\mathrm{el}\,a + \mathrm{elc}\,a) - K.\mathrm{el}\,u.$$

Da nun nach §. 126. $\mathfrak{S}(a,u) + \mathfrak{S}(K-a,u) = \mathfrak{S}(K,u) - \log\sqrt{\frac{\mathrm{dn}(a-u)}{\mathrm{dn}(a+u)}}$ $= K.\mathrm{el}\,u - E.u - \log\sqrt{\frac{\mathrm{dn}(a-u)}{\mathrm{dn}(a+u)}}$ ist, so entsteht

$$\mathfrak{S}(u,a)+\mathfrak{S}(u,K-a) = u(\mathrm{el}\,a+\mathrm{elc}\,a)-\log\sqrt{\frac{\mathrm{dn}(a-u)}{\mathrm{dn}(a+u)}}-E.u.$$

Da ferner nach §. 66. $\mathrm{el}\,a+\mathrm{elc}\,a = E+k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a$ ist, so reducirt sich die Formel noch auf

$$1.\quad\left\{\begin{aligned}
&\mathfrak{S}(u,a)+\mathfrak{S}(u,K-a)\\
&= (k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a).u-\log\sqrt{\frac{\mathrm{dn}(a-u)}{\mathrm{dn}(a+u)}},\ \text{oder}\\
&\mathfrak{S}(u,a)+\mathfrak{S}(u,K-a)\\
&= (k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a).u-\mathfrak{Arc\,Tang}(k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u),\\
&\mathfrak{S}(u,a)+\mathfrak{S}(u,K-a)\\
&= \frac{k^2.\,\mathrm{sn}\,2a}{1+\mathrm{dn}\,2a}.u-\tfrac{1}{2}\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{sn}\,2u}{\mathrm{sn}\,2a}\right)+\tfrac{1}{2}\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{cnc}\,2u}{\mathrm{cnc}\,2a}\right).
\end{aligned}\right.$$

Da $\mathfrak{S}(u,a)+\mathfrak{E}(u,a)=(k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a).u$ und auch $\mathfrak{S}(u,K-a)+\mathfrak{E}(u,K-a)$ $=(k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a).u$ ist, so erhält man durch Addition

$$\mathfrak{E}(u,a)+\mathfrak{E}(u,K-a)+\mathfrak{S}(u,a)+\mathfrak{S}(u,K-a) = 2(k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a)\,u,$$

und wird hiervon die Gleichung (1.) subtrahirt, so entsteht

$$2.\quad \mathfrak{E}(u,K-a)+\mathfrak{E}(u,a) = (k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a).u+\log\sqrt{\frac{\mathrm{dn}(a-u)}{\mathrm{dn}(a+u)}}.$$

Nach §. 116. ist

$$\mathfrak{D}(u,a)+\mathfrak{D}(u,K-a)+\mathfrak{S}(u,a)+\mathfrak{S}(u,K-a) = (\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,a+\mathrm{tnc}\,a\,\mathrm{dnc}\,a)u,$$

also

$$\begin{aligned}&\mathfrak{D}(u,K-a)+\mathfrak{D}(u,a)\\
&= (\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,a+\mathrm{tnc}\,a\,\mathrm{dnc}\,a-k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a)u+\log\sqrt{\frac{\mathrm{dn}(a-u)}{\mathrm{dn}(a+u)}},\end{aligned}$$

und diese Gleichung reducirt sich auf

$$3.\quad \mathfrak{D}(u,K-a)+\mathfrak{D}(u,a) = \frac{u}{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a}+\log\sqrt{\frac{\mathrm{dn}(a-u)}{\mathrm{dn}(a+u)}}.$$

Stellen wir die in diesen drei Gleichungen vorkommenden Integrale also dar:

$$\mathfrak{S}(u,a)=\int_0\frac{A.\,\mathrm{sn}^2u.\partial u}{1-n.\,\mathrm{sn}^2u}\quad\text{und}\quad\mathfrak{S}(u,K-a)=\int_0\frac{A'.\,\mathrm{sn}^2u.\partial u}{1-n'.\,\mathrm{sn}^2u},$$

$$\mathfrak{E}(u,a)=\int_0\frac{B.\,\mathrm{cn}^2u.\partial u}{1-n.\,\mathrm{sn}^2u}\quad\text{und}\quad\mathfrak{E}(u,K-a)=\int_0\frac{B'.\,\mathrm{cn}^2u.\partial u}{1-n'.\,\mathrm{sn}^2u},$$

$$\mathfrak{D}(u,a)=\int_0\frac{C.\,\mathrm{dn}^2u.\partial u}{1-n.\,\mathrm{sn}^2u}\quad\text{und}\quad\mathfrak{D}(u,K-a)=\int_0\frac{C'.\,\mathrm{dn}^2u.\partial u}{1-n'.\,\mathrm{sn}^2u},$$

so ist, dem §. 116. gemäfs, $n=k^2\,\mathrm{sn}^2a$ und $n'=k^2\,\mathrm{snc}^2a=k^2.\frac{1-\mathrm{sn}^2a}{1-k^2.\,\mathrm{sn}^2a}$, also

$$4.\quad n'=\frac{k^2-n}{1-n}\quad\text{oder}\quad(1-n)(1-n')=k'^2.$$

Ferner ist $A=k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a$ und $A'=k^2\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{cnc}\,a\,\mathrm{dnc}\,a=$ $k^2k'^2.\frac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a}{\mathrm{dn}^3a}$, also $\frac{A'}{A}=\frac{k'^2}{(1-k^2\,\mathrm{sn}^2a)^2}=\frac{k'^2}{(1-n)^2}=\frac{(1-n)(1-n')}{(1-n)^2}$, oder auch

$$5.\quad \frac{A'}{1-n'} = \frac{A}{1-n} = \sqrt{(nn')};\quad A = \sqrt{(n(k^2-n)(1-n))}.$$

Ferner ist $B = k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{snc} a$ und $B' = k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{snc} a$, also

$$6.\quad B' = B = \sqrt{(nn')} = \sqrt{\left(\frac{n(k^2-n)}{1-n}\right)}.$$

Endlich ist $C = \operatorname{tn} a \operatorname{dn} a$ und $C' = \operatorname{tnc} a \operatorname{dnc} a = \frac{1}{\operatorname{tn} a \operatorname{dn} a}$, oder auch

$$7.\quad C.C' = 1,\quad C = \sqrt{\frac{n}{n'}} = \sqrt{\left(\frac{n(1-n)}{k^2-n}\right)}.$$

§. 129.

Die auf den Parameter $K'-a$ bezogenen Integrale der ersten Classe zurückgeführt auf andere mit dem Parameter a.

Addirt man die Gleichungen $S(u,a) = u.\mathfrak{El}\, a - \frac{\operatorname{lm}(u+ai) - \operatorname{lm}(u-ai)}{2i}$.

$S(u,K'-a) = u.\mathfrak{El}(K'-a) - \frac{\operatorname{lm}(u+iK'-ai) - \operatorname{lm}(u+ai-iK')}{2}$, so erhält man eine Relation zwischen den Integralen $S(u,a)$ und $S(u,K'-a)$. Schon in §. 140. kam die Formel

$$\frac{\operatorname{lm}(u-ai+iK') - \operatorname{lm}(u+ai-iK')}{2i} + \frac{\operatorname{lm}(u+ai) - \operatorname{lm}(u-ai)}{2i}$$
$$= (K'-E')u + \tfrac{1}{2}\pi + \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\operatorname{sn}(u-ai)}{\operatorname{sn}(u+ai)}}$$

vor: also ist

$$S(u,K'-a) + S(u,a)$$
$$= u(\mathfrak{El}\, a + \mathfrak{El}(K'-a)) - (K'-E')u - \tfrac{1}{2}\pi - \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\operatorname{sn}(u-ai)}{\operatorname{sn}(u+ai)}}.$$

Da nach §. 67. $\operatorname{el}(ai - iK') = \operatorname{el}(ai) + \frac{\operatorname{dn}(ai)}{\operatorname{tn}(ai)} - i(K'-E')$ oder auch $-\mathfrak{El}(K'-a) = \mathfrak{El}\, a - \frac{\operatorname{dn}' a}{\operatorname{cn}' a \operatorname{sn}' a} - (K'-E')$, also $\mathfrak{El}\, a + \mathfrak{El}(K'-a) = \frac{1}{\operatorname{sn}' a \operatorname{snc}' a} + K' - E'$ ist, so reducirt sich die vorige Gleichung auf

$$S(u,K'-a) + S(u,a) = \frac{u}{\operatorname{sn}' a \operatorname{snc}' a} - \tfrac{1}{2}\pi + \operatorname{arc\,tang}\left(\operatorname{sn}' a \operatorname{snc}' a . \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{tn} u}\right),$$

oder auch auf

$$1.\quad S(u,K'-a) + S(u,a) = \frac{u}{\operatorname{sn}' a \operatorname{snc}' a} - \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{tn} u}{\operatorname{sn}' a \operatorname{snc}' a \operatorname{dn} u}\right).$$

Da nach §. 118.

$$S(u,a) + S(u,K'-a) + C(u,a) + C(u,K'-a) = \left(\frac{k^2 \operatorname{tn}' a}{\operatorname{dn}' a} + \frac{\operatorname{dn}' a}{\operatorname{tn}' a}\right) u$$

ist, so erhält man, wenn hiervon die vorige Gleichung subtrahirt wird,

$$C(u,K'-a) + C(u,a) = \left(\frac{k^2 \operatorname{tn}' a}{\operatorname{dn}' a} + \frac{\operatorname{dn}' a}{\operatorname{tn}' a} - \frac{1}{\operatorname{sn}' a \operatorname{snc}' a}\right) + \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{tn} u}{\operatorname{sn}' a \operatorname{snc}' a \operatorname{dn} u}\right),$$

und diese Gleichung zieht sich zusammen auf

2. $C(u,K'-a)+C(u,a)=-(k'^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a)u+\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a\,\mathrm{dn}\,u}\right)$

oder

$$C(u,K'-a)+D(u,a)=\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a\,\mathrm{dn}\,u}\right).$$

Da $D(u,a)+D(u,K'-a)=C(u,a)+C(u,K'-a)+2(k'^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a).u$ ist, so erhält man

3. $D(u,K'-a)+D(u,a)=(k'^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a)u+\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a\,\mathrm{dn}\,u}\right)$

oder

$$D(u,K'-a)+C(u,a)=\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a\,\mathrm{dn}\,u}\right).$$

Stellen wir die in diesen Gleichungen vorkommenden Integrale also dar:

$$S(u,a)=\int_0\frac{A.\,\mathrm{sn}^2u.\partial u}{1+n\,\mathrm{sn}^2u}\quad\text{und}\quad S(u,K'-a)=\int_0\frac{A'.\,\mathrm{sn}^2u.\partial u}{1+n'\,\mathrm{sn}^2u},$$

$$C(u,a)=\int_0\frac{B.\,\mathrm{cn}^2u.\partial u}{1+n\,\mathrm{sn}^2u}\quad\text{und}\quad C(u,K'-a)=\int_0\frac{B'.\,\mathrm{cn}^2u.\partial u}{1+n'\,\mathrm{sn}^2u},$$

$$D(u,a)=\int_0\frac{C.\,\mathrm{dn}^2u.\partial u}{1+n\,\mathrm{sn}^2u}\quad\text{und}\quad D(u,K'-a)=\int_0\frac{C'.\,\mathrm{dn}^2u.\partial u}{1+n'\,\mathrm{sn}^2u},$$

so ist, dem §. 118. gemäß, $n=k^2\,\mathrm{tnc}'^2a$ und $n'-k^2\,\mathrm{tnc}'^2a$; also ist $nn'=k^4\,\mathrm{tn}'^2a\,\mathrm{tnc}'^2a$, oder auch

$$4.\quad n.n'=k^2.$$

Ferner ist $A=\frac{k^2\,\mathrm{tn}'a\,\mathrm{dn}'a}{\mathrm{cn}'^2a}$ und $A'=\frac{k^2\,\mathrm{tnc}'a\,\mathrm{dnc}'a}{\mathrm{cnc}'^2a}=\frac{\mathrm{cn}'a.\mathrm{dn}'a}{\mathrm{sn}'^3a}$, und da $A=\frac{k^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{dn}'a}{\mathrm{cn}'^3a}$ ist, so ist $\frac{A}{A'}=k^2\,\mathrm{tn}\,a'^4=\frac{n^2}{k^2}=\frac{n^2}{nn'}=\frac{n}{n'}$ oder

$$5.\quad \frac{A'}{n'}=\frac{A}{n}=\sqrt{((1+n)(1+n'))}.$$

Da $B=\frac{k^2.\,\mathrm{tn}'a}{\mathrm{dn}'a}$ und $B'=\frac{k^2.\,\mathrm{tnc}'a}{\mathrm{dnc}'a}=\frac{\mathrm{dn}'a}{\mathrm{tn}'a}$ ist, so ist

$$6.\quad B.B'=k^2=nn'\quad\text{und}\quad B=\sqrt{\frac{n(k^2+n)}{1+n}}=n\sqrt{\frac{1+n'}{1+n}}.$$

Da endlich $C=\mathrm{tn}'a\,\mathrm{dn}'a$, also $C'=\frac{1}{\mathrm{tn}'a\,\mathrm{dn}'a}$ ist, so ist

$$7.\quad C.C'=1\quad\text{und}\quad C=\sqrt{\frac{n(1+n)}{k^2+n}}=\sqrt{\frac{1+n}{1+n'}}.$$

32 *

§. 130.

Die auf den Parameter $K'-a$ bezogenen Integrale der dritten Classe zurückgeführt auf solche Integrale mit dem Parameter a.

Da $\frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\mathrm{dn}'(a-ui)}{\mathrm{dn}'(a+ui)}} = \text{arc tang}\left(k'^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a.\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}\right)$ ist, so verwandeln sich die Formeln (1.), (2.), (3.) des §. 128., wenn man darin die beiden conjugirten Modul mit einander vertauscht und ui für u setzt, in

$$1.\quad 'S(u,K'-a)+'S(u,a)$$
$$=-(k'^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a)u+\text{arc tang}\left(k'^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a.\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}\right),$$
$$2.\quad 'C(u,K'-a)+'C(u,a)$$
$$=\quad(k'^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a)u+\text{arc tang}\left(k'^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a.\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}\right),$$
$$3.\quad 'D(u,K'-a)+'D(u,a)$$
$$=\frac{u}{\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a}+\text{arc tang}\left(k'^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a.\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}\right).$$

Stellen wir die sechs in diesen Formeln vorkommenden Integrale also dar:

$$'S(u,a)=\int_0\frac{A.\mathrm{sn}^2u.\partial u}{1-n.\mathrm{sn}^2u}\quad\text{und}\quad 'S(u,K'-a)=\int_0\frac{A'.\mathrm{sn}^2u.\partial u}{1-n'.\mathrm{sn}^2u},$$
$$'C(u,a)=\int_0\frac{B.\partial u}{1-n.\mathrm{sn}^2u}\quad\text{und}\quad 'C(u,K'-a)=\int_0\frac{B'.\partial u}{1-n'.\mathrm{sn}^2u},$$
$$'D(u,a)=\int_0\frac{C.\mathrm{dn}^2u.\partial u}{1-n.\mathrm{sn}^2u}\quad\text{und}\quad 'D(u,K'-a)=\int_0\frac{C'.\mathrm{dn}^2.\partial u}{1-n'.\mathrm{sn}^2u},$$

so ist nach §. 119. die Zahl $n=\mathrm{dn}'^2a$ und $n'=\mathrm{dnc}'^2a=\frac{k^2}{\mathrm{dn}'^2a}$: also ist

$$4.\quad n.n'=k^2.$$

Ferner ist

$$A=k'^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{cn}'a\,\mathrm{dn}'a\quad\text{und}\quad A'=k'^2\,\mathrm{snc}'a\,\mathrm{cnc}'a\,\mathrm{dnc}'a=\frac{k^2k'^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{cn}'a}{\mathrm{dn}'^3a};$$

also ist

$$\frac{A'}{A}=\frac{k^2}{\mathrm{dn}'^4a}=\frac{nn'}{n^2}=\frac{n'}{n},$$

oder

$$5.\quad\frac{A'}{n'}=\frac{A}{n}=\sqrt{((1-n)(1-n'))}.$$

Es ist $B=k'^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a$ und $B'=k'^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a$, also ist

$$6.\quad B'=B=\sqrt{\frac{(1-n)(n-k^2)}{n}}=\sqrt{((1-n)(1-n'))}.$$

Da $C=\mathrm{tn}'a\,\mathrm{dn}'a$, also $C'=\frac{1}{\mathrm{tn}'a\,\mathrm{dn}'a}$ ist, so ist

$$7.\quad C.C'=1\quad\text{und}\quad C=\sqrt{\frac{n(1-n)}{n-k^2}}=\sqrt{\frac{1-n}{1-n'}}.$$

§. 131.

Die auf den Parameter $K-a$ bezogenen Integrale der vierten Classe zurückgeführt auf andere mit dem Parameter a.

Da $-\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\mathrm{sn}(u-ai)}{\mathrm{sn}(u+ai)}} = \frac{1}{i}\left(\log\sqrt{\frac{\mathrm{sn}(u+ai)}{\mathrm{sn}(u-ai)}} - \frac{\pi i}{2}\right) =$
$\frac{1}{i}\left(\log\sqrt{\frac{\mathrm{sn}(u+ai)}{\mathrm{sn}(u-ai)}} + \log\sqrt{\frac{1}{-1}}\right) = \frac{1}{i}\log\sqrt{\left(\frac{\mathrm{sn}(ai+u)}{\mathrm{sn}(ai-u)}\right)}$ ist, so können die Gleichungen (1.), (2.), (3.) des §. 129. auch also dargestellt werden:

$$S(u, K'-a) + S(u, a) = \frac{u}{\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a} + \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\mathrm{sn}(ai+u)}{\mathrm{sn}(ai-u)}},$$

$$C(a, K'-a) + C(u, a) = -(k'^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a).u - \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\mathrm{sn}(ai+u)}{\mathrm{sn}(ai-u)}},$$

$$D(u, K'-a) + D(u, a) = (k'^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a).u - \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\mathrm{sn}(ai+u)}{\mathrm{sn}(ai-u)}}.$$

Vertauscht man hierin den Modul k mit k' und setzt ui für u, so erhält man

$$1.\quad '\mathfrak{S}(u, K-a) + '\mathfrak{S}(u, a) = -\frac{u}{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a} + \log\sqrt{\frac{\mathrm{tn}(a+u)}{\mathrm{tn}(a-u)}},$$

$$2.\quad '\mathfrak{C}(u, K-a) + '\mathfrak{C}(u, a) = -(k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a).u + \log\sqrt{\frac{\mathrm{tn}(a+u)}{\mathrm{tn}(a-u)}},$$

$$3.\quad '\mathfrak{D}(u, K-a) + '\mathfrak{D}(u, a) = (k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a).u + \log\sqrt{\frac{\mathrm{tn}(a+u)}{\mathrm{tn}(a-u)}}.$$

Stellen wir die sechs in diesen Formeln vorkommenden Integrale wie folgt vor:

$$'\mathfrak{S}(u, a) = \int_0 \frac{A.\mathrm{sn}^2 u.\partial u}{1-n\,\mathrm{sn}^2 u} \quad\text{und}\quad '\mathfrak{S}(u, K-a) = \int_0 \frac{A'.\mathrm{sn}^2 u.\partial u}{1-n'\,\mathrm{sn}^2 u},$$

$$'\mathfrak{C}(u, a) = \int_0 \frac{B.\partial u}{1-n\,\mathrm{sn}^2 u} \quad\text{und}\quad '\mathfrak{C}(u, K-a) = \int_0 \frac{B'.\partial u}{1-n'\,\mathrm{sn}^2 u},$$

$$'\mathfrak{D}(u, a) = \int_0 \frac{C.\mathrm{dn}^2 u.\partial u}{1-n\,\mathrm{sn}^2 u} \quad\text{und}\quad '\mathfrak{D}(u, K-a) = \int_0 \frac{C'.\mathrm{dn}^2 u.\partial u}{1-n'\,\mathrm{sn}^2 u},$$

so ist $n = \frac{1}{\mathrm{snc}^2 a}$ und $n' = \frac{1}{\mathrm{sn}^2 a} = \frac{\mathrm{dnc}^2 a}{\mathrm{cnc}^2 a} = \frac{1-k^2\,\mathrm{snc}^2 a}{1-\mathrm{snc}^2 a}$, also

$$4.\quad n' = \frac{n-k^2}{n-1},$$

und hieraus folgt

$$(n'-1)(n-1) = k'^2.$$

Ferner ist

$$A = \frac{k'^2\,\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{cn}^2 a} = \frac{k'^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{cn}^3 a} = \frac{\mathrm{cnc}\,a\,\mathrm{dnc}\,a}{\mathrm{snc}^3 a} = \sqrt{\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{k^2}{n}\right).n^3\right)};$$

also ist

$$A = \sqrt{(n(n-1)(n-k^2))} = (n-1)\sqrt{(nn')},$$

oder

$$5.\quad \frac{A}{n-1} = \frac{A}{n'-1} = \sqrt{(nn')}.$$

Da $B = \frac{\mathrm{dnc}\,a}{\mathrm{tnc}\,a} = \sqrt{\left(\frac{(n-k^2)(n-1)}{n}\right)}$ ist, so ist

$$B = (n-1)\sqrt{\frac{n'}{n}} \quad \text{und} \quad B' = (n'-1)\sqrt{\frac{n}{n'}}$$

oder

$$6. \quad B.B' = (n-1)(n'-1) = k'^2.$$

Endlich $C = \mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,a$, also $C' = \mathrm{tnc}\,a\,\mathrm{dnc}\,a$, folglich $C' = \sqrt{\frac{n-k^2}{n(n-1)}}$ oder

$$7. \quad C' = \sqrt{\frac{n'}{n}} \quad \text{und} \quad C = \sqrt{\frac{n}{n'}},$$

also

$$C.C' = 1.$$

§. 132.

Die auf den Parameter $a+iK'$ bezogenen Integrale der zweiten und vierten Classe und die auf den Parameter $a+iK$ bezogenen Integrale der ersten und dritten Classe zurückgeführt auf Integrale mit einem reellen Parameter.

Setzt man $a+iK'$ für a, so verwandelt sich $k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a$ in $k^2.\frac{1}{k\,\mathrm{sn}\,a}.\frac{-i\,\mathrm{dn}\,a}{k\,\mathrm{sn}\,a}.\frac{-i}{\mathrm{tn}\,a} = -\frac{\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{tn}\,a} = -\frac{k'^2\,\mathrm{tnc}\,a\,\mathrm{dnc}\,a}{\mathrm{cnc}^2\,a}$ und $1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u$ verwandelt sich in $1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 a}$; daher verwandelt sich das Integral $\mathfrak{S}(u,a)$ in $-\int_0 \frac{k'^2\,\mathrm{tnc}\,a\,\mathrm{dnc}\,a\,\mathrm{sn}^2 u.\partial u}{\mathrm{cnc}^2 a\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 a}\right)}$, und da $'\mathfrak{S}(u,a) = \int_0 \frac{k'^2\,\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}^2 u.\partial u}{\mathrm{cn}^2 a\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{snc}^2 a}\right)}$ ist, so ist

$$1. \quad \mathfrak{S}(u,a+iK') = -'\mathfrak{S}(u,K-a).$$

Setzt man ferner in der Gleichung $\mathfrak{E}(u,a)+\mathfrak{S}(u,a) = k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a.u$ statt a, $a+iK'$, so verwandelt sie sich in

$$\mathfrak{E}(u,a+iK') + \mathfrak{S}(u,a+iK') = \frac{u}{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a}$$

und es ist

$$\mathfrak{E}(u,a+iK') = \frac{u}{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a} + '\mathfrak{S}(u,K-a).$$

Da ferner nach §. 121. $'\mathfrak{S}(u,K-a) = '\mathfrak{E}(u,K-a) - \frac{\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{tn}\,a}.u$ ist, so erhält man

$$2. \quad \mathfrak{E}(u,a+iK') = \mathfrak{E}'(u,K-a) + \mathrm{tn}\,u\,\mathrm{dn}\,a.u.$$

Setzt man in der Gleichung $\mathfrak{D}(u,a)+\mathfrak{S}(u,a) = \mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,a.u$ ebenfalls $a+iK'$ statt a, so verwandelt sich $\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,a$ in $\frac{1}{\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,a}$; daher ist

$$\mathfrak{D}(u,a+iK') = '\mathfrak{S}(u,K-a) + \frac{u}{\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,a} = '\mathfrak{S}(u,K-a) + \frac{\mathrm{snc}\,a}{\mathrm{sn}\,a}.u,$$

und da $\mathfrak{D}'(u, K-a) = {}'\mathfrak{S}(u, K-a) + \frac{\operatorname{snc} a}{\operatorname{sn} a}.u$ ist, so erhalten wir

$$3. \quad \mathfrak{D}(u, a+iK') = {}'\mathfrak{D}(u, K-a).$$

Setzt man in den vorstehenden drei Formeln $K-a-iK' = K-(a+iK')$ statt a, so verwandelt sich $a+iK'$ in $K-a$ und $K-a$ in $(a+iK')$, ferner $\operatorname{tn} a \operatorname{dn} a$ in

$$\operatorname{tnc}(a+iK').\operatorname{dnc}(a+iK') = \frac{1}{\operatorname{tn}(a+iK').\operatorname{dn}(a+iK')} = \operatorname{tn} a \operatorname{dn} a;$$

daher erhalten wir noch

$$4. \quad {}'\mathfrak{S}(u, a+iK') = -\mathfrak{S}(u, K-a),$$

$$5. \quad {}'\mathfrak{C}(u, a+iK') = \mathfrak{C}(u, K-a) - \operatorname{tn} a \operatorname{dn} a.u,$$

$$6. \quad {}'\mathfrak{D}(u, a+iK') = \mathfrak{D}(u, K-a).$$

Vertauscht man in den vorigen 6 Formeln die beiden conjugirten Modul mit einander und setzt man zugleich ui statt u, so verwandeln sie sich in

$$7. \quad S(u, a+iK) = -{}'S(u, K'-a),$$

$$8. \quad C(u, a+iK) = {}'C(u, K'-a) - \operatorname{tn}' a \operatorname{dn}' a.u,$$

$$9. \quad D(u, a+iK) = {}'D(u, K'-a),$$

$$10. \quad {}'S(u, a+iK) = -S(u, K'-a),$$

$$11. \quad {}'C(u, a+iK) = C(u, K'-a) + \operatorname{tn}' a \operatorname{dn}' a.u,$$

$$12. \quad {}'D(u, a+iK) = D(u, K'-a).$$

§. 133.

Relationen zwischen den Integralen der ersten und dritten Classe, in reellen Formen.

Setzt man in der Formel (1.) des §. 128. ai statt a, so erhält man zunächst

$$\mathfrak{S}(u, ai) + \mathfrak{S}(u, K-ai) = \frac{ik^2 \operatorname{tn}' a}{\operatorname{dn}' a}.u - \log \sqrt{\frac{\operatorname{dn}(u-ai)}{\operatorname{dn}(u+ai)}}.$$

Da aber $K-ai = -i(a+iK)$, also $\mathfrak{S}(u, K-ai) = -i\,S(u, a+iK) = i'S(u, K'-a)$ ist, so verwandelt sich die Formel in

$$1. \begin{cases} S(u,a) + {}'S(u,K'-a) = \frac{\operatorname{dnc}' a}{\operatorname{tnc}' a}.u - \frac{1}{i}\log \sqrt{\frac{\operatorname{dn}(u-ai)}{\operatorname{dn}(u+ai)}} \text{ oder} \\ S(u,a) + {}'S(u,K'-a) = \frac{\operatorname{dnc}' a}{\operatorname{tnc}' a}.u - \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{dnc}' a}{\operatorname{tnc}' a}.\operatorname{sn} u \operatorname{snc} u\right) \text{ oder} \\ S(u,K'-a) + {}'S(u,a) = \frac{\operatorname{dn}' a}{\operatorname{tn}' a}.u - \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{dn}' a}{\operatorname{tn}' a}.\operatorname{sn} u \operatorname{snc} u\right). \end{cases}$$

Die Formel (2.) des §. 128. verwandelt sich zunächst in

$$C(u, a) - C(u, a+iK) = \frac{k^2 \operatorname{tn}' a}{\operatorname{dn}' a}.u + \frac{1}{i}\log \sqrt{\frac{\operatorname{dn}(u-ai)}{\operatorname{dn}(u+ai)}}$$

und da $\quad C(u, a+i.K) = {}'C(u, K'-a) - \operatorname{tn}' a \operatorname{dn}' a.u$

ist, so giebt die Addition dieser beiden Formeln:

$$2.\quad \begin{cases} C(u,a) = {}'C(u,K'-a) - (k'^2 \operatorname{sn}' a \operatorname{snc}' a).u + \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\operatorname{dn}(u-ai)}{\operatorname{dn}(u+ai)}} \text{ oder} \\ C(u,a) = {}'C(u,K'-a) - (k'^2 \operatorname{sn}' a \operatorname{snc}' a).u + \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{dnc}' a}{\operatorname{tnc}' a}.\operatorname{sn} u \operatorname{snc} u\right) \text{ und} \\ C(u,K'-a) = {}'C(u,a) - (k'^2 \operatorname{sn}' a \operatorname{snc}' a).u + \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{dn}' a}{\operatorname{tn}' a}.\operatorname{sn} u \operatorname{snc} u\right), \end{cases}$$

Die Formel (3.) des §. 128. verwandelt sich in

$$3.\quad \begin{cases} D(u,a) = {}'D(u,K'-a) - \frac{\operatorname{dn}' a}{\operatorname{tn}' a}.u + \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\operatorname{dn}(u-ai)}{\operatorname{dn}(u+ai)}} \text{ oder} \\ D(u,a) = {}'D(u,K'-a) - \frac{\operatorname{dn}' a}{\operatorname{tn}' a}, u + \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{dnc}' a}{\operatorname{tnc}' a}.\operatorname{sn} u \operatorname{snc} u\right) \text{ und} \\ D(u,K'-a) = {}'D(u,a) - \frac{\operatorname{dnc}' a}{\operatorname{tnc}' a}.u + \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{dn}' a}{\operatorname{tn}' a}.\operatorname{sn} u \operatorname{snc} u\right). \end{cases}$$

Die vorigen Gleichungen können etwas einfacher also dargestellt werden:

$$4.\quad \begin{cases} {}'S(u,K'-a) = C(u,a) - \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{dnc}' a}{\operatorname{tnc}' a}.\operatorname{sn} u \operatorname{snc} u\right), \\ C(u,K'-a) = {}'S(u,a) + \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{dn}' a}{\operatorname{tn}' a}.\operatorname{sn} u \operatorname{snc} u\right), \end{cases}$$

$$5.\quad \begin{cases} D(u,a) = C(u,K'-a) + \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{dnc}' a}{\operatorname{tnc}' a}.\operatorname{sn} u \operatorname{snc} u\right), \\ D(u,K'-a) = {}'C(u,a) + \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{dn}' a}{\operatorname{tn}' a}.\operatorname{sn} u \operatorname{snc} u\right). \end{cases}$$

Setzt man in den Formeln des §. 128. k' statt k und ui statt u, so verwandelt sich $\log\sqrt{\frac{\operatorname{dn}(a-u)}{\operatorname{dn}(a+u)}}$ in

$$\log\sqrt{\frac{\operatorname{dn}'(a-ui)}{\operatorname{dn}'(a+ui)}} = -\log\sqrt{\frac{\operatorname{dn}(u-ai)}{\operatorname{dn}(u+ai)}} + \log\sqrt{\frac{\operatorname{cn}(u-ai)}{\operatorname{cn}(u+ai)}},$$

da $\operatorname{dn}'(a-ui) = \operatorname{dn}'(-i(u+ai)) = \frac{\operatorname{dn}(u+ai)}{\operatorname{cn}(u+ai)}$ und $\operatorname{dn}'(a+ui) = \operatorname{dn}'(i(u-ai) = \frac{\operatorname{dn}(u-ai)}{\operatorname{cn}(u-ai)}$ ist. Hiernach ist also

$$\begin{aligned} &{}'S(u,a) + {}'S(u,K'-a) \\ &= -(k'^2 \operatorname{sn}' a \operatorname{snc}' a)u - \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\operatorname{dn}(u-ai)}{\operatorname{dn}(u+a)}} + \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\operatorname{cn}(u-ai)}{\operatorname{cn}(u+ai)}}, \\ &{}'C(u,a) + {}'C(u,K'-a) \\ &= (k'^2 \operatorname{sn}' a \operatorname{snc}' a)u - \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\operatorname{dn}(u-ai)}{\operatorname{dn}(u+ai)}} + \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\operatorname{cn}(u-ai)}{\operatorname{cn}(u+ai)}}, \\ &{}'D(u,a) + {}'D(u,K'-a) \\ &= \frac{u}{\operatorname{sn}' a \operatorname{snc}' a} - \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\operatorname{dn}(u-ai)}{\operatorname{dn}(u+ai)}} + \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\operatorname{cn}(u-ai)}{\operatorname{cn}(u+ai)}}. \end{aligned}$$

Verbindet man hiermit die vorigen Gleichungen (1.), (2.), (3.), so erhält man

$$'S(u,a) - S(u,a) = -\left(k'^2 \operatorname{sn}' a \operatorname{snc}' a + \frac{\operatorname{dnc}' a}{\operatorname{tnc}' a}\right) u + \frac{1}{i} \log \sqrt{\frac{\operatorname{cn}(u-ai)}{\operatorname{cn}(u+ai)}},$$

$$'C(u,a) + C(u,a) = \frac{1}{i} \log \frac{\operatorname{cn}(u-ai)}{\operatorname{cn}(u+ai)},$$

$$'D(u,a) + D(u,a) = u\left(\frac{1}{\operatorname{sn}' a \operatorname{snc}' a} - \frac{\operatorname{dn}' a}{\operatorname{tn}' a}\right) + \frac{1}{i} \log \sqrt{\frac{\operatorname{cn}(u-ai)}{\operatorname{cn}(u+ai)}};$$

und diese Gleichungen lassen sich also umformen:

$$'S(u,a) - S(u,a) = -\frac{\operatorname{sn}' a}{\operatorname{snc}' a} u + \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{sn}' a}{\operatorname{snc}' a} \cdot \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{snc} u}\right),$$

$$'C(u,a) + C(u,a) = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{sn}' a}{\operatorname{snc}' a} \cdot \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{snc} u}\right),$$

$$'D(u,a) + D(u,a) = \frac{\operatorname{sn}' a}{\operatorname{snc}' a} u + \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{sn}' a}{\operatorname{snc}' a} \cdot \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{snc} u}\right).$$

Die erste und dritte von diesen Gleichungen lassen sich noch etwas einfacher darstellen und wir merken besonders die Gleichungen an:

$$6. \quad 'S(u,a) + D(u,a) = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{sn}' a}{\operatorname{snc}' a} \cdot \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{snc} u}\right),$$

$$7. \quad 'D(u,a) - S(u,a) = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{sn}' a}{\operatorname{snc}' a} \cdot \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{snc} u}\right),$$

$$8. \quad 'C(u,a) + C(u,a) = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{sn}' a}{\operatorname{snc}' a} \cdot \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{snc} u}\right).$$

Die Gleichung (7.) erhält man aus der Gleichung (6.), wenn man die beiden conjugirten Modul mit einander vertauscht und ai für a, ui für u setzt.

Wir begleiten die vorigen Formeln noch mit den folgenden Zusätzen.

I. Setzen wir in der Gleichung

$$C(u, K'-a) = {}'S(u,a) + \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{dn}' a}{\operatorname{tn}' a} \operatorname{sn} u \operatorname{snc} u\right)$$

das Integral $C(u, K'-a) = \int_0 \frac{A \cdot \operatorname{cn}^2 u \cdot \partial u}{1 + m \operatorname{sn}^2 u}$ und $'S(u,a) = \int_0 \frac{B \cdot \operatorname{sn}^2 u \cdot \partial u}{1 - n \operatorname{sn}^2 u}$, so ist $B = k'^2 \operatorname{sn}' a \operatorname{cn}' a \operatorname{dn}' a$, $n = \operatorname{dn}'^2 a$, $A = \frac{k^2 \operatorname{tnc}' a}{\operatorname{dnc}' a} = \frac{\operatorname{dn}' a}{\operatorname{tn}' a}$ und $m = k^2 \operatorname{tnc}'^2 a = \frac{1}{\operatorname{tn}'^2 a} = \frac{\operatorname{dn}'^2 a - k^2}{1 - \operatorname{dn}'^2 a}$, also

$$m = \frac{n - k^2}{1 - n}, \quad (1+m)(1-n) = k'^2;$$

ferner $A = \sqrt{\frac{n(n-k^2)}{1-n}} = \sqrt{(mn)}$ und $B = \sqrt{(n(1-n)(n-k^2))} = (1-n)\sqrt{(mn)}$, also

$$\frac{B}{A} = 1 - n.$$

II. Setzen wir in der Gleichung

$$D(u, K'-a) = {}'C(u, a) + \text{arc tang}\left(\frac{\text{dn}'a}{\text{tn}'a}\,\text{sn}\,u\,\text{snc}\,u\right)$$

das Integral $D(u, K'-a) = \int_0 \frac{A.\text{dn}^2 u.\partial u}{1+m\,\text{sn}^2 u}$ und $'C(u,a) = \int_0 \frac{B.\partial u}{1-n\,\text{sn}^2 u}$, so ist, wie vorhin,

$$m = \frac{n-k^2}{1-n} \quad \text{oder} \quad (1+m)(1-n) = k'^2.$$

Ferner ist $A = \frac{1}{\text{tn}'a\,\text{dn}'a}$ und $B = k'^2\,\text{sn}'a\,\text{snc}'a$: also ist

$A = \sqrt{\frac{n-k^2}{n(1-n)}} = \sqrt{\frac{m}{u}}$ und $B = \sqrt{\frac{(1-n)(n-k^2)}{n}} = (1-n)\sqrt{\frac{m}{n}}$; folglich ist

$$\frac{B}{A} = 1-n.$$

III. Setzt man die in der Gleichung

$$D(u,a) + {}'S(u,a) = \text{arc tang}\left(\frac{\text{sn}'a}{\text{snc}'a}\cdot\frac{\text{sn}\,u}{\text{snc}\,u}\right)$$

vorkommenden Integrale

$$D(u,a) = \int_0 \frac{A.\text{dn}^2 u.\partial u}{1+m.\text{sn}^2 u} \quad \text{und} \quad {}'S(u,a) = \int_0 \frac{B.\text{sn}^2 u.\partial u}{1-n.\text{sn}^2 u},$$

so ist

$m = k^2.\text{tn}'^2 a$ und $n = \text{dn}'^2 a$; $A = \text{tn}'a\,\text{dn}'a$ und $B = k'^2\,\text{sn}'a\,\text{cn}'a\,\text{dn}'a$;

also ist $m = k^2.\frac{1-n}{n-k^2}$, folglich $\frac{(1+m)(1-n)}{mn} = \frac{k'^2}{k^2}$ und $n = \frac{k^2(1+m)}{m+k^2}$.

Ferner ist

$$A = \sqrt{\frac{n(1-n)}{n-k^2}} = \frac{\sqrt{(mn)}}{k} \quad \text{und} \quad B = \sqrt{(n(1-n)(n-k^2))} = (1-n)k\sqrt{\frac{n}{m}},$$

also

$$AB = n(1-n) \quad \text{und} \quad \frac{B}{A} = n-k^2.$$

IV. Setzt man in der Gleichung

$$'D(u,a) - S(u,a) = \text{arc tang}\left(\frac{\text{sn}'a}{\text{snc}'a}\cdot\frac{\text{sn}\,u}{\text{snc}\,u}\right)$$

das Integral

$$S(u,a) = \int_0 \frac{A.\text{sn}^2 u.\partial u}{1+m\,\text{sn}^2 u} \quad \text{und} \quad {}'D(u,a) = \int_0 \frac{B.\text{dn}^2 u.\partial u}{1-n\,\text{sn}^2 u},$$

so ist, wie vorhin,

$$m = k^2\,\text{tn}'^2 a, \quad A = \frac{k^2\,\text{tn}'a\,\text{dn}'a}{\text{cn}'^2 a}, \quad n = \text{dn}'^2 a \quad \text{und} \quad B = \text{tn}'a\,\text{dn}'a,$$

also

$$m = \frac{k^2(1-n)}{n-k^2}, \quad n = \frac{k^2(1+m)}{m+k^2}, \quad \frac{(1+m)(1-n)}{mn} = \frac{k'^2}{k^2}.$$

Ferner ist

$$A = \sqrt{(m(m+k^2)(1+m))} \quad \text{und} \quad B = \sqrt{\frac{m(1+m)}{k^2+m}};$$

also ist
$$\frac{A}{B} = m + k^2.$$

V. Setzt man die in der Gleichung
$$'C(u,a) + C(u,a) = \text{arc tang}\left(\frac{\text{sn}' a}{\text{snc}' a} \cdot \frac{\text{sn}\, u}{\text{snc}\, u}\right)$$
vorkommenden Integrale
$$C(a,u) = \int_0 \frac{A.\, \text{cn}^2 u . \partial u}{1 + m\, \text{sn}^2 u} \quad \text{und} \quad 'C(u,a) = \int_0 \frac{B . \partial u}{1 - n\, \text{sn}^2 u},$$
so ist wieder
$$m = \frac{k^2(1-n)}{n-k^2}, \quad n = \frac{k^2(1+m)}{m+k^2}, \quad \frac{(1+m)(1-n)}{mn} = \frac{k'^2}{k^2}.$$
Ferner ist $A = \frac{k^2\, \text{tn}' a}{\text{dn}' a}$ und $B = k'^2\, \text{sn}' a\, \text{snc}' a$: also ist
$$A = k^2 \sqrt{\frac{1-n}{n(n-k^2)}} \quad \text{und} \quad B = \sqrt{\frac{(1-n)(n-k^2)}{n}},$$
folglich
$$\frac{B}{A} = \frac{n-k^2}{k^2} = \frac{1-n}{m}.$$

§. 134.

Relationen zwischen den Integralen der zweiten und vierten Classe, in reeller Form.

Setzt man in den Gleichungen (4.—8.) des §. 133. ui statt u, indem man zugleich den Modul mit dem conjugirten vertauscht, so erhält man
$$'\mathfrak{C}(u, K-a) + \mathfrak{S}(u,a) = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\text{dn}\, a}{\text{tn}\, a} \cdot \frac{\text{tn}\, u}{\text{dn}\, u}\right) = \log \sqrt{\frac{\text{sn}(a+u)}{\text{sn}(a-u)}},$$
$$'\mathfrak{D}(u, K-a) - \mathfrak{C}(u,a) = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\text{dn}\, a}{\text{tn}\, a} \cdot \frac{\text{tn}\, u}{\text{dn}\, u}\right) = \log \sqrt{\frac{\text{sn}(a+u)}{\text{sn}(a-u)}},$$
$$'\mathfrak{D}(u,a) - \mathfrak{S}(u,a) = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\text{sn}\, a}{\text{snc}\, a} \cdot \frac{\text{sn}\, u}{\text{snc}\, u}\right) = \log \sqrt{\frac{\text{cn}(a-u)}{\text{cn}(a+u)}},$$
$$'\mathfrak{S}(u,a) + \mathfrak{D}(u,a) = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\text{sn}\, a}{\text{snc}\, a} \cdot \frac{\text{sn}\, u}{\text{snc}\, u}\right) = \log \sqrt{\frac{\text{cn}(a-u)}{\text{cn}(a+u)}},$$
$$\mathfrak{C}'(u,a) + \mathfrak{C}(u,a) = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\text{sn}\, a}{\text{snc}\, a} \cdot \frac{\text{sn}\, u}{\text{snc}\, u}\right) = \log \sqrt{\frac{\text{cn}(a-u)}{\text{cn}(a+u)}}.$$
Es lassen sich diese Gleichungen zum Theil auch dadurch finden, daſs man in den Formeln des §. 39. u statt b setzt, darauf mit ∂u sie multiplicirt und integrirt.

Wir begleiten auch diese Formeln noch mit folgenden Zusätzen, durch welche ihre Anwendung erleichtert wird:

I. Setzen wir die in der Gleichung
$$'\mathfrak{C}(u, K-a) + \mathfrak{S}(u,a) = \log \sqrt{\frac{\text{sn}(a+u)}{\text{sn}(a-u)}}$$
vorkommenden Integrale

$$\mathfrak{S}(u,a)=\int_0\frac{A.\,\mathrm{sn}^2u.\partial u}{1-m\,\mathrm{sn}^2u}\quad\text{und}\quad '\mathfrak{C}(u,K-a)=\int_0\frac{B.\partial u}{1-n\,\mathrm{sn}^2u},$$

so ist

$$m=k^2\,\mathrm{sn}^2a,\quad A=k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a,\quad n=\frac{1}{\mathrm{sn}^2a},\quad B=\frac{\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{tn}\,a},$$

also

$$mn=k^2.$$

Ferner ist

$$A=\sqrt{(m(k^2-m)(1-m))}\quad\text{und}\quad B=\sqrt{\frac{(1-m)(k^2-m)}{m}},$$

also ist

$$\frac{A}{B}=m.$$

II. Setzen wir die in der Gleichung

$$'\mathfrak{D}(u,K-a)-\mathfrak{C}(u,a)=\sqrt{\frac{\mathrm{sn}(a+u)}{\mathrm{sn}(a-u)}}$$

vorkommenden Integrale

$$\mathfrak{C}(u,a)=\int_0\frac{A.\,\mathrm{cn}^2u.\partial u}{1-m\,\mathrm{sn}^2u}\quad\text{und}\quad '\mathfrak{D}(u,K-a)=\int_0\frac{B.\,\mathrm{dn}^2u.\partial u}{1-n\,\mathrm{sn}^2u},$$

so ist, wie vorher,

$$mn=k^2.$$

Ferner ist

$$A=k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a\quad\text{und}\quad B=\frac{1}{\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,a};$$

also ist

$$A=\sqrt{\frac{m(k^2-m)}{1-m}}\quad\text{und}\quad B=\sqrt{\frac{k^2-m}{m(1-m)}},$$

folglich

$$\frac{A}{B}=m.$$

III. Stellen wir die in der Gleichung

$$'\mathfrak{D}(u,a)-\mathfrak{S}(u,a)=\log\sqrt{\frac{\mathrm{cn}(a-u)}{\mathrm{cn}(a+u)}}$$

enthaltenen Integrale durch

$$\mathfrak{S}(u,a)=\int_0\frac{A.\,\mathrm{sn}^2u.\partial u}{1-m\,\mathrm{sn}^2u}\quad\text{und}\quad '\mathfrak{D}(u,a)=\int_0\frac{B.\,\mathrm{dn}^2u.\partial u}{1-n\,\mathrm{sn}^2u}$$

vor, so ist

$$m=k^2\,\mathrm{sn}^2a\quad\text{und}\quad n=\frac{1}{\mathrm{snc}^2a}=\frac{k^2(1-k^2\,\mathrm{sn}^2a)}{k^2-k^2\,\mathrm{sn}^2a},$$

also

$$n=\frac{k^2(1-m)}{k^2-m},\quad m=\frac{k^2(n-1)}{n-k^2},\quad\text{oder}\quad\frac{(1-m)(n-1)}{mn}=\frac{k'^2}{k^2}.$$

Da $A=k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a$ und $B=\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,a$ ist, so findet sich

$$A=\sqrt{(m(k^2-m)(1-m))}\quad\text{und}\quad B=\sqrt{\frac{m(1-m)}{k^2-m}},\quad\text{also}\quad\frac{A}{B}=k^2-m.$$

IV. Setzen wir mit Beziehung auf die Gleichung

$$'\mathfrak{S}(u,a) + \mathfrak{D}(u,a) = \log \sqrt{\frac{\operatorname{cn}(a-u)}{\operatorname{cn}(a+u)}}$$

die Integrale

$$\mathfrak{D}(u,a) = \int_0 \frac{A . \operatorname{dn}^2 u . \partial u}{1-m \operatorname{sn}^2 u} \quad \text{und} \quad '\mathfrak{S}(u,a) = \int_0 \frac{B . \operatorname{sn}^2 u . \partial u}{1-n \operatorname{sn}^2 u},$$

so ist, wie vorher,

$$n = \frac{k^2(1-m)}{k^2-m}, \quad m = \frac{k^2(n-1)}{n-k^2}, \quad \frac{(1-m)(n-1)}{mn} = \frac{k'^2}{k^2}.$$

Da ferner $A = \operatorname{tn} a \operatorname{dn} a$ und $B = \frac{k'^2 \operatorname{tn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{cn}^2 a}$ ist, so ist

$$B = \frac{\operatorname{cnc} a \operatorname{dnc} a}{\operatorname{snc}^3 a} = \sqrt{\left(\left(\frac{1}{\operatorname{snc}^2 a} - 1\right)\left(\frac{1}{\operatorname{snc}^2 a} - k^2\right) . \frac{1}{\operatorname{snc}^2 a}\right)},$$

also

$$B = \sqrt{((n-1)(n-k^2).n)} \quad \text{und} \quad A = \sqrt{\frac{n(n-1)}{n-k^2}}, \quad \text{also} \quad \frac{B}{A} = n - k^2.$$

V. Werden endlich die in der Gleichung

$$\mathfrak{E}'(u,a) + \mathfrak{E}(u,a) = \log \sqrt{\frac{\operatorname{cn}(a-u)}{\operatorname{cn}(a+u)}}$$

enthaltenen Integrale durch

$$\mathfrak{E}(u,a) = \int_0 \frac{A . \operatorname{cn}^2 u . \partial u}{1-m \operatorname{sn}^2 u} \quad \text{und} \quad '\mathfrak{E}(u,a) = \int_0 \frac{B . \partial u}{1-n \operatorname{sn}^2 u}$$

ausgedrückt, so ist wieder

$$n = \frac{k^2(1-m)}{k^2-m}, \quad m = \frac{k^2(n-1)}{n-k^2}, \quad \frac{(1-m)(n-1)}{mn} = \frac{k'^2}{k^2}.$$

Ferner ist $A = k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{snc} a$ und $B = \frac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a}$, also

$$A = k^2 . \sqrt{\frac{n-1}{n(n-k^2)}} \quad \text{und} \quad B = \sqrt{\frac{(n-1)(n-k^2)}{n}}, \quad \text{folglich} \quad \frac{B}{A} = \frac{n-k^2}{k^2}.$$

§. 135.

Ausdruck von $\mathfrak{S}(u+v, a)$ durch $\mathfrak{S}(u, a)$ und $\mathfrak{S}(v, a)$. Aehnliche Ausdrücke für die anderen Integrale der zweiten Classe.

Da $\mathfrak{S}(u+v,a) = (u+v).\operatorname{el} a - \frac{\operatorname{lm}(u+v+a) - \operatorname{lm}(u+v-a)}{2}$, ferner

$$\mathfrak{S}(u,a) = u . \operatorname{el} a - \frac{\operatorname{lm}(u+a) - \operatorname{lm}(u-a)}{2} \quad \text{und}$$

$$\mathfrak{S}(v,a) = v . \operatorname{el} a - \frac{\operatorname{lm}(v+a) - \operatorname{lm}(v-a)}{2}$$

ist, so erhält man zunächst, wenn von der ersten Gleichung die Summe der beiden anderen subtrahirt wird,

$$\mathfrak{S}(u+v,a) = \mathfrak{S}(u,a) + \mathfrak{S}(v,a) + \tfrac{1}{2}[\operatorname{lm}(u+a) - \operatorname{lm}(u-a) + \operatorname{lm}(v+a) - \operatorname{lm}(v-a) - \operatorname{lm}(u+v+a) + \operatorname{lm}(u+v-a)].$$

Derjenige Theil dieses Ausdrucks, welcher Modular-Logarithmen enthält, läfst sich auf mehrere Arten also umformen, dafs er durch cyklische Modular-Functionen berechnet werden kann und kam auch in der Formel (11.) des §. 73. vor.

Wird die erwähnte Formel benutzt und wird gesetzt:

$$1.\quad \mathfrak{S}(u+v,a) = \mathfrak{S}(u,a) + \mathfrak{S}(v,a) + \mathrm{ArcTang}(\mu_2),$$

so haben wir zur Bestimmung der hyperbolischen Amplitude μ_2 in dieser die Sinus-Integrale der zweiten Classe betreffenden Formel den Ausdruck

$$2.\quad \mathrm{ArcTang}(\mu_2) = \log\sqrt{\frac{1+k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}(u+v+a)}{1-k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}(u+v-a)}}.$$

Derselbe im §. 44. und §. 45. mit $\log U$ bezeichnete Ausdruck ist in anderen Formen darstellbar und es ist

$$3.\quad \mathrm{ArcTang}(\mu_2) = \log\sqrt{\frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v+\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}(u+v+a)}{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v-\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}(u+v-a)}} - \log\sqrt{\frac{\mathrm{sn}(u+a)\,\mathrm{sn}(v+a)}{\mathrm{sn}(u-a)\,\mathrm{sn}(v-a)}},$$

$$4.\quad \mathrm{ArcTang}(\mu_2) = \log\sqrt{\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\left(\frac{u+v}{2}\right)\mathrm{sn}^2\left(\frac{u+v}{2}-a\right)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\left(\frac{u+v}{2}\right)\mathrm{sn}^2\left(\frac{u+v}{2}+a\right)}}$$

$$-\log\sqrt{\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\left(\frac{u-v}{2}\right)\mathrm{sn}^2\left(\frac{u+v}{2}-a\right)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\left(\frac{u-v}{2}\right)\mathrm{sn}^2\left(\frac{u+v}{2}+a\right)}},$$

$$5.\quad \mathrm{ArcTang}(\mu_2) = \tfrac{1}{2}\log\sqrt{\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}^2(u-a)\,\mathrm{sn}^2(v-a)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2(u+a)\,\mathrm{sn}^2(v+a)}}$$

$$-\tfrac{1}{2}\log\sqrt{\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2(u+v-a)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2(u+v+a)}},$$

$$6.\quad \mathrm{ArcTang}(\mu_2) = \log\sqrt{\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}(u-a)\,\mathrm{sn}(v-a)}{1-k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}(u+a)\,\mathrm{sn}(v+a)}},$$

$$7.\quad \mathrm{ArcTang}(\mu_2) = \log\sqrt{\frac{\mathrm{sn}(u+v+a)}{\mathrm{sn}(u+v-a)}} - \log\sqrt{\frac{\mathrm{sn}(u+a)\,\mathrm{sn}(v+a)-\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v}{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v-\mathrm{sn}(u-a)\,\mathrm{sn}(v-a)}},$$

$$8.\quad \mathrm{ArcTang}(\mu_2) = \log\sqrt{\frac{\mathrm{sn}(u-a)\,\mathrm{sn}\,v-\mathrm{sn}(v-a)\,\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{sn}(v+a)\,\mathrm{sn}\,u-\mathrm{sn}(u+a)\,\mathrm{sn}\,v}},$$

$$9.\quad \mathrm{ArcTang}(\mu_2) = \tfrac{1}{2}\log\sqrt{\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2(v-a)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2(v+a)}} + \tfrac{1}{2}\log\sqrt{\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 v\,\mathrm{sn}^2(u-a)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 v\,\mathrm{sn}^2(u+a)}}.$$

Aufserdem haben wir noch

$$10.\quad \mu_2 = \frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}(u+v)}{\mathrm{cn}^2 a+\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{dn}\,v\,\mathrm{dn}(u+v)},$$

$$11.\quad \mu_2 = \frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}(u+v)}{\mathrm{dn}^2 a+k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{cn}(u+v)}.$$

Da

$$\mathfrak{C}(u+v,a)+\mathfrak{S}(u+v,a)=k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{snc} a.(u+v),$$
$$\mathfrak{C}(u,a)+\mathfrak{S}(u,a)=k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{snc} a.u \quad \text{und}$$
$$\mathfrak{C}(v,a)+\mathfrak{S}(v,a)=k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{snc} a.v$$

ist, so erhält man, wenn man von der ersten Gleichung die Summe der beiden andern subtrahirt, und für $\mathfrak{S}(u+v,a)-\mathfrak{S}(u,a)-\mathfrak{S}(v,a)$ den Werth $\mathfrak{Arc\,Tang}(\mu_2)$ setzt,

$$12. \quad \mathfrak{C}(u+v,a)=\mathfrak{C}(u,a)+\mathfrak{C}(v,a)-\mathfrak{Arc\,Tang}(\mu_2).$$

Ganz eben so findet man noch

$$13. \quad \mathfrak{D}(u+v,a)=\mathfrak{D}(u,a)+\mathfrak{D}(v,a)-\mathfrak{Arc\,Tang}(\mu_2).$$

Man kann diese Gleichung aber auch aus (7.) dadurch herleiten, dafs man ka statt a, ku statt u, kv statt v und $\frac{1}{k}$ statt des Moduls k setzt, wobei μ_2 ungeändert bleibt.

Zu denselben Resultaten führt auch unmittelbar die Anwendung der Gleichung (11.) §. 73.

Zusatz. Setzt man $u+v=K$, also $\operatorname{cn}(u+v)=0$, so wird $\mu_2=\frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn} u \operatorname{snc} u}{\operatorname{dn}^2 a}=k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{snc} a \operatorname{sn} u \operatorname{snc} u$ und die Formeln (1., 6., 8.) stimmen dann mit den Formeln (1., 2., 3.) im §. 126. überein.

§. 136.

Entwicklung der auf ein zweigliedriges Argument $u+v$ bezogenen Integrale der ersten, dritten und vierten Classe.

Setzen wir in den vorigen Formeln ai für a, so wird μ_2 imaginär. Setzen wir also $i.\mu_1$ an dessen Stelle, so haben wir für die Integrale der ersten Classe die Formeln

$$S(u+v,a)=S(u,a)+S(v,a)+\operatorname{arc\,tang}(\mu_1),$$
$$C(u+v,a)=C(u,a)+C(v,a)-\operatorname{arc\,tang}(\mu_1),$$
$$D(u+v,a)=D(u,a)+D(v,a)-\operatorname{arc\,tang}(\mu_1),$$

$$\mu_1=\frac{k^2 \operatorname{tn}' a \operatorname{dn}' a \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{sn}(u+v)}{1-\operatorname{sn}'^2 a \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v \operatorname{dn}(u+v)}=\frac{k^2 \operatorname{tn}' a \operatorname{dn}' a \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{sn}(u+v)}{\operatorname{dn}'^2 a-k^2 \operatorname{sn}'^2 a \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v \operatorname{cn}(u+v)}.$$

Wenn man aber den Modul k mit k' vertauscht, ferner ui statt u und vi statt v setzt, so wird μ_2 negativ und imaginär. Bezeichnen wir also den geänderten Werth von μ_2 mit $-i.\mu_3$, so erhalten wir die Formeln

$$'S(u+v,a) = 'S(u,a) + 'S(v,a) + \text{arc tang}(\mu_3),$$
$$'C(u+v,a) = 'C(u,a) + 'C(v,a) + \text{arc tang}(\mu_3),$$
$$'D(u+v,a) = 'D(u,a) + 'D(v,a) + \text{arc tang}(\mu_3),$$
$$\mu_3 = \frac{k'^2 \operatorname{sn}'a \operatorname{cn}'a \operatorname{dn}'a \operatorname{sn}u \operatorname{sn}v \operatorname{sn}(u+v)}{\operatorname{dn}'^2 a \operatorname{cn}u \operatorname{cn}v \operatorname{cn}(u+v) + k'^2 \operatorname{sn}'^2 a}.$$

Man erhält auch

$$\mu_3 = \frac{k'^2 \operatorname{sn}'a \operatorname{cn}'a \operatorname{dn}'a \operatorname{sn}u \operatorname{sn}v \operatorname{sn}(u+v)}{\operatorname{cn}'^2 a \operatorname{cn}u \operatorname{cn}v \operatorname{cn}(u+v) + \operatorname{sn}'^2 a \operatorname{dn}u \operatorname{dn}v \operatorname{dn}(u+v)},$$

und da $\operatorname{cn}u \operatorname{cn}v \operatorname{cn}(u+v) = \frac{\operatorname{dn}u \operatorname{dn}v \operatorname{dn}(u+v) - k'^2}{k^2}$ ist, so verwandelt sich der Ausdruck in

$$\mu_3 = \frac{k^2 k'^2 \operatorname{sn}'a \operatorname{cn}'a \operatorname{dn}'a \operatorname{sn}u \operatorname{sn}v \operatorname{sn}(u+v)}{\operatorname{dn}'^2 a \operatorname{dn}u \operatorname{dn}v \operatorname{dn}(u+v) - k'^2 \operatorname{cn}'^2 a} \text{ oder}$$
$$\mu_3 = \frac{k^2 k'^2 \operatorname{sn}'a \operatorname{snc}'a \operatorname{sn}u \operatorname{sn}v \operatorname{sn}(u+v)}{\operatorname{dn}u \operatorname{dn}v \operatorname{dn}(u+v) - k'^2 \operatorname{snc}'^2 a}.$$

Setzt man in den vorigen Formeln ai statt a und $i\mu_4$ statt μ_3, so erhält man endlich für die Integrale der vierten Classe die Ausdrücke

$$'\mathfrak{S}(u+v,a) = '\mathfrak{S}(u,a) + '\mathfrak{S}(v,a) + \text{Arc Tang}(\mu_4),$$
$$'\mathfrak{C}(u+v,a) = '\mathfrak{C}(u,a) + '\mathfrak{C}(v,a) + \text{Arc Tang}(\mu_4),$$
$$'\mathfrak{D}(u+v,a) = '\mathfrak{D}(u,a) + '\mathfrak{D}(v,a) + \text{Arc Tang}(\mu_4) \quad \text{und}$$
$$\mu_4 = \frac{k'^2 \operatorname{tn}a \operatorname{dn}a \operatorname{sn}u \operatorname{sn}v \operatorname{sn}(u+v)}{\operatorname{dn}^2 a \operatorname{cn}u \operatorname{cn}v \operatorname{cn}(u+v) - k'^2 \operatorname{sn}^2 a},$$
$$\text{Arc Tang}(\mu_4) = \log \sqrt{\frac{1 + k'^2 \operatorname{tn}a \operatorname{tn}u \operatorname{tn}v \operatorname{tn}(u+v+a)}{1 - k'^2 \operatorname{tn}a \operatorname{tn}u \operatorname{tn}v \operatorname{tn}(u+v-a)}}.$$

§. 137.

Entwicklung der Integrale aller Classen, wenn ihr Parameter ein Binom ist.

Nach §. 121. ist

$$\mathfrak{S}(a,u+v) = \mathfrak{S}(u+v,a) + a.\operatorname{el}(u+v) - (u+v).\operatorname{el}a.$$

Eben so ist auch

$$\mathfrak{S}(a,u) = \mathfrak{S}(u,a) + a.\operatorname{el}u - u.\operatorname{el}a \quad \text{und}$$
$$\mathfrak{S}(a,v) = \mathfrak{S}(v,a) + a.\operatorname{el}v - v.\operatorname{el}a.$$

Subtrahirt man von der ersten Gleichung die Summe der beiden anderen, so erhält man

$$\mathfrak{S}(a,u+v) = \mathfrak{S}(a,u) + \mathfrak{S}(a,v) + a(\operatorname{el}(u+v) - \operatorname{el}u - \operatorname{el}v) + \text{Arc Tang}(\mu_2),$$

wenn man für $\mathfrak{S}(u+v,a) - \mathfrak{S}(u,a) - \mathfrak{S}(v,a)$ den Werth $\text{Arc Tang}(\mu_2)$ dem §. 136. gemäfs an die Stelle setzt. Da aufserdem nach §. 65.

$$\operatorname{el}(u+v) - \operatorname{el}u - \operatorname{el}v = -k^2 \operatorname{sn}u \operatorname{sn}v \operatorname{sn}(u+v)$$

ist, so reducirt sich die Formel auf

1. $\mathfrak{S}(a,u+v) = \mathfrak{S}(a,u) + \mathfrak{S}(a,v) - a(k^2 \operatorname{sn}u \operatorname{sn}v \operatorname{sn}(u+v)) + \text{Arc Tang}(\mu_2).$

Da $\mathfrak{C}(a,u)+\mathfrak{S}(a,u)=a.k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u$, $\mathfrak{C}(a,v)+\mathfrak{S}(a,v)=a.k^2\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{snc}\,v$ und $\mathfrak{C}(a,u+v)+\mathfrak{S}(a,u+v)=a.k^2\,\mathrm{sn}(u+v)\,\mathrm{snc}(u+v)$ ist, so erhält man, wenn die Summe der beiden ersten Gleichungen von der dritten subtrahirt wird,

$$\mathfrak{C}(a,u+v)=\mathfrak{C}(a,u)+\mathfrak{C}(a,v)-(\mathfrak{S}(a,u+v)-\mathfrak{S}(a,u)-\mathfrak{S}(a,v))$$
$$+a.k^2(\mathrm{sn}(u+v)\,\mathrm{snc}(u+v)-\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u-\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{snc}\,v);$$

und wird die vorige Gleichung benutzt, so erhält man

$$\mathfrak{C}(a,u+v)=\mathfrak{C}(a,u)+\mathfrak{C}(a,v)$$
$$+a.k^2(\mathrm{sn}(u+v)\,\mathrm{snc}(u+v)-\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u-\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{snc}\,v+\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}(u+v))$$
$$-\mathrm{Arc\,Tang}(\mu_2).$$

Der die cyklischen Modular-Functionen enthaltende Theil dieser Formel gestattet noch eine nambafte Zusammenziehung. Nach §. 38. ist

$$\mathrm{tn}(u+v)\,\mathrm{dn}(u+v)-\mathrm{tn}\,u\,\mathrm{dn}\,u-\mathrm{tn}\,v\,\mathrm{dn}\,v$$
$$=k'^2\,\mathrm{tn}\,u\,\mathrm{tn}\,v\,\mathrm{tn}(u+v)-k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}(u+v).$$

Setzt man in dieser Gleichung ku statt u, kv statt v und $\frac{1}{k}$ statt des Moduls k, so verwandelt sie sich in

$$\mathrm{sn}(u+v)\,\mathrm{snc}(u+v)-\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u-\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{snc}\,v$$
$$=-\frac{1}{k'}\,\mathrm{cnc}\,u\,\mathrm{cnc}\,v\,\mathrm{cnc}(u+v)-\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}(u+v),$$

und wird dieser Werth in der vorigen Gleichung substituirt, so erhält man

$$2.\quad \mathfrak{C}(a,u+v)=\mathfrak{C}(a,u)+\mathfrak{C}(a,v)-a.\left(\frac{k^2}{k'}\,\mathrm{cnc}\,u\,\mathrm{cnc}\,v\,\mathrm{cnc}(u+v)\right)$$
$$-\mathrm{Arc\,Tang}(\mu_2).$$

Da ferner $\mathfrak{D}(a,u)+\mathfrak{S}(a,u)=\mathrm{tn}\,u\,\mathrm{dn}\,u.a$, $\mathfrak{D}(a,v)+\mathfrak{S}(a,v)=\mathrm{tn}\,v\,\mathrm{dn}\,v.a$ und $\mathfrak{D}(a,u+v)+\mathfrak{S}(a,u+v)=\mathrm{tn}(u+v)\,\mathrm{dn}(u+v)a$ ist, so erhält man

$$\mathfrak{D}(a,u+v)=\mathfrak{D}(a,u)+\mathfrak{D}(a,v)-(\mathfrak{S}(a,u+v)-\mathfrak{S}(a,u)-\mathfrak{S}(a,v))$$
$$+(\mathrm{tn}(u+v)\,\mathrm{dn}(u+v)-\mathrm{tn}\,u\,\mathrm{dn}\,u-\mathrm{tn}\,v.\mathrm{dn}\,v).a,$$

oder auch

$$3.\quad \mathfrak{D}(a,u+v)$$
$$=\mathfrak{D}(a,u)+\mathfrak{D}(a,v)+a(k'^2.\,\mathrm{tn}\,u\,\mathrm{tn}\,v\,\mathrm{tn}(u+v))-\mathrm{Arc\,Tang}(\mu_2).$$

Dasselbe Resultat findet man, wenn man in der Gleichung (2.) ka statt a, ku statt u, kv statt v und $\frac{1}{k}$ statt des Moduls k setzt.

Setzt man in den vorigen Formeln ui statt u und vi statt v, wodurch sich μ_2 in $-i\mu_3'$ verwandelt, so erhält man

$$4.\quad S(a,u+v)$$
$$=S(a,u)+S(a,v)+a\,(k^2\,\mathrm{tn}'u\,\mathrm{tn}'v\,\mathrm{tn}'(u+v))-\mathrm{arc\,tang}(\mu_3'),$$

$$5.\quad C(a, u+v)$$
$$= C(a,u) + C(a,v) + a\left(\frac{k'^2}{k}\operatorname{cnc}'u \operatorname{cnc}'v \operatorname{cnc}'(u+v)\right) + \operatorname{arc\,tang}(\mu_3'),$$
$$6.\quad D(a, u+v)$$
$$= D(a,u) + D(a,v) - a(k'^2 \operatorname{sn}'u \operatorname{sn}'v \operatorname{sn}'(u+v)) + \operatorname{arc\,tang}(\mu_3'),$$
und in diesen Formeln ist
$$\mu'_3 = \frac{k^2 \operatorname{sn}'u \operatorname{sn}'v \operatorname{sn}'(u+v) \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{cn}'u \operatorname{cn}'v \operatorname{cn}'(u+v) \operatorname{dn}^2 a + k^2 \operatorname{sn}^2 a} = \frac{k^2 k'^2 \operatorname{sn}'u \operatorname{sn}'v \operatorname{sn}'(u+v) \operatorname{sn} a \operatorname{snc} a}{\operatorname{dn}'u \operatorname{dn}'v \operatorname{dn}'(u+v) - k^2 \operatorname{snc}^2 a},$$
welche Gröſse sich also von μ_3 dadurch unterscheidet, daſs die beiden Modul k und k' mit einander vertauscht sind.

Setzt man in den drei ersten Formeln ai statt a, indem man zugleich k mit k' vertauscht, wodurch sich μ_2 in $i\mu_1'$ verwandelt, so hat man
$$7.\quad {}'S(a, u+v)$$
$$= {}'S(a,u) + {}'S(a,v) - \operatorname{arc\,tang}(\mu_1') + a(k'^2 \operatorname{sn}'u \operatorname{sn}'v \operatorname{sn}'(u+v)),$$
$$8.\quad {}'C(a, u+v)$$
$$= {}'C(a,u) + {}'C(a,v) - \operatorname{arc\,tang}(\mu_1') - a\left(\frac{k'^2}{k}\operatorname{cnc}'u \operatorname{cnc}'v \operatorname{cnc}'(u+v)\right),$$
$$9.\quad {}'D(a, u+v)$$
$$= {}'D(a,u) + {}'D(a,v) - \operatorname{arc\,tang}(\mu_1') + a(k^2 \operatorname{tn}'u \operatorname{tn}'v \operatorname{tn}'(u+v)),$$
$$\mu_1' = \frac{k'^2 \operatorname{sn}'u \operatorname{sn}'v \operatorname{sn}'(u+v) \operatorname{tn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{dn}^2 a - k'^2 \operatorname{cn}'u \operatorname{cn}'v \operatorname{cn}'(u+v) \operatorname{sn}^2 a} = \frac{k'^2 \operatorname{sn}'u \operatorname{sn}'v \operatorname{sn}'(u+v) \operatorname{tn} a \operatorname{dn} a}{1 - \operatorname{dn}'u \operatorname{dn}'v \operatorname{dn}'(u+v) \operatorname{sn}^2 a}.$$
Setzt man in diesen Formeln endlich ui statt u und vi statt v, wodurch sich μ_1' in $-\mu_4$ verwandelt, so hat man
$$10.\quad {}'\mathfrak{S}(a, u+v)$$
$$= {}'\mathfrak{S}(a,u) + {}'\mathfrak{S}(a,v) - a(k'^2 \operatorname{tn} u \operatorname{tn} v \operatorname{tn}(u+v)) + \mathfrak{Arc\,Tang}(\mu_4),$$
$$11.\quad {}'\mathfrak{C}(a, u+v)$$
$$= {}'\mathfrak{C}(a,u) + {}'\mathfrak{C}(a,v) + a\left(\frac{k^2}{k'}\operatorname{cnc} u \operatorname{cnc} v \operatorname{cnc}(u+v)\right) + \mathfrak{Arc\,Tang}(\mu_4),$$
$$12.\quad {}'\mathfrak{D}(a, u+v)$$
$$= {}'\mathfrak{D}(a,u) + {}'\mathfrak{D}(a,v) - a(k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{sn}(u+v)) + \mathfrak{Arc\,Tang}(\mu_4),$$
und in diesen Formeln hat μ_4 dieselbe Bedeutung, wie in §. 136.

§. 138.

Entwicklung der Integrale der zweiten Classe, wenn sowohl ihr Argument, als auch ihr Parameter ein Binom ist.

Es ist
$$\mathfrak{S}(u,a) + \mathfrak{S}(v,b)$$
$$= u.\operatorname{el} a + v.\operatorname{el} b - \tfrac{1}{2}[\operatorname{lm}(u+a) + \operatorname{lm}(v+b) - \operatorname{lm}(u-a) - \operatorname{lm}(v-b)].$$

Setzt man hierin $u+v$ statt u, $u-v$ statt v, $a+b$ statt a und $a-b$ statt b, so erhält man

$$\mathfrak{S}(u+v,a+b)+\mathfrak{S}(u-v,a-b)=(u+v).\mathrm{el}(a+b)+(u-v).\mathrm{el}(a-b)$$
$$-\tfrac{1}{2}[\mathrm{lm}(u+v+a+b)+\mathrm{lm}(u-v+a-b)-\mathrm{lm}(u+v-a-b)-\mathrm{lm}(u-v-a+b)].$$

Da nun aber

$$\frac{\mathrm{lm}\,A+\mathrm{lm}\,B}{2}=\mathrm{lm}\frac{A+B}{2}+\mathrm{lm}\frac{A-B}{2}+\log\sqrt{\left(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\frac{A+B}{2}\,\mathrm{sn}^2\frac{A-B}{2}\right)}$$

ist, so erhalten wir

$$\frac{\mathrm{lm}(u+v+a+b)+\mathrm{lm}(u-v+a-b)}{2}$$
$$=\mathrm{lm}(u+a)+\mathrm{lm}(v+b)+\log\sqrt{(1-k^2\,\mathrm{sn}^2(u+a)\,\mathrm{sn}^2(u+b))},$$
$$\frac{\mathrm{lm}(u+v-a-b)+\mathrm{lm}(u-v-a+b)}{2}$$
$$=\mathrm{lm}(u-a)+\mathrm{lm}(v-b)+\log\sqrt{(1-k^2\,\mathrm{sn}^2(u-a)\,\mathrm{sn}^2(v-b))},$$

und werden diese Werthe substituirt, so verwandelt sich die vorige Gleichung in

$$\mathfrak{S}(u+v,a+b)+\mathfrak{S}(u-v,a-b)$$
$$=(u+v)\,\mathrm{el}(a+b)+(u-v)\,\mathrm{el}(a-b)+\log\sqrt{\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}^2(u-a)\,\mathrm{sn}^2(v-b)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2(u+a)\,\mathrm{sn}^2(v+b)}}$$
$$-(\mathrm{lm}(u+a)-\mathrm{lm}(u-a)+\mathrm{lm}(v+b)-\mathrm{lm}(v-b)).$$

Da ferner

$$-(\mathrm{lm}(u+a)-\mathrm{lm}(u-a))=-2u.\,\mathrm{el}\,a+2\mathfrak{S}(u,a) \text{ und}$$
$$-(\mathrm{lm}(v+b)-\mathrm{lm}(v-b))=-2v.\,\mathrm{el}\,b+2\mathfrak{S}(v,b)$$

ist, so erhalten wir durch die Substitution dieser Werthe

$$\mathfrak{S}(u+v,a+b)+\mathfrak{S}(u-v,a-b)$$
$$=(u+v)\,\mathrm{el}(a+b)+(u-v)\,\mathrm{el}(a-b)-2u\,\mathrm{el}\,a-2v\,\mathrm{el}\,b$$
$$+2\mathfrak{S}(u,a)+2\mathfrak{S}(v,b)+\log\sqrt{\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}^2(u-a)\,\mathrm{sn}^2(v-b)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2(u+a)\,\mathrm{sn}^2(v+b)}}.$$

Da $2u=(u+v)+(u-v)$ und $2v=(u+v)-(u-v)$ ist, so läſst sich der Theil dieser Formel, welcher die Modular-Integrale der ersten Art enthält, auch also darstellen:

$$(u+v)[\mathrm{el}(a+b)-\mathrm{el}\,a-\mathrm{el}\,b]+(u-v)[\mathrm{el}(a-b)-\mathrm{el}\,a+\mathrm{el}\,b].$$

Da aber $\mathrm{el}(a+b)-\mathrm{el}\,a-\mathrm{el}\,b=-k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{sn}(a+b)$ und also

$$\mathrm{el}(a-b)-\mathrm{el}\,a+\mathrm{el}\,b=+k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{sn}(a-b)$$

ist, so reducirt sich die vorige Gleichung auf

$$1.\quad \mathfrak{S}(u+v,a+b)+\mathfrak{S}(u-v,a-b)$$
$$=2\mathfrak{S}(u,a)+2\mathfrak{S}(v,b)+\log\sqrt{\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}^2(u-a)\,\mathrm{sn}^2(v-b)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2(u+a)\,\mathrm{sn}^2(v+b)}}.$$
$$-k^2\,\mathrm{sn}\,a\,.\,\mathrm{sn}\,b.[(u+v)\,\mathrm{sn}(a+b)-(u-v)\,\mathrm{sn}(a-b)].$$

Vertauscht man in dieser allgemeinen Formel a mit b, oder auch u mit v, so erhält man

$$\mathfrak{S}(u+v, a+b) - \mathfrak{S}(u-v, a-b)$$
$$= 2\mathfrak{S}(v, a) + 2\mathfrak{S}(u, b) + \log \sqrt{\frac{1-k^2 \operatorname{sn}^2(v-a)\operatorname{sn}^2(u-b)}{1-k^2 \operatorname{sn}^2(v+a)\operatorname{sn}^2(u+b)}}$$
$$- k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b . [(u+v)\operatorname{sn}(a+b) + (u-v)\operatorname{sn}(a-b)],$$

und wird diese Gleichung zu der vorigen addirt, so entsteht

$$2. \quad \mathfrak{S}(u+v, a+b)$$
$$= \mathfrak{S}(u, a) + \mathfrak{S}(v, a) + \mathfrak{S}(u, b) + \mathfrak{S}(v, b) - (u+v).(k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{sn}(a+b))$$
$$+ \log \sqrt[4]{\left(\frac{1-k^2 \operatorname{sn}^2(u-a)\operatorname{sn}^2(v-b)}{1-k^2 \operatorname{sn}^2(u+a)\operatorname{sn}^2(v+b)} \cdot \frac{1-k^2 \operatorname{sn}^2(v-a)\operatorname{sn}^2(u-b)}{1-k^2 \operatorname{sn}^2(v+a)\operatorname{sn}^2(u+b)}\right)}.$$

Setzt man in dieser Formel $b = 0$, so reducirt sie sich auf

$$3. \quad \mathfrak{S}(u+v, a)$$
$$= \mathfrak{S}(u, a) + \mathfrak{S}(v, a) + \log \sqrt[4]{\left(\frac{1-k^2 \operatorname{sn}^2 v \operatorname{sn}^2(u-a)}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 v \operatorname{sn}^2(u+a)} \cdot \frac{1-k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2(v-a)}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2(v+a)}\right)},$$

und es ist mithin auch die im §. 136. vorkommende Gröſse μ_2 ausgedrückt durch

$$\mathfrak{Arc\,Tang}(\mu_2) = \log \sqrt[4]{\left(\frac{1-k^2 \operatorname{sn}^2 v \operatorname{sn}^2(u-a)}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 v \operatorname{sn}^2(u+a)} \cdot \frac{1-k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2(v-a)}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2(v+a)}\right)},$$

was mit der Formel (10.) im §. 44. übereinstimmt.

Setzen wir $b = 0$ in der Formel (1.), so wird sie

$$4. \quad \mathfrak{S}(u+v, a) + \mathfrak{S}(u-v, a) = 2\mathfrak{S}(u, a) + \log \sqrt{\left(\frac{1-k^2 \operatorname{sn}^2 v \operatorname{sn}^2(u-a)}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 v \operatorname{sn}^2(u+a)}\right)}.$$

Setzt man aber in der Formel (1.) $v = 0$, so erhält man

$$5. \quad \mathfrak{S}(u, a+b) + \mathfrak{S}(u, a-b) = 2\mathfrak{S}(u, a) - u.k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b (\operatorname{sn}(a+b) - \operatorname{sn}(a-b))$$
$$+ \log \sqrt{\frac{1-k^2 \operatorname{sn}^2 b \operatorname{sn}^2(u-a)}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 b \operatorname{sn}^2(u+a)}}.$$

Will man diese Formeln auf cyklische Integrale übertragen, so muſs man den logarithmischen Ausdrücken zuvor folgende Form geben:

$$\log \sqrt{\frac{1-k^2 \operatorname{sn}^2 v \operatorname{sn}^2(u-a)}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 v \operatorname{sn}^2(u+a)}} = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{2k^2 \operatorname{sn}^2 v . A . B}{P^2 - k^2 \operatorname{sn}^2 v . (A^2 + B^2)}\right),$$
$$\log \sqrt{\frac{1-k^2 \operatorname{sn}^2 b \operatorname{sn}^2(u-a)}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 b \operatorname{sn}^2(u+a)}} = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{2k^2 \operatorname{sn}^2 b . A . B}{P^2 - k^2 \operatorname{sn}^2 b . (A^2 + B^2)}\right),$$

worin $A = \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn} u$, $B = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \operatorname{sn} a$ und $P = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u$ ist, so daſs $\operatorname{sn}(u-a) = \frac{A-B}{P}$ und $\operatorname{sn}(u+a) = \frac{A+B}{P}$ ist.

Wir formen den in der Gleichung (2.) enthaltenen logarithmischen Ausdruck noch um. Setzen wir

$\alpha+\beta=u-a,$ also $\alpha=\frac{u+v-a-b}{2},$ so ist $\alpha-\alpha'=0,$

$\alpha-\beta=v-b,$ - - $\beta=\frac{u-v-a+b}{2},$ - - $\alpha+\alpha'=u+v-a-b,$

$\alpha'+\beta'=u-b,$ - - $\alpha'=\frac{u+v-a-b}{2},$ - - $\beta-\beta'=-(a-b),$

$\alpha'-\beta'=v-a,$ - - $\beta'=\frac{u-v+a-b}{2},$ - - $\beta+\beta'=u-v.$

Da nun nach §. 42. ist

$$\sqrt[4]{\left(\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}^2(\alpha+\beta)\,\mathrm{sn}^2(\alpha-\beta)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2(\alpha+\alpha')\,\mathrm{sn}^2(\alpha-\alpha')}\cdot\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}^2(\alpha'+\beta')\,\mathrm{sn}^2(\alpha'-\beta')}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2(\beta+\beta')\,\mathrm{sn}^2(\beta-\beta')}\right)}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}(\alpha+\beta)\,\mathrm{sn}(\alpha-\beta)\,\mathrm{sn}(\alpha'+\beta')\,\mathrm{sn}(\alpha'-\beta')}{1-k^2\,\mathrm{sn}(\alpha+\alpha')\,\mathrm{sn}(\alpha-\alpha')\,\mathrm{sn}(\beta+\beta')\,\mathrm{sn}(\beta-\beta')}\right)},$$

so erhalten wir durch Substitution der vorigen Werthe die Gleichung

$$\sqrt[4]{\frac{(1-k^2\,\mathrm{sn}^2(u-a)\,\mathrm{sn}^2(v-b))\,(1-k^2\,\mathrm{sn}^2(u-b)\,\mathrm{sn}^2(v-a))}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2(u-v)\,\mathrm{sn}^2(a-b)}}$$
$$\sqrt{(1-k^2\,\mathrm{sn}(u-a)\,\mathrm{sn}(v-b)\,\mathrm{sn}(u-b)\,\mathrm{sn}(v-a))}.$$

Setzt man in dieser Gleichung $-a$ statt a und $-b$ statt b, so erhält man eine neue Gleichung, und wird die vorige durch dieselbe dividirt, so entsteht

$$6.\quad \mathfrak{S}(u+v,\,a+b)$$
$$=\mathfrak{S}(u,a)+\mathfrak{S}(u,b)+\mathfrak{S}(v,a)+\mathfrak{S}(v,b)-(u+v)(k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{sn}(a+b))$$
$$+\log\sqrt{\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}(u-a)\,\mathrm{sn}(u-b)\,\mathrm{sn}(v-a)\,\mathrm{sn}(v-b)}{1-k^2\,\mathrm{sn}(u+a)\,\mathrm{sn}(u+b)\,\mathrm{sn}(v+a)\,\mathrm{sn}(v+b)}}.$$

Werden die vorigen Werthe im zweiten Ausdrucke des §. 42. substituirt, so findet man

$$7.\quad \mathfrak{S}(u+v,\,a+b)$$
$$=\mathfrak{S}(u,a)+\mathfrak{S}(u,b)+\mathfrak{S}(v,a)+\mathfrak{S}(v,b)-(u+v)(k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{sn}(a+b))$$
$$+\log\sqrt{\frac{\mathrm{sn}(u-a)\,\mathrm{sn}(v-b)-\mathrm{sn}(u-b)\,\mathrm{sn}(v-a)}{\mathrm{sn}(u+b)\,\mathrm{sn}(v+a)-\mathrm{sn}(u+a)\,\mathrm{sn}(v+b)}}.$$

Wir übergehen die Aufstellung der Ausdrücke für das Cosinus- und Differente-Integral, welche sich leicht aus den vorigen herleiten lassen.

Zwölfter Abschnitt.

§. 139.

Erste Art der Berechnung von $\dfrac{\mathrm{lm}(a+u)-\mathrm{lm}(a-u)}{2}$, wenn $\mathrm{am}\,u$ und $\mathrm{am}\,a$ nebst dem Modul k gegeben sind.

Bei der Berechnung des Integrales $\mathfrak{S}(u,a) = u.\mathrm{el}\,a - \dfrac{\mathrm{lm}(a+u)-\mathrm{lm}(a-u)}{2}$ kommt es hauptsächlich auf die Berechnung der Differenz $\dfrac{\mathrm{lm}(a+u)-\mathrm{lm}(a-u)}{2}$ aus $\mathrm{am}\,u$, $\mathrm{am}\,a$ und dem Modul k an. Man kann nun zwar aus den drei gegebenen Gröfsen $\mathrm{am}(a+u)$ und $\pm\,\mathrm{am}(a-u)$ berechnen, und hieraus findet sich dann $\mathrm{lm}(a+u)$ und $\mathrm{lm}(a-u)$, nach den im §. 87. und §. 89. angegebenen Vorschriften; aber dieses Verfahren ist nicht mehr anzuwenden, wenn eine der beiden Gröfsen a und u imaginär ist, das zu berechnende Integral also entweder zur ersten oder dritten Classe gehört oder von cyklischer Natur ist. Es mufs also ein Verfahren der Berechnung entwickelt werden, welches auch dann anzuwenden ist, wenn entweder das Argument des Integrals oder sein Parameter imaginär ist. Leiten wir aus dem Argumente u und dem Modul k die immer kleiner werdenden Argumente u_1, u_2, u_3, u_4 etc. mit den noch viel rascher abnehmenden Moduln k_1, k_2, k_3, k_4 etc. nach §. 58. her, so ist, wenn die am angeführten Orte gebrauchte Bezeichnung auch hier angewandt wird,

$$u = \frac{u_1}{m_1} = \frac{u_2}{m_2} = \frac{u_3}{m_3} = \frac{u_4}{m_4} = \text{etc.}$$

Leiten wir nach demselben Verfahren aus dem Parameter a die immer kleiner werdenden Parameter a_1, a_2, a_3, a_4 etc. her, so ist auch

$$a = \frac{a_1}{m_1} = \frac{a_2}{m_2} = \frac{a_3}{m_3} = \frac{a_4}{m_4} = \text{etc.}$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man

$$a+u = \frac{a_1+u_1}{m_1} = \frac{a_2+u_2}{m_2} = \frac{a_3+u_3}{m_2} = \frac{a_4+u_4}{m_4} = \text{etc.},$$

$$a-u = \frac{a_1-u_1}{m_1} = \frac{a_2-u_2}{m_2} = \frac{a_3-u_3}{m_3} = \frac{a_4-u_4}{m_4} = \text{etc.}$$

Wegen dieser Gleichungen ist aber nach §. 87.

$$\mathrm{lm}(a+u) = \frac{E}{K}\cdot\frac{(u+a)^2}{2} + \log\frac{2}{1+\mathrm{dn}(a+u)} + 2\log\frac{2}{1+\mathrm{dn}(a_1+u_1)}$$
$$+ 4\log\frac{2}{1+\mathrm{dn}(a_2+u_2)} + \text{etc. und}$$

$$\mathrm{lm}(u-a) = \frac{E}{K}\cdot\frac{(u-a)^2}{2} + \log\frac{2}{1+\mathrm{dn}(u-a)} + 2\log\frac{2}{1+\mathrm{dn}(u_1-a_1)}$$
$$+ 4\log\frac{2}{1+\mathrm{dn}(u_2-a_2)} + \text{etc.},$$

wenn sich die in diesen Reihen vorkommenden cyklischen Differenten auf die sich rasch verkleinernden successiven Modul k_1, k_2, k_3, k_4 etc., wie im §. 87., beziehen.

Wird die untere Reihe von der oberen subtrahirt, so erhält man

$$\frac{\mathrm{lm}(a+u)-\mathrm{lm}(a-u)}{2} = \frac{E}{K}\cdot au + \log\sqrt{\frac{1+\mathrm{dn}(u-a)}{1+\mathrm{dn}(u+a)}} + 2\log\sqrt{\frac{1+\mathrm{dn}(u_1-a_1)}{1+\mathrm{dn}(u_1+a_1)}}$$
$$+ 4\log\sqrt{\frac{1+\mathrm{dn}(u_2-a_2)}{1+\mathrm{dn}(u_2+a_2)}} + \text{etc.}$$

Bezeichnen wir die Summe der logarithmischen Glieder dieser rasch convergirenden Reihe durch $\mathfrak{U}$, so haben wir

$$\frac{\mathrm{lm}(a+u)-\mathrm{lm}(a-u)}{2} = \frac{E}{K}\cdot au + \mathfrak{U}.$$

Wir entwickeln nun die einzelnen Glieder der Reihe $\mathfrak{U}$. Nach §. 33. ist

$$\log\sqrt{\frac{1+\mathrm{dn}(u-a)}{1+\mathrm{dn}(u+a)}} = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{tn}\,a}{\mathrm{tn}\,u}\right) - \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{dn}\,u\ \mathrm{tn}\,a}{\mathrm{dn}\,a\ \mathrm{tn}\,u}\right) \text{ oder auch}$$
$$= \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{tn}\,a}\right) - \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{dn}\,a\ \mathrm{tn}\,u}{\mathrm{dn}\,u\ \mathrm{tn}\,a}\right),$$

indem man a mit u vertauschen darf, ohne daſs der Ausdruck auf der linken Seite dadurch geändert wird. Hiernach ist also zunächst, wenn $a < u$ angesehen wird,

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{tn}\,a}{\mathrm{tn}\,u}\right) + 2\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{tn}\,a_1}{\mathrm{tn}\,u_1}\right) + 4\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{tn}\,a_2}{\mathrm{tn}\,u_2}\right) + \text{etc.}$$
$$- \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{dn}\,u\ \mathrm{tn}\,a}{\mathrm{dn}\,a\ \mathrm{tn}\,u}\right) - 2\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{dn}\,u_1\ \mathrm{tn}\,a_1}{\mathrm{dn}\,a_1\ \mathrm{tn}\,u_1}\right) - 4\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{dn}\,u_2\ \mathrm{tn}\,a_2}{\mathrm{dn}\,a_2\ \mathrm{tn}\,u_2}\right) - \text{etc.},$$

und wenn $a > u$ ist, so wird man in dieser Reihe durchgängig a mit u vertauschen.

Die negativen Glieder dieser Reihe gestatten noch eine einfachere Darstellung. Da nämlich nach Formel (20. §. 53.)

$$\mathrm{tn}\,u = (1+k_1)\cdot\frac{\mathrm{tn}\,u_1}{\mathrm{dn}\,u_1} \quad \text{und also auch} \quad \mathrm{tn}\,a = (1+k_1)\cdot\frac{\mathrm{tn}\,a_1}{\mathrm{dn}\,a_1} \text{ ist, so ist}$$
$$\frac{\mathrm{dn}\,u_1\ \mathrm{tn}\,a_1}{\mathrm{dn}\,a_1\ \mathrm{tn}\,u_1} = \frac{\mathrm{tn}\,a}{\mathrm{tn}\,u}, \quad \text{eben so} \quad \frac{\mathrm{dn}\,u_2\,.\,\mathrm{tn}\,a_2}{\mathrm{dn}\,a_2\,.\,\mathrm{tn}\,u_2} = \frac{\mathrm{tn}\,a_1}{\mathrm{tn}\,u_1} \text{ u. s. w.}$$

Wird hiervon Gebrauch gemacht, so ist

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{tn}\,a}{\mathrm{tn}\,u}\right) + 2\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{tn}\,a_1}{\mathrm{tn}\,u_1}\right) + 4\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{tn}\,a_2}{\mathrm{tn}\,u_2}\right) + 8\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{tn}\,a_3}{\mathrm{tn}\,u_3}\right) + \text{etc.}$$
$$- \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{dn}\,u\ \mathrm{tn}\,a}{\mathrm{dn}\,a\ \mathrm{tn}\,u}\right) - 2\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{tn}\,a}{\mathrm{tn}\,u}\right) - 4\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{tn}\,a_1}{\mathrm{tn}\,u_1}\right) - 8\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{tn}\,a_2}{\mathrm{tn}\,u_2}\right) - \text{etc.};$$

woraus zu ersehen, dafs dieselben hyperbolischen Arcus, welche im negativen Theile der Reihe vorkommen, mit Ausnahme des allerersten, auch in dem positiven Theile der Reihe enthalten sind; wodurch die Rechnung ungemein erleichtert wird. Setzen wir zu noch gröfserer Abkürzung

$$\mathfrak{Tang}\,\mu = \frac{\operatorname{dn} u \operatorname{tn} a}{\operatorname{dn} a \operatorname{tn} u}, \quad \mathfrak{Tang}\,\mu_1 = \frac{\operatorname{tn} a}{\operatorname{tn} u}, \quad \mathfrak{Tang}\,\mu_2 = \frac{\operatorname{tn} a_1}{\operatorname{tn} u_1}, \quad \mathfrak{Tang}\,\mu_3 = \frac{\operatorname{tn} a_2}{\operatorname{tn} u_2} \text{ etc.},$$

so haben wir die folgende einfache Darstellung:

$$1. \quad \mathfrak{U} = (\mu_1 - \mu) + 2(\mu_2 - \mu_1) + 4(\mu_3 - \mu_2) + 8(\mu_4 - \mu_3) + 16(\mu_5 - \mu_4) + \text{etc.},$$

und es handelt sich nur noch um die Feststellung eines Mechanismus der Berechnung der Gröfsen μ, μ_1, μ_2, μ_3 etc. oder auch ihrer hyperbolischen Tangenten.

Wir leiten zunächst aus $\operatorname{am} u = \varphi$, $\operatorname{am} a = \alpha$ und dem Modul k, indem wir $\Delta = \sqrt{(1 - k^2 \sin^2\varphi)}$ und $\Delta' = \sqrt{(1 - k^2 \sin^2\alpha)}$ setzen, die Gröfsen

$$2. \quad \begin{cases} \Delta_1 = \sqrt{\left(\dfrac{n+\Delta}{m+\Delta} \cdot m m_1\right)}, \quad \Delta_2 = \sqrt{\left(\dfrac{n_1+\Delta_1}{m_1+\Delta_1} \cdot m_1 m_2\right)}, \\ \qquad \Delta_3 = \sqrt{\left(\dfrac{n_2+\Delta_2}{m_2+\Delta_2} \cdot m_2 m_3\right)}, \quad \ldots . \\ \Delta'_1 = \sqrt{\left(\dfrac{n+\Delta'}{m+\Delta'} \cdot m m_1\right)}, \quad \Delta'_2 = \sqrt{\left(\dfrac{n_1+\Delta'_1}{m_1+\Delta'_1} \cdot m_1 m_2\right)}, \\ \qquad \Delta'_3 = \sqrt{\left(\dfrac{n_2+\Delta'_2}{m_2+\Delta'_2} \cdot m_2 m_3\right)}, \quad \ldots . \end{cases}$$

her. Da $\operatorname{tn} u_1 = \dfrac{\Delta_1}{m} \cdot \operatorname{tn} u$ und eben so auch $\operatorname{tn} a_1 = \dfrac{\Delta'_1}{m} \cdot \operatorname{tn} a$ ist, so ist $\dfrac{\operatorname{tn} a_1}{\operatorname{tn} u_1} = \dfrac{\Delta'_1}{\Delta_1} \cdot \dfrac{\operatorname{tn} a}{\operatorname{tn} u}$, also

$$3. \quad \begin{cases} \mathfrak{Tang}\,\mu_2 = \dfrac{\Delta'_1}{\Delta_1} \cdot \mathfrak{Tang}\,\mu_1, \text{ eben so ist} \\ \mathfrak{Tang}\,\mu_3 = \dfrac{\Delta'_2}{\Delta_2} \cdot \mathfrak{Tang}\,\mu_2, \\ \mathfrak{Tang}\,\mu_4 = \dfrac{\Delta'_3}{\Delta_3} \cdot \mathfrak{Tang}\,\mu_3, \\ \mathfrak{Tang}\,\mu_5 = \dfrac{\Delta'_4}{\Delta_4} \cdot \mathfrak{Tang}\,\mu_4 \\ \qquad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Die erste dieser Gröfsen ist $\mathfrak{Tang}\,\mu_1 = \dfrac{\operatorname{tn} a}{\operatorname{tn} u} = \dfrac{\operatorname{tang} \alpha}{\operatorname{tang} \varphi}$, und hieraus findet sich $\mathfrak{Tang}\,\mu = \dfrac{\Delta}{\Delta'} \cdot \mathfrak{Tang}\,\mu_1$.

Die Berechnung der Gröfsen μ, μ_1, μ_2, μ_3 etc. geht also sehr einfach von Statten, wenn man, falls a und u beide reell oder beide imagi-

När sind, eine Tabelle der Logarithmen der hyperbolischen Functionen zu Hülfe nimmt. Da überhaupt $\mathfrak{Tang}\,\mu_{r+1} = \frac{\triangle'_r}{\triangle_r} \cdot \mathfrak{Tang}\,\mu_r$ ist und bei einiger Gröfse von r (etwa $r = 4$, bei einer Rechnung mit zehn Decimalziffern,) schon $\triangle_r$ hinlänglich genau $= \eta$, also auch $\triangle'_r = \eta$ wird, so ist dann $\mathfrak{Tang}\,\mu_{r+1} = \mathfrak{Tang}\,\mu_r$, oder $\mu_{r+1} = \mu_r$. Die Gröfsen μ, μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 etc. nähern sich also sehr rasch dem Verhältnisse der Gleichheit, und eine Folge davon ist, dafs die Reihe (1.) sehr rasch convergirt. Bei einer Rechnung mit zehn Decimalziffern ist schon das Glied $16(\mu_5 - \mu_4) = 0$.

Da $\mathfrak{Tang}\,\mu_{r+1} = \frac{\operatorname{tn} a_r}{\operatorname{tn} u_r} = \frac{\operatorname{tang}(a_r)}{\operatorname{tang}(u_r)}$ ist, wenn r grofs genug genommen wird und $a_r = \eta a$, wie auch $u_r = \eta u$ wird, so nähert sich $\mathfrak{Tang}\,\mu_r$ bei der Vergröfserung des Index r sehr rasch der Grenze $\frac{\operatorname{tang}(\eta a)}{\operatorname{tang}(\eta u)}$.

Wenn $\operatorname{am} a > \operatorname{am} u$ ist und die Gröfsen a und u beide reell oder beide imaginär sind, so hat man in den vorigen Formeln nur a mit u, φ mit α, also $\triangle$, $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$ etc. mit $\triangle'$, $\triangle'_1$, $\triangle'_2$, $\triangle'_3$ etc. zu vertauschen.

Das Verhältnifs $\frac{E}{K}$ wird nach der Formel $\frac{E}{K} = 1 - t$ im §. 84. berechnet und die Gröfsen a und u hat man nun nach den im §. 58. und seinem Zusatze entwickelten Formeln zu berechnen, weil dieselben Hülfsgröfsen dabei angewandt werden, welche zur Berechnung der Glieder der Reihe $\mathfrak{U}$ dienen.

Anmerkung. Setzt man den Gleichungen (3.) noch die zur Berechnung von μ_1 dienende an die Spitze, so sind sie

$\mathfrak{Tang}\,\mu_1 = \frac{\triangle'}{\triangle} \cdot \mathfrak{Tang}\,\mu$, $\mathfrak{Tang}\,\mu_2 = \frac{\triangle'_1}{\triangle_1} \cdot \mathfrak{Tang}\,\mu_1$, $\mathfrak{Tang}\,\mu_3 = \frac{\triangle'_2}{\triangle_2} \cdot \mathfrak{Tang}\,\mu_2$ u. s. w.

und hiernach werden nun alle Gröfsen $\mathfrak{Tang}\,\mu_1$, $\mathfrak{Tang}\,\mu_2$, $\mathfrak{Tang}\,\mu_3$ etc. aus der ersten $\mathfrak{Tang}\,\mu = \frac{\operatorname{tang}\alpha \sqrt{(1 - k^2 \sin^2\varphi)}}{\operatorname{tang}\varphi \sqrt{(1 - k^2 \sin^2\alpha)}}$ nach einem sich ganz gleichbleibenden Gesetze berechnet.

Da $\mathfrak{Tang}\,\mu = \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{cnc} u} \cdot \frac{\operatorname{cnc} a}{\operatorname{cn} a}$ ist, so wird man die Gröfsen φ' und α' nach den Formeln $\operatorname{tang}\varphi' = \frac{1}{k' \operatorname{tang}\varphi}$ und $\operatorname{tang}\alpha' = \frac{1}{k' \operatorname{tang}\alpha}$ berechnen und dann ist, wenn a und u beide reell sind,

$$\mathfrak{Tang}\,\mu = \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'} \cdot \frac{\cos\alpha'}{\cos\alpha}.$$

Zugleich ist dann

$$\triangle = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi'} \quad \text{und} \quad \triangle' = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha'}.$$

§. 140.

Erste Art der Berechnung der Integrale $\mathfrak{S}(u,a)$, $\mathfrak{E}(u,a)$ und $\mathfrak{D}(u,a)$ unter Beschränkung auf den Gebrauch der gewöhnlichen Tafeln.

Da das Integral $\mathfrak{S}(u,a) = u.\,\mathrm{el}\,a - \frac{\mathrm{lm}(a+u) - \mathrm{lm}(a-u)}{2}$ ist, so besteht seine Berechnung aus drei getrennten Acten. Setzen wir

$$\mathrm{el}\,a = \frac{E}{K}.a + \mathfrak{A} \quad \text{und} \quad \frac{\mathrm{lm}(a+u) - \mathrm{lm}(a-u)}{2} = \frac{E}{K}.au + \mathfrak{U},$$

so ist $u.\,\mathrm{el}\,a = \frac{E}{K}.au + \mathfrak{A}.u$ und es hebt sich also, wenn dieser Werth substituirt wird, noch ein Glied auf, da

$$1. \quad \mathfrak{S}(u,a) = \mathfrak{A}.u - \mathfrak{U}.$$

Wenden wir nun dieselbe Bezeichnung an, wie im §. 139. und setzen $\mathrm{am}\,u = \varphi$, $\mathrm{am}\,a = \alpha$, $\mathrm{tang}\,\varphi' = \frac{1}{k'\,\mathrm{tang}\,\varphi}$ und $\mathrm{tang}\,\alpha' = \frac{1}{k'\,\mathrm{tang}\,\alpha}$, also

$$\Delta = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi'}, \quad \Delta' = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha'}, \quad \mathfrak{Tang}\,\mu = \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'}.\frac{\cos\alpha'}{\cos\alpha},$$

so ist, dem §. 86. gemäfs,

$$2. \quad \mathfrak{A} = \Delta'_1\sqrt{\frac{(m-\Delta')(\Delta'-n)}{m m_1}} + 2.\Delta'_2\sqrt{\frac{(m_1-\Delta'_1)(\Delta'_1-n_1)}{m_1 m_2}}$$
$$+ 4.\Delta'_3\sqrt{\frac{(m_2-\Delta'_2)(\Delta'_2-n_2)}{m_2 m_3}} + 8.\Delta'_4\sqrt{\frac{(m_3-\Delta'_3)(\Delta'_3-n_3)}{m_3 m_4}} + \text{etc.}$$

Der Factor u giebt eine von den Formeln

$$3. \quad \begin{cases} \sin(\eta u) = \sin\varphi.\left(\frac{2m_1}{m+\Delta}.\frac{2m_2}{m_1+\Delta_1}.\frac{2m_3}{m_2+\Delta_2}.\frac{2m_4}{m_3+\Delta_3}\ldots\right), \\ \cos(\eta u) = \cos\varphi.\left(\frac{2\Delta_1}{n+\Delta}.\frac{2\Delta_2}{n_1+\Delta_1}.\frac{2\Delta_3}{n_2+\Delta_2}.\frac{2\Delta_4}{n_3+\Delta_3}\ldots\right), \\ \mathrm{tang}(\eta u) = \mathrm{tang}\,\varphi.\left(\frac{\Delta_1}{m}.\frac{\Delta_2}{m_1}.\frac{\Delta_3}{m_2}.\frac{\Delta_4}{m_3}\ldots\right), \end{cases}$$

Die Berechnung des Parameters a aus $\mathrm{am}\,a = \alpha$ ist der Formel (1.) gemäfs nicht mehr nöthig. Will man ihn jedoch berechnen, so geschieht es auch nach den Formeln (3.) und man hat zu dem Ende nur a für u, α für φ und Δ', Δ'_1, Δ'_2, Δ'_3, Δ'_4 etc. für Δ, Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 etc. in jenen Formeln zu setzen.

Das Glied $\mathfrak{U}$ giebt, wie im §. 139., die Reihe

$$4. \quad \mathfrak{U} = (\mu_1-\mu) + 2(\mu_2-\mu_1) + 4(\mu_3-\mu_2) + 8(\mu_4-\mu_3) + \text{etc.}$$

Die Modular-Zahlen oder Modular-Brüche sind dieselben, wie im §. 56.; auch η hat hier dieselbe Bedeutung, wie am angeführten Orte. Die Gröfsen Δ, Δ_1, Δ_2, Δ_3 etc., ferner Δ', Δ'_1, Δ'_2, Δ'_3 etc. und μ_1, μ_2,

μ_3, μ_4 etc. werden nach den im §. 139. und in der beigefügten Anmerkung angegebenen Formeln berechnet.

Wenn $\alpha > \varphi$ ist, so wird man alle von α abhängigen Gröſsen mit den von φ abhängigen, jedoch nur in der Reihe (4.), oder eigentlich in den Formeln (3.) des §. 139. vertauschen, da $\mathfrak{U}$ eben so von α als von φ abhängt.

Da nach §. 116. $\mathfrak{C}(u, a) = k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{snc} u \,.\, u - \mathfrak{S}(u, a)$ und $\mathfrak{D}(u, a) = \operatorname{tn} a \operatorname{dn} a \,.\, u - \mathfrak{S}(u, a)$ ist, so erhalten wir

$$5. \quad \mathfrak{C}(u, a) = (k^2 \sin\alpha \sin\alpha' - \mathfrak{A})u + \mathfrak{U},$$

$$6. \quad \mathfrak{D}(u, a) = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} - \mathfrak{A}\Big).u + \mathfrak{U}.$$

Setzt man $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, so wird $\mathfrak{U} = 0$, $u = K = \frac{\frac{1}{2}\pi}{\eta}$, also ist

$$\mathfrak{S}(K, a) = \tfrac{1}{2}\pi \,.\, \frac{\mathfrak{A}}{\eta},$$

$$C(K, a) = \tfrac{1}{2}\pi (k^2 \sin\alpha \sin\alpha' - \mathfrak{A}) \,.\, \frac{1}{\eta},$$

$$\mathfrak{D}(K, a) = \tfrac{1}{2}\pi \Big(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} - \mathfrak{A}\Big) \,.\, \frac{1}{\eta}.$$

§. 141.

Erste Art der Berechnung der Integrale $S(u, a)$, $C(u, a)$, $D(u, a)$ unter der Beschränkung auf den Gebrauch der gewöhnlichen Tafeln.

Um die Ausdrücke für die Integrale der ersten Classe zu erhalten, brauchen wir in den Formeln des §. 140., welche a enthalten, nur ai für a zu setzen, wobei die Gröſsen $\triangle'$, $\triangle'_1$, $\triangle'_2$, $\triangle'_3$, $\triangle'_4$ etc. reell bleiben. Setzen wir nun wieder $\operatorname{am} u = \varphi$ und $\operatorname{am}' a = \alpha$, so wird, wie vorhin, wenn $\operatorname{tang}\varphi' = \frac{1}{k' \operatorname{tang}\varphi}$ und $\operatorname{tang}\alpha' = \frac{1}{k \operatorname{tang}\alpha}$ gesetzt wird,

$$\triangle = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi'}, \quad \text{aber} \quad \triangle' = \frac{1}{\sin\alpha'}.$$

Die Formeln (2.) im §. 139. und auch die Modular-Zahlen bleiben dieselben. Die Gröſsen μ aber werden sämmtlich imaginär. Setzt man aber $i\mu$ für μ, $i\mu_1$ für μ_1, $i\mu_2$ für μ_2 u. s. w., so wird μ durch die Formel

$$\operatorname{tang}\mu = \frac{k' \cos\varphi}{\cos\varphi'} \,.\, \sin\alpha \sin\alpha'$$

bestimmt.

Ferner ist nun

$$\tang \mu_1 = \frac{\triangle'}{\triangle} . \tang \mu,$$
$$\tang \mu_2 = \frac{\triangle'_1}{\triangle_1} . \tang \mu_1,$$
$$\tang \mu_3 = \frac{\triangle'_2}{\triangle_2} . \tang \mu_2,$$
$$\tang \mu_4 = \frac{\triangle'_3}{\triangle_3} . \tang \mu_3$$

u. s. w.

Die Formel (1.) des §. 140. wird, wenn man Ai für $\mathfrak{A}$ und Ui für $\mathfrak{U}$ setzt,

$$S(u, a) = A.u - U, \text{ also}$$
$$C(u, a) = \left(\frac{k \cos \alpha'}{\cos \alpha} - A\right) u + U,$$
$$D(u, a) = \left(\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} - A\right) u + U,$$

und für die in diesen drei Formeln vorkommenden Gröfsen A und U hat man die Reihen

$$A = \triangle'_1 \sqrt{\frac{(\triangle' - m)(\triangle' - n)}{m\, m_1}} + 2\triangle'_2 \sqrt{\frac{(\triangle'_1 - m_1)(\triangle'_1 - n_1)}{m_1\, m_2}}$$
$$+ 4\triangle'_3 \sqrt{\frac{(\triangle'_2 - m_2)(\triangle'_2 - n_2)}{m_2\, m_3}} + 8\triangle'_4 \sqrt{\frac{(\triangle'_3 - m_3)(\triangle'_3 - n_3)}{m_3\, m_4}} + \text{etc. und}$$
$$U = (\mu_1 - \mu) + 2(\mu_2 - \mu_1) + 4(\mu_3 - \mu_2) + 8(\mu_4 - \mu_3) + \text{etc.}$$

Setzt man $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, also $u = K$, so wird $U = 0$ und es ist also

$$S(K, a) = \tfrac{1}{2}\pi . \frac{A}{\eta},$$
$$C(K, a) = \tfrac{1}{2}\pi \left(\frac{k \cos \alpha'}{\cos \alpha} - A\right) . \frac{1}{\eta},$$
$$D(K, a) = \tfrac{1}{2}\pi \left(\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} - A\right) . \frac{1}{\eta}.$$

Die Berechnung des Factors u aus $\varphi = \text{am}\, u$ ist dieselbe wie im §. 140.

§. 142.

Erste Art der Berechnung der Integrale $'\mathfrak{S}(u, a)$, $'\mathfrak{C}(u, a)$, $'\mathfrak{D}(u, a)$ unter Beschränkung auf den Gebrauch der gewöhnlichen Tafeln.

Vertauscht man in der Formel (1.) des §. 140. den Modul k mit dem Modul k', wodurch sich diese Gleichung verwandeln mag in $\mathfrak{S}'(u, a) = \mathfrak{A}'.u - \mathfrak{U}'$, so hat man hierin noch ai statt a und ui statt u zu setzen.

Die Modular-Zahlen sind nun aus

$$1. \quad m = 1 \quad \text{und} \quad n = k$$

zu berechnen nach den Formeln

$$m_1 = \frac{m+n}{2}, \quad m_2 = \frac{m_1+n_1}{2}, \quad m_3 = \frac{m_2+n_2}{2} \quad \text{etc.}$$
$$n_1 = \sqrt{(mn)}, \quad n_2 = \sqrt{(m_1 n_1)}, \quad n_3 = \sqrt{(m_2 n_2)} \quad \text{etc.}$$

Setzt man ai statt a und ui statt u, wodurch sich $'\mathfrak{S}'(u, a)$ in $'\mathfrak{S}(u, a)$ und $\mathfrak{A}'$ in $i'\mathfrak{A}$, ferner $\mathfrak{U}'$ in $-'\mathfrak{U}$ ändert, so haben wir zunächst

$$2. \quad '\mathfrak{S}(u, a) = -'\mathfrak{A}.u + '\mathfrak{U}.$$

Ferner verwandelt sich

$$\triangle \text{ in } \triangle = \sqrt{(1 + k'^2 \operatorname{tn}^2 u)} \quad \text{und} \quad \triangle' \text{ in } \triangle' = \sqrt{(1 + k'^2 \operatorname{tn}^2 a)}.$$

Setzt man also $\operatorname{am} u = \varphi$ und $\operatorname{am} a = \alpha$, ferner $\operatorname{tang} \varphi' = \frac{1}{k' \operatorname{tang} \varphi}$ und $\operatorname{tang} \alpha' = \frac{1}{k' \operatorname{tang} \alpha}$, so ist

$$\triangle = \frac{1}{\sin \varphi'} \quad \text{und} \quad \triangle' = \frac{1}{\sin \alpha'}.$$

Die frühere Gröſse μ wird berechnet nach der Formel

$$\mathfrak{Tang}\, \mu = \frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{sn} u} \cdot \frac{\triangle}{\triangle'} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{Tang}\, \mu = \frac{\sin a \sin \alpha'}{\sin \varphi \sin \varphi'}.$$

Berechnet man hieraus die Gröſsen $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$, $\triangle_4$ etc., ferner $\triangle'_1$, $\triangle'_2$, $\triangle'_3$, $\triangle'_4$ etc. und auch noch μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 etc. nach den im §. 139. angegebenen Formeln, so erhält man

$$'\mathfrak{A} = \triangle'_1 \cdot \sqrt{\frac{(\triangle' - m)(\triangle' - n)}{m m_1}} + 2 . \triangle'_2 \cdot \sqrt{\frac{(\triangle'_1 - m_1)(\triangle'_1 - n_1)}{m_1 m_2}}$$
$$+ 4 . \triangle'_3 \cdot \sqrt{\frac{(\triangle'_2 - m_2)(\triangle'_2 - n_2)}{m_2 m_3}} + 8 . \triangle'_4 \cdot \sqrt{\frac{(\triangle'_3 - m_3)(\triangle'_3 - n_3)}{m_3 m_4}} + \text{etc. und}$$
$$'\mathfrak{U} = (\mu - \mu_1) + 2(\mu_1 - \mu_2) + 4(\mu_2 - \mu_3) + 8(\mu_3 - \mu_4) + \text{etc.}$$

Wenn $\varphi < \alpha$ ist, so wird man in den Formeln für $\mathfrak{Tang}\, \mu$, $\mathfrak{Tang}\, \mu_1$, $\mathfrak{Tang}\, \mu_2$ etc. α mit φ, $\triangle'$ mit $\triangle$, $\triangle'_1$ mit $\triangle_1$, $\triangle'_2$ mit $\triangle_2$ etc. vertauschen, oder $\mu + \frac{1}{2}\pi i$ statt μ, $\mu_1 + \frac{1}{2}\pi i$ statt μ_1, $\mu_2 + \frac{1}{2}\pi i$ statt μ_2 u. s. w. setzen, da dieses mit jenem auf Eines herauskommt. Der Factor u wird aus $\operatorname{am} u = \varphi$ nach den im Zusatze zu §. 58. angegebenen Formeln am bequemsten berechnet, wenn man auch in ihnen k mit k' vertauscht.

Für das Cosinus- und Differente-Integral erhält man die Ausdrücke

$$'\mathfrak{C}(u, a) = \left(\frac{k' \cos \alpha'}{\cos \alpha} - '\mathfrak{A}\right) . u + '\mathfrak{U}, \quad '\mathfrak{D}(u, a) = \left(\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} - '\mathfrak{A}\right) . u + '\mathfrak{U}.$$

Zusatz. Der Grad der Convergenz aller im §. 139 — §. 142. entwickelten Reihen hängt gar nicht von der Gröfse der Amplituden φ und α, sondern lediglich von der Gröfse des Moduls ab. Die im §. 140. entwickelten Reihen convergiren desto rascher, je kleiner der Modul k ist, und die so eben entwickelten Formeln convergiren desto rascher, je gröfser der Modul k ist. Ist daher in jenen Formeln der Modul k wenig von Eins, oder in diesen wenig von Null verschieden, so wird man die Integrale der zweiten Classe auf die der vierten, oder diese auf jene zurückführen.

Setzt man in der Gleichung $\mathrm{el}\, a = \frac{E}{K} a + \mathfrak{A}$, ai statt a, indem man zugleich den Modul k mit k' vertauscht, so erhält man

$$\mathfrak{El}' a = \frac{E'}{K'} \cdot a + {}'\mathfrak{A}.$$

Also ist

$$\mathrm{el}\, a + \mathfrak{El}' a = \left(\frac{E}{K} + \frac{E'}{K'}\right) a + \mathfrak{A} + {}'\mathfrak{A} \text{ oder } \frac{\mathrm{sn}\, a}{\mathrm{snc}\, a} = \left(\frac{E}{K} + \frac{E'}{K'} - 1\right) a + \mathfrak{A} + {}'\mathfrak{A}.$$

Da aber $\frac{E}{K} + \frac{E'}{K'} - 1 = \frac{\pi}{2KK'}$ ist, so ist

$$\mathfrak{A} + {}'\mathfrak{A} = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} - \frac{\pi a}{2KK'},$$

wenn $\mathrm{am}\, a = \alpha$ und $\mathrm{amc}\, a = \alpha$ gesetzt wird.

Vertauscht man auch in der Gleichung

$$\frac{\mathrm{lm}(a+u) - \mathrm{lm}(a-u)}{2} = \frac{E}{K} au + \mathfrak{U}$$

den Modul k mit k', indem man ai statt a und ui statt u setzt, so verwandelt sie sich in

$$\frac{\mathfrak{Lm}'(a+u) - \mathfrak{Lm}'(a-u)}{2} = \frac{E'}{K'} au + {}'\mathfrak{U};$$

daher ist

$$\frac{\mathrm{lm}(a+u) - \mathrm{lm}(a-u)}{2} + \frac{\mathfrak{Lm}'(a+u) - \mathfrak{Lm}(a-u)}{2} = \left(\frac{E}{K} + \frac{E'}{K'}\right) au + \mathfrak{U} + {}'\mathfrak{U}.$$

Der Ausdruck auf der linken Seite reducirt sich nach §. 72. Formel (5.) auf $au + \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{sn}\, a}{\mathrm{snc}\, a} \cdot \frac{\mathrm{sn}\, u}{\mathrm{snc}\, u}\right)$; daher ist, wenn $\mathrm{am}\, u = \varphi$ und $\mathrm{amc}\, u = \varphi'$ gesetzt wird,

$$\mathfrak{U} + {}'\mathfrak{U} = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'}\right) - \frac{\pi a u}{2KK'}.$$

Hiernach erhalten wir für die Integrale der ersten Classe auch die Ausdrücke:

$$\mathfrak{S}(u,a) = \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} - {}'\mathfrak{A}\right).u + {}'\mathfrak{U} - \text{Arc Tang}\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'}.\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'}\right),$$
$$\mathfrak{C}(u,a) = \left({}'\mathfrak{A} - \frac{k'\cos\alpha'}{\cos\alpha}\right).u - {}'\mathfrak{U} + \text{Arc Tang}\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'}.\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'}\right),$$
$$\mathfrak{D}(u,a) = {}'\mathfrak{A}.u - {}'\mathfrak{U} + \text{Arc Tang}\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'}.\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'}\right);$$

und auch in diesen Formeln ist, wie in den vorigen, u nach den im Zusatze zu §. 58. angegebenen Ausdrücken zu berechnen aus $\text{am}\,u = \varphi$, indem man in den genannten Ausdrücken k mit k' vertauscht, damit die Modularzahlen mit den vorigen dieselben seien. Die Formeln am Schlusse des §. 140. verwandeln sich jetzt in

$$\mathfrak{S}(K,a) = \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} - {}'\mathfrak{A}\right)K - \frac{\pi a}{2K'},$$
$$\mathfrak{C}(K,a) = \left({}'\mathfrak{A} - \frac{k'\cos\alpha'}{\cos\alpha}\right)K + \frac{\pi a}{2K'},$$
$$\mathfrak{D}(K,a) = {}'\mathfrak{A}.K + \frac{\pi a}{2K'}.$$

Das Argument α ist ebenfalls nach den im Zusatze zu §. 58. angegebenen Formeln zu berechnen.

Umgekehrt erhält man

$${}'\mathfrak{S}(u,a) = \left(\mathfrak{A} - \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'}\right) \;.\; u - \mathfrak{U} + \text{Arc Tang}\left(\frac{\sin\alpha\;\sin\varphi}{\sin\alpha'\sin\varphi'}\right),$$
$${}'\mathfrak{C}(u,a) = (\mathfrak{A} - k^2\sin\alpha\sin\alpha').u - \mathfrak{U} + \text{Arc Tang}\left(\frac{\sin\alpha\;\sin\varphi}{\sin\alpha'\sin\varphi'}\right),$$
$${}'\mathfrak{D}(u,a) = \mathfrak{A}.u - \mathfrak{U} + \text{Arc Tang}\left(\frac{\sin\alpha\;\sin\varphi}{\sin\alpha'\sin\varphi'}\right).$$

§. 143.

Erste Art der Berechnung der Integrale $'S(u,a)$, $'C(u,a)$, $'D(u,a)$ unter Beschränkung auf den Gebrauch der gewöhnlichen Tafeln.

Nehmen wir wieder dieselben Modular-Zahlen wie im §. 142., und setzen ai statt a, wodurch sich $'\mathfrak{A}$ in $i.'A$ und $'\mathfrak{U}$ in $i.'U$ verwandeln mag, so haben wir

$$'S(u,a) = -'A.u + 'U.$$

Es verwandelt sich nun Δ' in $\Delta' = \sqrt{(1-k'^2\,\text{sn}'^2 a)}$. Setzen wir also wieder $\text{am}\,u = \varphi$, $\text{am}'a = \alpha$, und berechnen $\text{tang}\,\varphi' = \frac{1}{k'\,\text{tang}\,\varphi}$, ferner $\text{tang}\,\alpha' = \frac{1}{k\,\text{tang}\,\alpha}$, so ist

$$\Delta = \frac{1}{\sin\varphi'} \quad \text{und} \quad \Delta' = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha'}.$$

Hieraus berechne man $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$, $\triangle_4$ etc. und $\triangle'_1$, $\triangle'_2$, $\triangle'_3$, $\triangle'_4$ etc., wie im §. 139. mit den kurz vorher angegebenen Modular-Zahlen. Ferner sei $\tang(\frac{1}{2}\pi-\mu)=\frac{\text{tn}'a.\triangle}{\text{sn}\,u.\triangle'}$ und also

$$\tang\mu = \frac{k\cos\alpha}{\cos\alpha'}.\sin\varphi\sin\varphi',$$

woraus man berechnet

$$\tang\mu_1 = \frac{\triangle}{\triangle'}.\tang\mu,$$

$$\tang\mu_2 = \frac{\triangle_1}{\triangle'_1}.\tang\mu_1,$$

$$\tang\mu_3 = \frac{\triangle_2}{\triangle'_2}.\tang\mu_2,$$

$$\tang\mu_4 = \frac{\triangle_3}{\triangle'_3}.\tang\mu_3,$$

u. s. w.

so ist

$$'A = \triangle'_1.\sqrt{\frac{(m-\triangle')(\triangle'-n)}{m\,m_1}} + 2.\triangle'_2.\sqrt{\frac{(m_1-\triangle'_1)(\triangle'_1-n_1)}{m_1\,m_2}}$$
$$+ 4.\triangle'_3.\sqrt{\frac{(m_2-\triangle'_2)(\triangle'_2-n_2)}{m_2\,m_3}} + 8.\triangle'_4.\sqrt{\frac{(m_3-\triangle'_3)(\triangle'_3-m_3)}{m_3\,m_4}} + \text{etc.}$$

und

$$'U = (\mu_1-\mu)+2(\mu_2-\mu_1)+4(\mu_3-\mu_2)+8(\mu_4-\mu_3)+\text{etc.}$$

Der Factor u aber ist nun wie im §. 142. nach einer von den Formeln

$$\mathfrak{Tang}(\eta'u) = \sin\varphi\left(\frac{\triangle_1}{m}.\frac{\triangle_2}{m_1}.\frac{\triangle_3}{m_2}.\frac{\triangle_4}{m_3}\ldots\right),$$

$$\mathfrak{Sin}(\eta'u) = \tang\varphi\left(\frac{2m_1}{m+\triangle}.\frac{2m_2}{m_1+\triangle_1}.\frac{2m_3}{m_2+\triangle_2}.\frac{2m_4}{m_3+\triangle_3}\ldots\right),$$

$$\mathfrak{Cos}(\eta'u) = \frac{1}{\cos\varphi}\left(\frac{2\triangle_1}{n+\triangle}.\frac{2\triangle_2}{n_1+\triangle_1}.\frac{2\triangle_3}{n_2+\triangle_2}.\frac{2\triangle_4}{n_3+n_3}\ldots\right)$$

zu berechnen, in welchen wieder $\eta'=m_r=n_r$ gesetzt wird, so daſs nun $\eta'=\frac{\pi}{2K'}$ ist, da die Modular-Zahlen jetzt aus $m=1$ und $n=k$ berechnet worden sind.

Für die beiden übrigen Integrale der dritten Classe findet man die Formeln

$$'C(u,a) = (k'^2\sin\alpha\sin\alpha'-'A).u+'\mathfrak{U},$$

$$'D(u,a) = \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'}-'A\right)\;.\;u+'\mathfrak{U}.$$

Ferner ist $\text{el}'a=\frac{E'}{K'}.u+'A$, und da $'S(K,a)=(K-E)a-K.\text{el}'a+\frac{1}{2}\pi$ ist, so findet man $'S(K,a)=-K\left(\frac{E}{K}+\frac{E'}{K'}-1\right).a-K.'A+\frac{1}{2}\pi$, oder auch

$$'S(K,a) = \tfrac{1}{2}\pi - \eta' a - K.'A, \text{ also}$$
$$'C(K,a) = \tfrac{1}{2}\pi - \eta' a + (k'^2 \sin\alpha \sin\alpha' - 'A)K,$$
$$'D(K,a) = \tfrac{1}{2}\pi - \eta' a + \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} - 'A\right)K.$$

Zusatz 1. Man findet auch nun die Gleichungen

$$A + 'A = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} - \frac{\pi a}{2KK'},$$
$$U + 'U = \text{arc tang}\left(\frac{\sin\alpha \ \sin\varphi}{\sin\alpha' \ \sin\varphi'}\right) - \frac{\pi a u}{2KK'},$$

und werden sie benutzt, so verwandeln sich die Formeln des §. 141. in

$$S(u,a) = \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} - 'A\right)u - 'U - \text{arc tang}\left(\frac{\sin\alpha \ \sin\varphi}{\sin\alpha' \ \sin\varphi'}\right),$$
$$C(u,a) = ('A - k'^2 \sin\alpha \sin\alpha')u - 'U + \text{arc tang}\left(\frac{\sin\alpha \ \sin\varphi}{\sin\alpha' \ \sin\varphi'}\right),$$
$$D(u,a) = 'A.u - 'U + \text{arc tang}\left(\frac{\sin\alpha \ \sin\varphi}{\sin\alpha' \ \sin\varphi'}\right).$$

Den Factor u in diesen Formeln berechnet man am bequemsten nach den kurz vorher angegebenen Formeln vermittelst der gewöhnlichen hyperbolischen Functionen. Die Formeln am Schlusse des §. 141. verwandeln sich in

$$S(K,a) = K\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} - 'A\right) - \eta' a,$$
$$C(K,a) = K('A - k'^2 \sin\alpha \sin\alpha') + \eta' a,$$
$$D(K,a) = K.'A + \eta' a.$$

Die vorstehenden Formeln wird man benutzen können, wenn der Modul k wenig von Eins verschieden ist. Die Gröfse $\eta' a$ ist aus $\text{am}' a = \alpha$ nach einer von den Formeln

$$\sin\eta' a = \sin\alpha . \left(\frac{2m_1}{m + \triangle'} . \frac{2m_2}{m_1 + \triangle'_1} . \frac{2m_3}{m_2 + \triangle'_2} . \frac{2m_4}{m_3 + \triangle'_3} \dots\right),$$
$$\cos\eta' a = \cos\alpha . \left(\frac{2\triangle'_1}{n + \triangle'} . \frac{2\triangle'_2}{n_1 + \triangle'_1} . \frac{2\triangle'_3}{n_2 + \triangle'_2} . \frac{2\triangle'_4}{n_3 + \triangle'_3} \dots\right),$$
$$\text{tang}\,\eta' a = \text{tang}\,\alpha . \left(\frac{\triangle'_1}{m} . \frac{\triangle'_2}{m_1} . \frac{\triangle'_3}{m_2} . \frac{\triangle'_4}{m_3} \dots\right)$$

zu berechnen, in welchen die Modular-Zahlen aus $m = 1$ und $n = k$ hergeleitet sind und also $\eta' = \frac{\pi}{2K'} = m_r = n_r$ ist, wenn r grofs genug genommen wird; wie in §. 143. Der Factor K mufs nach §. 57. berechnet werden.

Zusatz 2. Umgekehrt können die Formeln des §. 143. auch noch also dargestellt werden:

$$'S(u,a) = \left(A - \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'}\right)u - U + \text{arc tang}\left(\frac{\sin\alpha\ \sin\varphi}{\sin\alpha'\ \sin\varphi'}\right),$$

$$'C(u,a) = \left(A - \frac{k\cos\alpha'}{\cos\alpha}\right)u - U + \text{arc tang}\left(\frac{\sin\alpha\ \sin\varphi}{\sin\alpha'\ \sin\varphi'}\right),$$

$$'D(u,a) = A\,.\,u - U + \text{arc tang}\left(\frac{\sin\alpha\ \sin\varphi}{\sin\alpha'\ \sin\varphi'}\right).$$

Der Factor u in diesen Ausdrücken ist nach den im §. 140. angegebenen Formeln zu berechnen. Wird der Werth $-'A = A - \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} + \frac{\pi a}{2KK'}$ auch in den Formeln am Schlusse des §. 143. substituirt, so erhält man

$$'S(K,a) = K\left(A - \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'}\right) + \tfrac{1}{2}\pi,$$

$$'C(K,a) = K\left(A - \frac{k\cos\alpha'}{\cos\alpha}\right) + \tfrac{1}{2}\pi,$$

$$'D(K,a) = K.A + \tfrac{1}{2}\pi;$$

und da

$$S(K,a) = K.A;\quad C(K,a) = K\left(\frac{k\cos\alpha'}{\cos\alpha} - A\right);\quad D(K,a) = K\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} - A\right)$$

ist, so ist

$$'D(K,a) - S(K,a) = \tfrac{1}{2}\pi,$$

$$'C(K,a) + C(K,a) = \tfrac{1}{2}\pi,$$

$$'S(K,a) + D(K,a) = \tfrac{1}{2}\pi;$$

was auch unmittelbar aus den Formeln (6.), (7.), (8.) §. 133. hervorgeht, wenn man in ihnen $u = K$, also $\text{snc}\, u = 0$ setzt.

§. 144.

Zweite Art der Berechnung von $\frac{\text{lm}(a+u) - \text{lm}(a-u)}{2}$.

Leiten wir aus a und u, wie in §. 59., die immer gröfser werdenden Argumente a_1, a_2, a_3, a_4 etc. und u_1, u_2, u_3, u_4 etc. mit den immer kleiner werdenden Moduln k_1, k_2, k_3, k_4 etc. her, so ist

$$a = \frac{a_1}{2m_1} = \frac{a_2}{4m_2} = \frac{a_3}{8m_3} = \frac{a_4}{16m_4}\ldots,$$

$$u = \frac{u_1}{2m_1} = \frac{u_2}{4m_2} = \frac{u_3}{8m_3} = \frac{u_4}{16m_4}\ldots,$$

wenn dieselben Modular-Zahlen angewandt werden, wie im §. 55., und also

$$a+u = \frac{a_1+u_1}{2m_1} = \frac{a_2+u_2}{4m_2} = \frac{a_3+u_3}{8m_3} = \frac{a_4+u_4}{16m_4} = \text{etc.},$$

$$a-u = \frac{a_1-u_1}{2m_1} = \frac{a_2-u_2}{4m_2} = \frac{a_3-u_3}{8m_3} = \frac{a_4-u_4}{16m_4} = \text{etc.}$$

Diesen Gleichungen gemäfs ist aber nach §. 89.

$$\text{lm}(a+u)$$
$$= \frac{E}{K}\cdot\frac{(a+u)^2}{2} + \tfrac{1}{2}\log\frac{1}{\text{dn}(a+u)} + \tfrac{1}{4}\log\frac{1}{\text{dn}(a_1+u_1)} + \tfrac{1}{8}\log\frac{1}{\text{dn}(a_2+u_2)} + \text{etc.},$$
$$\text{lm}(a-u)$$
$$= \frac{E}{K}\cdot\frac{(a-u)^2}{2} + \tfrac{1}{2}\log\frac{1}{\text{dn}(a-u)} + \tfrac{1}{4}\log\frac{1}{\text{dn}(a_1-u_1)} + \tfrac{1}{8}\log\frac{1}{\text{dn}(a_2-u_2)} + \text{etc.},$$

wenn die in diesen Ausdrücken vorkommenden Differenten sich der Reihe nach auf die immer kleiner werdenden Modul k, k_1, k_2, k_3 etc. beziehen.

Setzt man nun wieder, wie in §. 139.,

$$\frac{\text{lm}(a+u)-\text{lm}(a-u)}{2} = \frac{E}{K}\cdot au + \mathfrak{U},$$

so findet sich

$$\mathfrak{U} = \tfrac{1}{2}\log\sqrt{\frac{\text{dn}(a-u)}{\text{dn}(a+u)}} + \tfrac{1}{4}\log\sqrt{\frac{\text{dn}(a_1-u_1)}{\text{dn}(a_1+u_1)}} + \tfrac{1}{8}\log\sqrt{\frac{\text{dn}(a_2-u_2)}{\text{dn}(a_2+u_2)}}$$
$$+ \tfrac{1}{16}\log\sqrt{\frac{\text{dn}(a_3-u_3)}{\text{dn}(a_3+u_3)}} + \text{etc.}$$

Da $\log\sqrt{\frac{\text{dn}(a-u)}{\text{dn}(a+u)}} = \text{Arc Tang}(k^2\,\text{sn}\,a\,\text{snc}\,a\,\text{sn}\,u\,\text{snc}\,u)$ ist, so kann die Reihe auch also dargestellt werden:

$$\mathfrak{U} = \tfrac{1}{2}\text{Arc Tang}(k^2\,\text{sn}\,a\,\text{snc}\,a\,\text{sn}\,u\,\text{snc}\,u) + \tfrac{1}{4}\text{Arc Tang}(k_1^2\,\text{sn}\,a_1\,\text{snc}\,a_1\,\text{sn}\,u_1\,\text{snc}\,u_1)$$
$$+ \tfrac{1}{8}\text{Arc Tang}(k_2^2\,\text{sn}\,a_2\,\text{snc}\,a_2\,\text{sn}\,u_2\,\text{snc}\,u_2)$$
$$+ \tfrac{1}{16}\text{Arc Tang}(k_3^2\,\text{sn}\,a_3\,\text{snc}\,a_3\,\text{sn}\,u_3\,\text{snc}\,u_3) + \text{etc.}$$

Da aber, wie in §. 59., $\text{sn}\,u_1 = (1+k')\,\text{sn}\,u\,\text{snc}\,u$ und eben so auch $\text{sn}\,a_1 = (1+k_1)\,\text{sn}\,a\,\text{snc}\,a$ ist, so ist

$$k^2\,\text{sn}\,a\,\text{snc}\,a\,\text{sn}\,u\,\text{snc}\,u = \frac{1-k'^2}{(1+k')^2}\,\text{sn}\,u_1\,\text{sn}\,a_1 = \frac{1-k'}{1+k'}\,\text{sn}\,a_1\,\text{sn}\,u_1 = k_1\,\text{sn}\,a_1\,\text{sn}\,u_1.$$

Setzt man also

$$\text{Tang}\,\mu_1 = k_1\,\text{sn}\,a_1\,\text{sn}\,u_1,$$
$$\text{Tang}\,\mu_2 = k_2\,\text{sn}\,a_2\,\text{sn}\,u_2,$$
$$\text{Tang}\,\mu_3 = k_3\,\text{sn}\,a_3\,\text{sn}\,u_3,$$
$$\text{Tang}\,\mu_4 = k_4\,\text{sn}\,a_4\,\text{sn}\,u_4,$$

u. s. w.,

so haben wir die Reihe

$$1.\quad \mathfrak{U} = \tfrac{1}{2}\mu_1 + \tfrac{1}{4}\mu_2 + \tfrac{1}{8}\mu_3 + \tfrac{1}{16}\mu_4 + \tfrac{1}{32}\mu_5 + \text{etc.}$$

Es handelt sich also nur noch um die Ermittelung eines einfachen Mechanismus in der Berechnung der Arcus μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 etc. nach den vorhin angegebenen Formeln.

Berechnen wir aus $\nabla = \sqrt{(1-k^2 \operatorname{sn}^2 u)}$ die Gröſsen ∇_1, ∇_2, ∇_3 etc. nach den Formeln

$$2.\quad \nabla_1 = \tfrac{1}{2}\left(\nabla + \frac{n_1^2}{\nabla}\right),\quad \nabla_2 = \tfrac{1}{2}\left(\nabla_1 + \frac{n_2^2}{\nabla_1}\right),\quad \nabla_3 = \tfrac{1}{2}\left(\nabla_2 + \frac{n_3^2}{\nabla_2}\right) \text{ etc.}$$

und eben so aus $\nabla' = \sqrt{(1-k^2 \operatorname{sn}^2 a)}$ die Gröſsen ∇'_1, ∇'_2, ∇'_3, ∇'_4 etc. nach den Formeln

$$3.\quad \nabla'_1 = \tfrac{1}{2}\left(\nabla' + \frac{n_1^2}{\nabla'}\right),\quad \nabla'_2 = \tfrac{1}{2}\left(\nabla'_1 + \frac{n_2^2}{\nabla'_1}\right),\quad \nabla'_3 = \tfrac{1}{2}\left(\nabla'_2 + \frac{n_3^2}{\nabla'_2}\right) \text{ etc.};$$

setzt man weiter

$$\begin{array}{lcl}
\delta_1 = \frac{m-n}{2}.\operatorname{sn} u_1 & \text{und} & \delta'_1 = \frac{m-n}{2}.\operatorname{sn} a_1, \\
\delta_2 = \frac{m_1-n_1}{2}.\operatorname{sn} u_2 & - & \delta'_2 = \frac{m_1-n_1}{2}.\operatorname{sn} a_2, \\
\delta_3 = \frac{m_2-n_2}{2}.\operatorname{sn} u_3 & - & \delta'_3 = \frac{m_2-n_2}{2}.\operatorname{sn} a_3 \\
\text{u. s. w.} & & \text{u. s. w.}
\end{array}$$

so daſs, wie in §. 59.,

$$4.\quad \left\{\begin{array}{lcl}
\delta_1 = \frac{k^2}{2}.\operatorname{sn} u \operatorname{snc} u & \text{und} & \delta'_1 = \frac{k^2}{2}.\operatorname{sn} a \operatorname{snc} a, \\
\delta_2 = \frac{\nabla - \nabla_1}{2\nabla_1}.\delta_1 = \frac{\nabla.\delta_1}{2\nabla_1} - \frac{\delta_1}{2} & - & \delta'_2 = \frac{\nabla'.\delta'_1}{2\nabla'_1} - \frac{\delta'_1}{2}, \\
\delta_3 = \frac{\nabla_1 - \nabla_2}{2\nabla_2}.\delta_2 = \frac{\nabla_1.\delta_2}{2\nabla_2} - \frac{\delta_2}{2} & - & \delta'_3 = \frac{\nabla'_1.\delta'_2}{2\nabla'_2} - \frac{\delta'_2}{2}, \\
\delta_4 = \frac{\nabla_2 - \nabla_3}{2\nabla_3}.\delta_3 = \frac{\nabla_2.\delta_3}{2\nabla_3} - \frac{\delta_3}{2} & - & \delta'_4 = \frac{\nabla'_2.\delta'_3}{2\nabla'_3} - \frac{\delta'_3}{2}, \\
\delta_5 = \frac{\nabla_3 - \nabla_4}{2\nabla_4}.\delta_4 = \frac{\nabla_3.\delta_4}{2\nabla_4} - \frac{\delta_4}{2} & - & \delta'_5 = \frac{\nabla'_3.\delta'_4}{2\nabla'_4} - \frac{\delta'_4}{2} \\
\text{u. s. w.} & & \text{u. s. w.}
\end{array}\right.$$

ist; ferner $\operatorname{am} u_1 = \varphi_1$, $\operatorname{am} u_2 = \varphi_2$, $\operatorname{am} u_3 = \varphi_3$, $\operatorname{am} u_4 = \varphi_4$, ...
und $\operatorname{am} a_1 = \alpha_1$, $\operatorname{am} a_2 = \alpha_2$, $\operatorname{am} a_3 = \alpha_3$, $\operatorname{am} a_4 = \alpha_4$, ...,
damit

$$5.\quad \left\{\begin{array}{lcl}
\varphi_1 = 2\varphi - \operatorname{arc tang}\left(\frac{\delta_1}{\nabla_1}\right) & \text{und} & \alpha_1 = 2\alpha - \operatorname{arc tang}\left(\frac{\delta'_1}{\nabla'_1}\right), \\
\varphi_2 = 2\varphi_1 - \operatorname{arc tang}\left(\frac{\delta_2}{\nabla_2}\right) & - & \alpha_2 = 2\alpha_1 - \operatorname{arc tang}\left(\frac{\delta'_2}{\nabla'_2}\right), \\
\varphi_3 = 2\varphi_2 - \operatorname{arc tang}\left(\frac{\delta_3}{\nabla_3}\right) & - & \alpha_3 = 2\alpha_2 - \operatorname{arc tang}\left(\frac{\delta'_3}{\nabla'_3}\right), \\
\varphi_4 = 2\varphi_3 - \operatorname{arc tang}\left(\frac{\delta_4}{\nabla_4}\right) & - & \alpha_4 = 2\alpha_3 - \operatorname{arc tang}\left(\frac{\delta'_4}{\nabla'_4}\right) \\
\text{u. s. w.} & & \text{u. s. w.}
\end{array}\right.$$

sei, in welchen Formeln überhaupt arc tang $\left(\frac{\delta_r}{\nabla_r}\right)$ = arc sin $\left(\frac{\delta_r}{m_r}\right)$ und eben so auch arc tang $\left(\frac{\delta'_r}{\nabla'_r}\right)$ = arc sin $\left(\frac{\delta'_r}{m_r}\right)$ ist: so können durch diese leicht zu berechnenden Hülfsgröfsen, welche zu mehr als einem Zwecke dienen, die Gröfsen μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 etc. auf zwei verschiedene Arten ausgedrückt werden.

Da nämlich $\mathfrak{Tang}\,\mu_1 = k_1 \,\mathrm{sn}\, a_1 \,\mathrm{sn}\, u_1 = \frac{1-k'}{1+k'} \mathrm{sn}\, a_1 \,\mathrm{sn}\, u_1 = \frac{m-n}{2m_1} \mathrm{sn}\, a_1 \,\mathrm{sn}\, u_1$ ist, so erhält man, wenn $\delta'_1 = \frac{m-n}{2} \mathrm{sn}\, a_1$ substituirt wird, $\mathfrak{Tang}\,\mu_1 = \frac{\delta'_1}{m_1} \sin\varphi_1$ und wenn $\delta_1 = \frac{m-n}{2} \mathrm{sn}\, u_1$ substituirt wird, $\mathfrak{Tang}\,\mu_1 = \frac{\delta_1}{m_1} \sin\alpha_1$. Hiernach haben wir also die Formeln

$$6.\quad \begin{cases} \mathfrak{Tang}\,\mu_1 = \frac{\delta_1}{m_1}\sin\alpha_1 & \text{oder} \quad \mathfrak{Tang}\,\mu_1 = \frac{\delta'_1}{m_1}\sin\varphi_1, \\ \mathfrak{Tang}\,\mu_2 = \frac{\delta_2}{m_2}\sin\alpha_2 & - \quad \mathfrak{Tang}\,\mu_2 = \frac{\delta'_2}{m_2}\sin\varphi_2, \\ \mathfrak{Tang}\,\mu_3 = \frac{\delta_3}{m_3}\sin\alpha_3 & - \quad \mathfrak{Tang}\,\mu_3 = \frac{\delta'_3}{m_3}\sin\varphi_3, \\ \mathfrak{Tang}\,\mu_4 = \frac{\delta_4}{m_4}\sin\alpha_4 & - \quad \mathfrak{Tang}\,\mu_4 = \frac{\delta'_4}{m_4}\sin\varphi_4, \\ \text{u. s. w.} & \qquad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Da die überaus rasch abnehmenden Gröfsen δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 etc. oder auch δ'_1, δ'_2, δ'_3, δ'_4 etc. nicht alle positiv sein werden, so werden auch die sich ebenfalls rasch verkleinernden Arcus μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 etc. nicht alle positiv sein. Zugleich erhellet, dafs die Reihe $\mathfrak{U}$ einen hohen Grad der Convergenz hat; sie convergirt noch rascher, als die im §. 139. gefundene Reihe für $\mathfrak{U}$.

Die Gröfse u findet sich nach §. 59. mittelst der Reihe

$$7.\quad \begin{cases} \eta u = \mathrm{am}\, u - \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{\delta_1}{m_1}\right) - \frac{1}{4}\arcsin\left(\frac{\delta_2}{m_2}\right) - \frac{1}{8}\arcsin\left(\frac{\delta_3}{m_3}\right) - \text{etc. oder} \\ \eta u = \mathrm{am}\, u - \frac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{\delta_1}{\nabla_1}\right) - \frac{1}{4}\,\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{\delta_2}{\nabla_2}\right) - \frac{1}{8}\,\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{\delta_3}{\nabla_3}\right) - \text{etc.} \end{cases}$$

und den Parameter a erhält man mittelst der Reihe

$$8.\quad \begin{cases} \eta a = \mathrm{am}\, a - \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{\delta'_1}{m_1}\right) - \frac{1}{4}\arcsin\left(\frac{\delta'_2}{m_2}\right) - \frac{1}{8}\arcsin\left(\frac{\delta'_3}{m_3}\right) - \text{etc. oder} \\ \eta a = \mathrm{am}\, a - \frac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{\delta'_1}{\nabla'_1}\right) - \frac{1}{4}\,\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{\delta'_2}{\nabla'_2}\right) - \frac{1}{8}\,\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{\delta'_3}{\nabla'_3}\right) - \text{etc.} \end{cases}$$

Zusatz. Sind ηa und ηu berechnet, so erhält man für φ_1, φ_2, φ_3 etc. die Reihen

$$\varphi_1 = 2\eta u + \tfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta_2}{\nabla_2}\right) + \tfrac{1}{4}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta_3}{\nabla_3}\right) + \tfrac{1}{8}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta_4}{\nabla_4}\right) + \text{etc.},$$

$$\varphi_2 = 4\eta u + \tfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta_3}{\nabla_3}\right) + \tfrac{1}{4}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta_4}{\nabla_4}\right) + \tfrac{1}{8}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta_5}{\nabla_5}\right) + \text{etc.},$$

$$\varphi_3 = 8\eta u + \tfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta_4}{\nabla_4}\right) + \tfrac{1}{4}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta_5}{\nabla_5}\right) + \tfrac{1}{16}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta_6}{\nabla_6}\right) + \text{etc.}$$

u. s. w.

und für die Amplituden α_1, α_2, α_3, α_4 etc. die Reihen

$$\alpha_1 = 2\eta a + \tfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta'_2}{\nabla'_2}\right) + \tfrac{1}{4}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta'_3}{\nabla'_3}\right) + \tfrac{1}{8}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta'_4}{\nabla'_4}\right) + \text{etc.},$$

$$\alpha_2 = 4\eta a + \tfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta'_3}{\nabla'_3}\right) + \tfrac{1}{4}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta'_4}{\nabla'_4}\right) + \tfrac{1}{8}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta'_5}{\nabla'_5}\right) + \text{etc.},$$

$$\alpha_3 = 8\eta a + \tfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta'_4}{\nabla'_4}\right) + \tfrac{1}{4}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta'_5}{\nabla'_5}\right) + \tfrac{1}{8}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\delta'_6}{\nabla'_6}\right) + \text{etc.}$$

u. s. w.

§. 145.

Zweite Art der Berechnung der Integrale $\mathfrak{S}(u, a)$, $\mathfrak{C}(u, a)$, $\mathfrak{D}(u, a)$ unter Beschränkung auf den Gebrauch der gewöhnlichen Tafeln.

Setzen wir, wie in §. 140., wieder $\operatorname{el} a = \frac{E}{K}\cdot a + \mathfrak{A}$ und $\frac{\operatorname{lm}(a+u) - \operatorname{lm}(a-u)}{2} = \frac{E}{K}\cdot au + \mathfrak{U}$, so erhalten wir

$$1.\quad \mathfrak{S}(u, a) = \mathfrak{A}.u - \mathfrak{U}.$$

Setzen wir ferner wieder $\operatorname{am} u = \varphi$ und $\operatorname{am} a = \alpha$, und berechnen hieraus $\operatorname{tang}\varphi' = \frac{1}{k' \operatorname{tang}\varphi}$ und $\operatorname{tang}\alpha' = \frac{1}{k' \operatorname{tang}\alpha}$, so ist

$$2.\quad \mathfrak{C}(u, a) = (k^2 \sin\alpha \sin\alpha' - \mathfrak{A})u + \mathfrak{U},$$

$$3.\quad \mathfrak{D}(u, a) = \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} - \mathfrak{A}\right).u + \mathfrak{U}.$$

Weiter haben wir

$$\nabla = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi'},\quad \nabla' = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha'},\quad \delta_1 = \frac{k^2}{2}\sin\varphi\sin\varphi',\quad \delta'_1 = \frac{k^2}{2}.\sin\alpha\sin\alpha'.$$

Berechnet man hieraus die übrigen Hülfsgröfsen, wie in §. 144., so ist nach §. 89.

$$\mathfrak{A} = \delta'_1 + \delta'_2 + \delta'_3 + \delta'_4 + \delta'_5 + \delta'_6 + \text{etc.};$$

und nach §. 144. ist

$$\mathfrak{U} = \tfrac{1}{2}\mu_1 + \tfrac{1}{4}\mu_2 + \tfrac{1}{8}\mu_3 + \tfrac{1}{16}\mu_4 + \tfrac{1}{32}\mu_5 + \text{etc.},$$

in welcher Reihe also jedes Glied auf zwei verschiedene Arten berechnet werden kann. Den Factor u findet man nach einer von den beiden Reihen (7.) im §. 144., in welchen $\eta = m_r = n_r$ ist, wenn r groſs genug genommen wird.

Wird $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ gesetzt, also $\sin\varphi' = 0$, so ist auch $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 =$ etc. $= 0$; ferner $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 =$ etc. $= 0$, und $\mathfrak{U} = 0$, da auch $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 =$ etc. $= 0$ ist.

Daher erhalten wir wieder

$$\mathfrak{S}(K, a) = \mathfrak{A}.K,$$
$$\mathfrak{C}(K, a) = (k^2 \sin\alpha \sin\alpha' - \mathfrak{A}).K,$$
$$\mathfrak{D}(K, a) = \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} - \mathfrak{A}\right).K.$$

Den Factor K giebt die Formel $K = \frac{\frac{1}{2}\pi}{\eta}$.

§. 146.

Zweite Art der Berechnung der Integrale $S(u, a)$, $C(u, a)$, $D(u, a)$ unter der Beschränkung auf den Gebrauch der gewöhnlichen Tafeln.

Setzen wir in den Formeln des §. 145. ai für a, so erhalten wir schon die gesuchten Formeln; dadurch verwandelt sich $\text{am}\, a$ in $i\mathfrak{A}\text{m}\, a = i.\mathfrak{L}\, \text{am}' a$. Setzen wir also wieder $\text{am}\, u = \varphi$ und $\text{am}' a = \alpha$; ferner $\tan\varphi' = \frac{1}{k' \tan\varphi}$ und $\tan\alpha' = \frac{1}{k \tan\alpha}$, so ist $\text{amc}\, u = \varphi'$ und $\text{amc}' a = \alpha'$.

Die Gröſsen ∇, ∇_1, ∇_2, ∇_3 etc., wie auch δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 etc., und φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 etc. bleiben ungeändert; die übrigen Hülfsgröſsen aber ändern ihre Bedeutungen oder Werthe, wenn sich gleich die Gröſsen δ'_1, δ'_2, δ'_3 etc. in $i\delta'_1$, $i\delta'_2$, $i\delta'_3$, $i\delta'_4$ etc. verändern, weil sie in der That imaginär werden; ferner α_1, α_2, α_3 etc. in $i\alpha_1$, $i\alpha_2$, $i\alpha_3$ etc. und μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 etc. in $i\mu_1$, $i\mu_2$, $i\mu_3$, $i\mu_4$ etc. Da nun

$$\nabla = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi'}; \quad \nabla' = \frac{1}{\sin\alpha'}; \quad \delta_1 = \frac{k^2}{2}\sin\varphi\sin\varphi'; \quad \delta'_1 = \frac{k}{2}\cdot\frac{\cos\alpha'}{\cos\alpha}$$

ist, so berechne man hieraus die Hülfsgröſsen ∇_1, ∇_2, ∇_3 etc., ∇'_1, ∇'_2, ∇'_3 etc.; ferner δ_2, δ_3, δ_4 etc. und δ'_2, δ'_3, δ'_4, δ'_5 etc. und auch φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 etc. nach den in §. 144. angegebenen Formeln; die Gröſsen α_1, α_2, α_3 etc. aber nach den Formeln

$$\alpha_1 = 2\mathfrak{L}\alpha - \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\delta'_1}{\nabla'_1}\right),$$

$$\alpha_2 = 2\alpha_1 - \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\delta'_2}{\nabla'_2}\right),$$

$$\alpha_3 = 2\alpha_2 - \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\delta'_3}{\nabla'_3}\right),$$

u. s. w.;

ferner μ_1, μ_2, μ_3 etc. nach den Formeln

$$\tang\mu_1 = \frac{\delta_1}{m_1}\mathfrak{Sin}\,\alpha_1 \quad \text{oder} \quad \tang\mu_1 = \frac{\delta'_1}{m_1}\sin\varphi_1,$$

$$\tang\mu_2 = \frac{\delta_2}{m_2}\mathfrak{Sin}\,\alpha_2 \quad - \quad \tang\mu_2 = \frac{\delta'_2}{m_2}\sin\varphi_2,$$

$$\tang\mu_3 = \frac{\delta_3}{m_3}\mathfrak{Sin}\,\alpha_3 \quad - \quad \tang\mu_3 = \frac{\delta'_3}{m_3}\sin\varphi_3,$$

$$\tang\mu_4 = \frac{\delta_4}{m_4}\mathfrak{Sin}\,\alpha_4 \quad - \quad \tang\mu_4 = \frac{\delta'_4}{m_4}\sin\varphi_4,$$

u. s. w. u. s. w.

Da sich nun $\mathfrak{A}$ in iA und $\mathfrak{U}$ in iU verändert, so erhalten wir

$$S(u, a) = A.u - U,$$

$$C(u, a) = \left(\frac{k\cos\alpha'}{\cos\alpha} - A\right).u + U,$$

$$D(u, a) = \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} - A\right).u + U,$$

und hierin ist

$$A = \delta'_1 + \delta'_2 + \delta'_3 + \delta'_4 + \text{etc.}$$

und

$$U = \tfrac{1}{2}\mu_1 + \tfrac{1}{4}\mu_2 + \tfrac{1}{8}\mu_3 + \tfrac{1}{16}\mu_4 + \text{etc.}$$

Der Factor u wird nach einer von den Reihen (7.) in §. 144. berechnet. Die Berechnung des Parameters a ist nicht nöthig; wird sie aber verlangt, so dient dazu die Reihe

$$\eta.a = \mathfrak{L}\alpha - \tfrac{1}{2}\mathfrak{Arc\,Sin}\left(\frac{\delta'_1}{m_1}\right) - \tfrac{1}{4}\mathfrak{Arc\,Sin}\left(\frac{\delta'_2}{m_2}\right) - \tfrac{1}{8}\mathfrak{Arc\,Sin}\left(\frac{\delta'_3}{\nabla'_3}\right) - \text{etc. oder}$$

$$\eta.a = \mathfrak{L}\alpha - \tfrac{1}{2}\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\delta'_1}{\nabla'_1}\right) - \tfrac{1}{4}\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\delta'_2}{\nabla'_2}\right) - \tfrac{1}{8}\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\delta'_3}{\nabla'_3}\right) - \text{etc.}$$

Wird $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ gesetzt, so hat man, wie oben,

$$S(K, a) = A.K,$$

$$C(K, a) = \left(\frac{k\cos\alpha'}{\cos\alpha} - A\right)K,$$

$$D(K, a) = \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} - A\right)K,$$

und den Factor oder Quadranten K giebt die Formel $K = \frac{\frac{1}{2}\pi}{\eta}$.

§. 147.

Zweite Art der Berechnung der Integrale $'\mathfrak{S}(u,a)$, $'\mathfrak{C}(u,a)$, $'\mathfrak{D}(u,a)$ unter der Beschränkung auf den Gebrauch der gewöhnlichen Tafeln.

Vertauscht man in den Formeln des §. 145. die beiden conjugirten Modul k und k' mit einander, so verwandelt sich $\text{am}\,u$ in $\text{am}'u = \varphi$ und $\text{am}\,a$ in $\text{am}'a = \alpha$. Im Uebrigen bleiben alle Formeln wie sie sind, nur müssen die Modular-Zahlen jetzt hergeleitet werden aus

$$m = 1 \quad \text{und} \quad n = k$$

nach den Formeln

$$m_1 = \frac{m+n}{2}, \quad m_2 = \frac{m_1+n_1}{2}, \quad m_3 = \frac{m_2+n_2}{2} \quad \text{etc.}$$

$$n_1 = \sqrt{(mn)}, \quad n_2 = \sqrt{(m_1 n_1)}, \quad n_3 = \sqrt{(m_2 n_2)} \quad \text{etc.}$$

Setzt man nun außerdem ui statt u und ai statt a, wodurch sich $\text{am}'u$ in $i\,\mathfrak{L}\,\text{am}\,u = i.\mathfrak{L}\varphi$ und $\text{am}'a$ in $i\,\mathfrak{L}\,\text{am}\,a = i.\mathfrak{L}\alpha$ verwandelt, wenn wieder

$$\text{am}\,u = \varphi \quad \text{und} \quad \text{am}\,a = \alpha$$

gesetzt wird, so werden alle Größen δ, δ' etc. und φ_1, φ_2, φ_3 etc. und α_1, α_2, α_3 etc. imaginär; die Größen μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 etc. aber verwandeln sich in $-\mu_1$, $-\mu_2$, $-\mu_3$, $-\mu_4$ etc.; ferner verwandelt sich $\mathfrak{A}'$ in $i'\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{U}'$ in $-'\mathfrak{U}$. Berechnet man nun $\text{tang}\,\varphi' = \frac{1}{k'\,\text{tang}\,\varphi}$ und $\text{tang}\,\alpha' = \frac{1}{k'\,\text{tang}\,\alpha}$, und ferner aus

$$\nabla = \frac{1}{\sin\varphi'}, \quad \nabla' = \frac{1}{\sin\alpha'}, \quad \delta_1 = \frac{k'}{2}\cdot\frac{\cos\varphi'}{\cos\varphi} \quad \text{und} \quad \delta'_1 = \frac{k'}{2}\cdot\frac{\cos\alpha'}{\cos\alpha}$$

die Größen ∇_1, ∇_2, ∇_3, ∇_4 etc., ∇'_1, ∇'_2, ∇'_3, ∇'_4 etc., ferner δ_2, δ_3, δ_4, δ_5 etc. und δ'_2, δ'_3, δ'_4, δ'_5 etc. nach den Formeln des §. 144.; weiter

$$\varphi_1 = 2\mathfrak{L}\varphi - \text{Arc Tang}\left(\frac{\delta_1}{\nabla_1}\right) \quad \text{und} \quad \alpha_1 = 2\mathfrak{L}\alpha - \text{Arc Tang}\left(\frac{\delta'_1}{\nabla'_1}\right),$$

$$\varphi_2 = 2\varphi_1 - \text{Arc Tang}\left(\frac{\delta_2}{\nabla_2}\right) \quad - \quad \alpha_2 = 2.\alpha_1 - \text{Arc Tang}\left(\frac{\delta'_2}{\nabla'_2}\right),$$

$$\varphi_3 = 2\varphi_2 - \text{Arc Tang}\left(\frac{\delta_3}{\nabla_3}\right) \quad - \quad \alpha_3 = 2.\alpha_2 - \text{Arc Tang}\left(\frac{\delta'_3}{\nabla'_3}\right),$$

$$\varphi_4 = 2\varphi_3 - \text{Arc Tang}\left(\frac{\delta_4}{\nabla_4}\right) \quad - \quad \alpha_4 = 2.\alpha_3 - \text{Arc Tang}\left(\frac{\delta'_4}{\nabla'_4}\right)$$

u. s. w. u. s. w.;

endlich hieraus

$$\mathfrak{Tang}\,\mu_1 = \frac{\delta_1}{m_1}.\mathfrak{Sin}\,\alpha_1 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{Tang}\,\mu_1 = \frac{\delta'_1}{m_1}.\mathfrak{Sin}\,\Phi_1,$$
$$\mathfrak{Tang}\,\mu_2 = \frac{\delta_2}{m_2}.\mathfrak{Sin}\,\alpha_2 \quad - \quad \mathfrak{Tang}\,\mu_2 = \frac{\delta'_2}{m_2}.\mathfrak{Sin}\,\Phi_2,$$
$$\mathfrak{Tang}\,\mu_3 = \frac{\delta_3}{m_3}.\mathfrak{Sin}\,\alpha_3 \quad - \quad \mathfrak{Tang}\,\mu_3 = \frac{\delta'_3}{m_3}.\mathfrak{Sin}\,\Phi_3,$$
$$\mathfrak{Tang}\,\mu_4 = \frac{\delta_4}{m_4}.\mathfrak{Sin}\,\alpha_4 \quad - \quad \mathfrak{Tang}\,\mu_4 = \frac{\delta'_4}{m_4}.\mathfrak{Sin}\,\Phi_4$$
u. s. w. u. s. w.,

so verwandeln sich, weil nun wieder

$$'\mathfrak{A} = \delta'_1 + \delta'_2 + \delta'_3 + \delta'_4 + \delta'_5 + \text{etc. und}$$
$$'\mathfrak{U} = \tfrac{1}{2}\mu_1 + \tfrac{1}{4}\mu_2 + \tfrac{1}{8}\mu_3 + \tfrac{1}{16}\mu_4 + \tfrac{1}{32}\mu_5 + \text{etc.}$$

ist, die Formeln (1.), (2.), (3.) des §. 145. in

$$'\mathfrak{S}(u,a) = -{'\mathfrak{A}}.u + {'\mathfrak{U}},$$
$$'\mathfrak{C}(u,a) = \left(\frac{k'\cos\alpha'}{\cos\alpha} - {'\mathfrak{A}}\right)u + {'\mathfrak{U}},$$
$$'\mathfrak{D}(u,a) = \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} - {'\mathfrak{A}}\right)u + {'\mathfrak{U}};$$

und der Factor u ist zu berechnen nach der Reihe

$$\eta u = \mathfrak{L}\Phi - \tfrac{1}{2}\mathfrak{Arc\,Sin}\left(\frac{\delta_1}{m_1}\right) - \tfrac{1}{4}\mathfrak{Arc\,Sin}\left(\frac{\delta_2}{m_2}\right) - \tfrac{1}{8}\mathfrak{Arc\,Sin}\left(\frac{\delta_3}{m_3}\right)$$
$$- \tfrac{1}{16}\mathfrak{Arc\,Sin}\left(\frac{\delta_4}{m_4}\right) - \tfrac{1}{32}\mathfrak{Arc\,Sin}\left(\frac{\delta_5}{m_5}\right) - \text{etc.}$$

oder nach der Reihe

$$\eta u = \mathfrak{L}\Phi - \tfrac{1}{2}\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\delta_1}{\nabla_1}\right) - \tfrac{1}{4}\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\delta_2}{\nabla_2}\right) - \tfrac{1}{8}\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\delta_3}{\nabla_3}\right)$$
$$- \tfrac{1}{16}\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\delta_4}{\nabla_4}\right) - \text{etc.}$$

Zusatz. Die vorstehenden Formeln convergiren zu langsam, wenn der Modul k sehr klein ist. Man wird dann die im Zusatze zu §. 142. entwickelten Formeln anwenden; umgekehrt ist auch die Convergenz der Formeln des §. 145. zu gering, wenn der Modul k wenig von Eins verschieden ist, und man wird dann auch die Integrale der ersten Classe nach den im Zusatze zu §. 142. entwickelten Formeln berechnen.

§. 148.

Zweite Art der Berechnung der Integrale $'S(u,a)$, $'C(u,a)$, $'D(u,a)$ unter Beschränkung auf den Gebrauch der gewöhnlichen Tafeln.

Nimmt man wieder dieselben Modular-Zahlen, wie im §. 147., welche aus $m=1$ und $n=k$ nach den bekannten einfachen Formeln berechnet werden, und setzt überhaupt ai statt a in den Formeln des

§. 147., so erhält man die gesuchten neuen Formeln. Aus $\mathrm{am}\, u = \Phi$ und $\mathrm{am}' a = \alpha$ berechne man $\mathrm{tang}\, \Phi' = \frac{1}{k' \,\mathrm{tang}\, \varphi}$ und $\mathrm{tang}\, \alpha' = \frac{1}{k \,\mathrm{tang}\, \alpha}$; ferner

$$\nabla = \frac{1}{\sin\varphi'}, \quad \nabla' = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha'}, \quad \delta_1 = \frac{k'}{2} \cdot \frac{\cos\varphi'}{\cos\varphi}, \quad \delta'_1 = \frac{k'^2}{2} \cdot \sin\alpha \sin\alpha'$$

und die nächsten Hülfsgröfsen hieraus nach den Formeln des §. 144., die Gröfsen $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$ etc. und $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ etc. aber nach den Formeln

$$\Phi_1 = 2\mathfrak{L}\Phi - \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\delta_1}{\nabla_1}\right) \quad \text{und} \quad \alpha_1 = 2\alpha - \mathrm{arc\,tang}\left(\frac{\delta'_1}{\nabla'_1}\right),$$

$$\Phi_2 = 2\Phi_1 - \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\delta_2}{\nabla_2}\right) \quad - \quad \alpha_2 = 2\alpha_1 - \mathrm{arc\,tang}\left(\frac{\delta'_2}{\nabla'_2}\right),$$

$$\Phi_3 = 2\Phi_2 - \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\delta_3}{\nabla_3}\right) \quad - \quad \alpha_3 = 2\alpha_2 - \mathrm{arc\,tang}\left(\frac{\delta'_3}{\nabla'_3}\right),$$

$$\Phi_4 = 2\Phi_3 - \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\delta_4}{\nabla_4}\right) \quad - \quad \alpha_4 = 2\alpha_3 - \mathrm{arc\,tang}\left(\frac{\delta'_4}{\nabla'_4}\right)$$

u. s. w. u. s. w.,

endlich μ_1, μ_2, μ_3 etc. nach den Formeln

$$\mathrm{tang}\,\mu_1 = \frac{\delta_1}{m_1}\sin\alpha_1 \quad \text{oder} \quad \mathrm{tang}\,\mu_1 = \frac{\delta'_1}{m_1}\mathfrak{Sin}\,\Phi_1,$$

$$\mathrm{tang}\,\mu_2 = \frac{\delta_2}{m_2}\sin\alpha_2 \quad - \quad \mathrm{tang}\,\mu_2 = \frac{\delta'_2}{m_2}\mathfrak{Sin}\,\Phi_2,$$

$$\mathrm{tang}\,\mu_3 = \frac{\delta_3}{m_3}\sin\alpha_3 \quad - \quad \mathrm{tang}\,\mu_3 = \frac{\delta'_3}{m_3}\mathfrak{Sin}\,\Phi_3,$$

$$\mathrm{tang}\,\mu_4 = \frac{\delta_4}{m_4}\sin\alpha_4 \quad - \quad \mathrm{tang}\,\mu_4 = \frac{\delta'_4}{m_4}\mathfrak{Sin}\,\Phi_4$$

u. s. w. u. s. w.

Setzt man nun

$$'A = \delta'_1 + \delta'_2 + \delta'_3 + \delta'_4 \ldots,$$
$$'U = \tfrac{1}{2}\mu_1 + \tfrac{1}{4}\mu_2 + \tfrac{1}{8}\mu_3 + \tfrac{1}{16}\mu_4 \ldots,$$

so ist

$$'S(u, a) = -'A.u + 'U,$$
$$'C(u, a) = (k'^2 \sin\alpha \sin\alpha' - 'A).u + 'U,$$
$$'D(u, a) = \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} - 'A\right).u + 'U.$$

Der Factor u ist nach einer von den beiden Reihen für ηu in §. 147., in welchen $\eta = \frac{\pi}{2K'}$ ist, zu berechnen.

Wenn die obigen Formeln wegen zu grofser Kleinheit des Moduls k, oder auch die Formeln des §. 156. wegen allzubeträchtlicher Gröfse des Moduls k nicht rasch genug convergiren, so sind die im Zusatze 2. und 1. zu §. 143. angegebenen Formeln zu benutzen. Ist $\Phi = \frac{1}{2}\pi$, so hat man, wie in §. 143.,

$$'S(K,a) = \tfrac{1}{2}\pi\left(1-\frac{a}{K'}\right) - K.'A,$$

$$'C(K,a) = \tfrac{1}{2}\pi\left(1-\frac{a}{K'}\right) + (k'^2 \sin\alpha \sin\alpha' - 'A).K,$$

$$'D(K,a) = \tfrac{1}{2}\pi\left(1-\frac{a}{K'}\right) + \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} - 'A\right).K,$$

und die Gröfse a in diesen Formeln, oder sogleich $\frac{\pi a}{2K'} = \eta a$ ist nun nach einer von den beiden Reihen

$$\eta a = \alpha - \tfrac{1}{2}\text{arc sin}\left(\frac{\delta'_1}{m_1}\right) - \tfrac{1}{4}\text{arc sin}\left(\frac{\delta'_2}{m_2}\right) - \tfrac{1}{8}\text{arc sin}\left(\frac{\delta'_3}{m_3}\right) - \text{etc. oder}$$

$$\eta a = \alpha - \tfrac{1}{2}\text{arc tang}\left(\frac{\delta'_1}{\nabla'_1}\right) - \tfrac{1}{4}\text{arc tang}\left(\frac{\delta'_2}{\nabla'_2}\right) - \tfrac{1}{8}\text{arc tang}\left(\frac{\delta'_3}{\nabla'_3}\right) - \text{etc.}$$

zu berechnen; der Quadrant K aber mufs nach Formel (3.) des §. 57. berechnet werden, worin k mit k' zu vertauschen ist.

Jedes von den zwölf Modular-Integralen der zweiten Art kann also auf zwei verschiedene Arten ohne alle andere Hülfsmittel als die der gewöhnlichen logarithmischen Tafeln und der cyklischen und hyperbolischen Functionen berechnet werden.

Dreizehnter Abschnitt.

Von der Vervielfachung des Argumentes der Modular-Functionen.

§. 149.

Formen der Ausdrücke für $\text{sn}(nu)$, $\text{cn}(nu)$, $\text{dn}(nu)$.

In §. 117. ist von der Verdoppelung des Argumentes der Modular-Functionen gehandelt worden. In den Formeln

$$\text{sn}2u = \frac{2\,\text{sn}\,u\,\text{cn}\,u\,\text{dn}\,u}{1-k^2\,\text{sn}^4 u}, \quad \text{cn}2u = \frac{\text{cn}^2 u - \text{sn}^2 u\,\text{dn}^2 u}{1-k^2\,\text{sn}^4 u}, \quad \text{dn}2u = \frac{\text{dn}^2 u - k^2\,\text{sn}^2 u\,\text{cn}^2 u}{1-k^2\,\text{sn}^4 u}$$

sind die Nenner einander gleich und rationale Functionen von $\text{sn}\,u$ oder von $\text{sn}^2 u$; der Zähler des ersten Bruches $2\,\text{sn}\,u\sqrt{(1-\text{sn}^2 u)}\sqrt{(1-k^2\,\text{sn}^2 u)}$ ist keine rationale Function von $\text{sn}\,u$; die Zähler der beiden anderen Brüche sind aber rationale Functionen von $\text{sn}^2 u$, da $\text{cn}^2 u = 1-\text{sn}^2 u$ und $\text{dn}^2 u = 1-k^2\,\text{sn}^2 u$ ist.

Man kann Recursions-Formeln entwickeln, welchen gemäfs man leicht Ausdrücke der Modular-Functionen der Argumente $3u$, $4u$, $5u$, $6u$ etc. durch Functionen des Argumentes u herleiten kann. Setzt man in den Formeln

$$\operatorname{sn}(a+b)+\operatorname{sn}(a-b)=\frac{2\operatorname{sn}a\operatorname{cn}b\operatorname{dn}b}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b},$$

$$\operatorname{cn}(a+b)+\operatorname{cn}(a-b)=\frac{2\operatorname{cn}a\operatorname{cn}b}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b},$$

$$\operatorname{dn}(a+b)+\operatorname{dn}(a-b)=\frac{2\operatorname{dn}a\operatorname{dn}b}{1-k^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b},$$

$b=u$ und $a=nu$, so verwandeln sie sich in

$$\operatorname{sn}((n+1)u)=\frac{2\operatorname{cn}u.\operatorname{dn}u.\operatorname{sn}(nu)}{1-k^2\operatorname{sn}^2u.\operatorname{sn}^2(nu)}-\operatorname{sn}((n-1)u),$$

$$\operatorname{cn}((n+1)u)=\frac{2\operatorname{cn}u.\operatorname{cn}(nu)}{1-k^2\operatorname{sn}^2u.\operatorname{sn}^2(nu)}-\operatorname{cn}((n-1)u),$$

$$\operatorname{dn}((n+1)u)=\frac{2\operatorname{dn}u.\operatorname{dn}(nu)}{1-k^2\operatorname{sn}^2u.\operatorname{sn}^2(nu)}-\operatorname{dn}((n-1)u),$$

Aus diesen Recursionsformeln erkennt man zuerst, daſs die Brüche für $\operatorname{sn}(nu)$, $\operatorname{cn}(nu)$ und $\operatorname{dn}(nu)$, welche man durch wiederholte Anwendungen derselben herleitet, dieselben Nenner haben. Setzt man aber

$$1.\quad\left\{\begin{array}{lll}\operatorname{sn}(nu)=\dfrac{U_n}{R_n}, & \operatorname{cn}(nu)=\dfrac{V_n}{R_n}, & \operatorname{dn}(nu)=\dfrac{W_n}{R_n},\\ \operatorname{sn}((n-1)u)=\dfrac{U_{n-1}}{R_{n-1}}, & \operatorname{cn}((n-1)u)=\dfrac{V_{n-1}}{R_{n-1}}, & \operatorname{dn}((n+1)u)=\dfrac{W_{n-1}}{R_{n-1}},\\ \operatorname{sn}((n+1)u)=\dfrac{U_{n+1}}{R_{n+1}}, & \operatorname{cn}((n+1)u)=\dfrac{V_{n+1}}{R_{n+1}}, & \operatorname{dn}((n+1)u)=\dfrac{W_{n+1}}{R_{n+1}};\end{array}\right.$$

ferner $\operatorname{sn}u=x$, $\operatorname{cn}u=y$, $\operatorname{dn}u=z$, und substituirt diese Brüche, so erhält man

$$\frac{U_{n+1}}{R_{n+1}}=\frac{2yz.U_n.R_n}{R_n^2-k^2x^2.U_n^2}-\frac{U_{n-1}}{R_{n-1}},$$

$$\frac{V_{n+1}}{R_{n+1}}=\frac{2y.V_n.R_n}{R_n^2-k^2x^2.U_n^2}-\frac{V_{n-1}}{R_{n-1}},$$

$$\frac{W_{n+1}}{R_{n+1}}=\frac{2z.W_n.R_n}{R_n^2-k^2x^2.U_n^2}-\frac{W_{n-1}}{R_{n-1}}.$$

Setzt man also

$$2.\quad\left\{\begin{array}{l}T_n\;=R_n^2-k^2x^2.U_n^2,\ \text{so ist}\\ R_{n+1}=T_n.R_{n-1},\\ U_{n+1}=2yz.U_n.R_n.R_{n-1}-T_n.U_{n-1},\\ V_{n+1}=2y.V_n.R_n.R_{n-1}-T_n.V_{n-1},\\ W_{n+1}=2z.W_n.R_n.R_{n-1}-T_n.W_{n-1}.\end{array}\right.$$

Diesen Formeln gemäſs kann man aus

$U_1 - x,\quad V_1=y,\quad W_1=z,\quad R_1=1$ und

$$U_2 = 2xyz, \quad V_2 = \mathrm{cn}^2 u - \mathrm{sn}^2 u\, \mathrm{dn}^2 u, \quad W_2 = \mathrm{dn}^2 u - k^2 \mathrm{sn}^2 u\, \mathrm{cn}^2 u,$$
$$R_2 = 1 - k^2 x^4,$$

U_3, V_3, W_3, R_3 herleiten; ferner U_4, V_4, W_4, R_4, u. s. w.

Es werden diese Ausdrücke immer mehr zusammengesetzt, je weiter die recurrirende Rechnung fortschreitet. Einige derselben werden rational in Ansehung von x^2, und da $y^2 = 1 - x^2$, $z^2 = 1 - k^2 x^2$ ist, so sind auch diese rational in Ansehung von y^2 und z^2; andere Ausdrücke werden aber irrational in Ansehung von x, y, z, und es bleibt noch zu ermitteln, welche Ausdrücke von jener oder dieser Beschaffenheit sind. Bezeichnet man durch $\lambda(x^2)$ eine rationale ganze Function von x_2, so ist zunächst $T_2 = R_2^2 - k^2 x . U_2^2$, oder $T_2 = \lambda(x^2)$; daher ist, den Formeln (2.) gemäfs,

$$R_3 = \lambda(x^2), \qquad U_3 = x\lambda(x^2), \qquad V_3 = y\lambda(y^2), \qquad W_3 = z\lambda(z^2).$$

Hieraus folgt zunächst $T_3 = \lambda(x^2)$, also

$$R_4 = \lambda(x^2), \qquad U_4 = xyz\lambda(x^2), \quad V_4 = \lambda(y^2), \qquad W_4 = \lambda(z^2);$$

mithin ist $T_4 = \lambda(x^2)$, und folglich

$$R_5 = \lambda(x^2), \qquad U_5 = x\lambda(x^2). \qquad V_5 = y\lambda(y^2), \qquad W_5 = z\lambda(z^2).$$

So kann man immer weiter zu schliefsen fortfahren, und sieht dabei, dafs zwei Fälle unterschieden werden müssen, je nachdem n eine gerade oder eine ungerade Zahl ist.

Ist n eine *gerade* Zahl, so ist

$$U_n = xyz\lambda(x^2), \qquad V_n = \lambda(x^2), \qquad W_n = \lambda(x^2). \qquad R_n = \lambda(x^2);$$

und ist n eine *ungerade* Zahl, so ist

$$U_n = x\lambda(x^2), \qquad V_n = y\lambda(x^2), \quad W_n = z\lambda(x^2), \quad R_n = \lambda(x^2).$$

Durch diese Formeln wird die Form der Zähler und Nenner in den Ausdrücken (1.) bestimmt.

§. 150.

Ausdruck von $\mathrm{sn}(nu)$ durch $\mathrm{sn}\,u$ in der Form eines Productes.

Nachdem die Form des Ausdrucks von $\mathrm{sn}(nu)$ bestimmt ist, hält es nicht schwer, diesen Ausdruck selbst zu finden. Ist n eine *gerade* Zahl, so darf gesetzt werden:

$$\mathrm{sn}(nu) = g . \mathrm{sn}\,u\, \mathrm{cn}\,u\, \mathrm{dn}\,u . \frac{\left(1 - \frac{\mathrm{sn}^2 u}{a^2}\right)\left(1 - \frac{\mathrm{sn}^2 u}{b}\right)\left(1 - \frac{\mathrm{sn}^2 u}{c}\right)\cdots\cdot}{\left(1 - \frac{\mathrm{sn}^2 u}{a'^2}\right)\left(1 - \frac{\mathrm{sn}^2 u}{b'^2}\right)\left(1 - \frac{\mathrm{sn}^2 u}{c'^2}\right)\cdots\cdot},$$

wo g einen noch zu bestimmenden constanten Factor bezeichnet; $\pm a$,

$\pm b$, $\pm c$ etc. sind die Werthe von $\operatorname{sn} u$, für welche der Zähler des dem Producte $g \operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u . \operatorname{dn} u$ beigefügten Bruches $= 0$ wird, und eben so sind $\pm a'$, $\pm b'$, $\pm c'$ etc. die Werthe von $\operatorname{sn} u$, für welche der Nenner eben dieses Bruches $= 0$ wird.

Setzen wir $\operatorname{sn}(nu) = 0$, so ist $\pm nu = 2\alpha K \pm 2\beta i K'$, wenn unter α und β unbestimmte ganze Zahlen verstanden werden, also $\pm u = \frac{2\alpha K \pm 2\beta i K'}{n}$, folglich

$$\operatorname{sn} u = \pm \operatorname{sn}\left(\frac{2\alpha K \pm 2\beta i K'}{n}\right), \quad \operatorname{cn} u = \operatorname{cn}\left(\frac{2\alpha K \pm 2\beta i K'}{n}\right),$$

$$\operatorname{dn} u = \operatorname{dn}\left(\frac{2\alpha K \pm 2\beta i K'}{n}\right).$$

Giebt man in dem Ausdrucke $\operatorname{sn} u = \pm \operatorname{sn}\left(\frac{2\alpha K \pm 2\beta i K'}{n}\right)$ den Gröfsen α und β verschiedene Werthe, immer aber ganze Zahlen, so erhält man eine Reihe von Werthen für $\operatorname{sn} u$ und es werden sich unter denselben auch die Werthe $\pm a$, $\pm b$, $\pm c$ etc. befinden. Setzt man aber $\operatorname{sn}(nu) = \frac{1}{0}$, so erhält man $\pm nu = 2\alpha K \pm (2\beta + 1) i K'$; also $\pm u = \frac{2\alpha K \pm (2\beta+1) i K'}{n}$; folglich

$$\operatorname{sn} u = \pm \operatorname{sn}\left(\frac{2\alpha K \pm (2\beta+1) i K'}{n}\right), \quad \operatorname{cn} u = \operatorname{cn}\left(\frac{2\alpha K \pm (2\beta+1) i K'}{n}\right) \quad \text{und}$$

$$\operatorname{dn} u = \operatorname{dn}\left(\frac{2\alpha K \pm (2\beta+1) i K'}{n}\right).$$

Giebt man auch in dem Ausdrucke $\operatorname{sn} u = \pm \operatorname{sn}\left(\frac{2\alpha K \pm (2\beta+1) i K'}{n}\right)$ den Zahlen α und β verschiedene Werthe, so erhält $\operatorname{sn} u$ Werthe, unter welchen sich auch $\pm a'$, $\pm b'$, $\pm c'$ etc. befinden werden. Setzen wir

$$\overset{1}{\varrho}(\alpha, \beta) = \frac{2\alpha K \pm 2\beta i K'}{n} \quad \text{und} \quad \overset{4}{\varrho}(\alpha, \beta) = \frac{2\alpha K \pm (2\beta+1) i K'}{n},$$

so erhalten wir

$$\operatorname{sn}(nu) = g . \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u . \frac{\mathrm{P}\left(1 - \frac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 \overset{1}{\varrho}(\alpha, \beta)}\right)}{\mathrm{P}\left(1 - \frac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha, \beta)}\right)},$$

wo das Zeichen P dieselbe Bedeutung hat, wie im §. 60. des ersten Theiles, nur dafs es sich jetzt auf zwei veränderliche ganze Zahlen α und β bezieht, und auch noch näher zu bestimmen ist, welche Werthe von α und β zu nehmen und mit einander zu verbinden sind. Die Gröfse

$\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)$ nennen wir den ersten, und $\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)$ den vierten Regulator. Das Product $\mathrm{sn}\,u.\mathrm{cn}\,u.\mathrm{dn}\,u$ wird schon $=0$, wenn $u=0$ ist, weil dann auch $\mathrm{sn}\,u=0$ ist; daher sind die Werthe $\alpha=0$ und $\beta=0$ in ihrer Verbindung mit einander bei der Specialisirung des Regulators $\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)$ auszuschliefsen. Ferner wird jenes Product $=0$, wenn $u=\pm K$ ist, weil dann $\mathrm{cn}\,u=0$ ist; daher sind die Verbindungen von $2\alpha=\pm n$ mit $2\beta=0$ bei der Specialisirung des Regulators $\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)$ in dem obigen Ausdrucke auszuschliefsen. Das Product $\mathrm{sn}\,u\;\mathrm{cn}\,u\;\mathrm{dn}\,u$ ist endlich auch $=0$, wenn $\pm u=K\pm iK'$ ist, weil dann $\mathrm{dn}\,u=0$ ist; daher sind endlich auch die Verbindungen von $2\alpha=\pm n$ mit $2\beta=\pm n$ bei der Specialisirung des Regulators $\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)$ auszuschliefsen. Endlich ist die Verbindung von $2\alpha=0$ mit $2\beta=\pm n$ bei der Specialisirung des Regulators $\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)$ auszuschliefsen, weil dann der Factor $\mathrm{sn}\,u=\frac{1}{0}$ wird.

Bei der Specialisirung des Regulators $\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)$ in der vorigen Formel sind endlich alle die Werthe von 2α und 2β auszuschliefsen, für welche $\mathrm{sn}^2\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)$ frühere Werthe wieder erhält, weil a^2, b^2, c^2 etc. verschieden sein müssen.

Sind 2α und 2β einzeln $>n$, so kann man $\frac{2\alpha}{n}=2p\pm\frac{2\alpha'}{n}$ und $\frac{2\beta}{n}=2q\pm\frac{2\beta'}{n}$ setzen und die ganzen Zahlen p und q so einrichten, dafs $2\alpha'<n$ und auch $2\beta'<n$ ist. Die gröfsten Werthe von $2\alpha'$ und $2\beta'$ also sind $2\alpha'=n-2$ und $2\beta'=n-2$. Da dann aber $2\alpha=2pn\pm 2\alpha'$ und $2\beta=2nq\pm 2\beta'$ ist, so ist

$$\frac{2\alpha K\pm 2\beta iK'}{n}=2pK\pm 2qiK'+\frac{\pm 2\alpha' K\pm 2\beta' iK'}{n},$$

also

$$\mathrm{sn}\,\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)=(-1)^p\,\mathrm{sn}\,\overset{1}{\varrho}(\pm\alpha',\pm\beta') \text{ und}$$

$$\mathrm{sn}^2\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)=\mathrm{sn}^2\overset{1}{\varrho}(\pm\alpha',\pm\beta')=\mathrm{sn}^2\overset{1}{\varrho}(\alpha',\pm\beta').$$

Man mufs daher solche Werthe von 2α und 2β ausschliefsen, welche $>n-2$ sind und nur positive Werthe von 2α anwenden. Die einzigen zulässigen Verbindungen bei der Specialisirung des Regulators $\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)$ sind also, wenn n eine gerade Zahl ist:

$$1.\quad\begin{cases}(2\alpha)=+2,+4,+6,\ldots+(n-2) \text{ mit } (2\beta)=\pm 2,\pm 4,\pm 6,\ldots\pm(n-2),\\(2\alpha)=0 \text{ und } =n \text{ mit } 2\beta=+2,+4,+6,\ldots+(n-2),\\(2\beta)=0 \text{ und } =n \text{ mit } 2\alpha=+2,+4,+6,\ldots+(n-2).\end{cases}$$

In den zuletzt genannten Verbindungen müssen also die Werthe von 2β positiv sein, weil

$\mathrm{sn}^2\left(\frac{-2\beta iK'}{n}\right) = \mathrm{sn}^2\left(\frac{2\beta iK'}{n}\right)$ und $\mathrm{sn}^2\left(K - \frac{2\beta iK'}{n}\right) = \mathrm{sn}^2\left(K + \frac{2\beta iK'}{n}\right)$ ist, ferner $\mathrm{sn}^2\left(\frac{2\alpha K}{n} + iK'\right) = \mathrm{sn}^2\left(\frac{2\alpha K}{n} - iK'\right)$. Die Zahl der Verbindungen und also auch der verschiedenen Werthe von $\mathrm{sn}^2 \overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)$ ist also $= \frac{n-2}{2}.(n-2) + 4.\left(\frac{n-2}{2}\right) = \frac{n^2-4}{2}$. Deuten wir die Einschränkung auf diese Verbindungen durch das Zeichen P′ im Gegensatze von P an, so ist

$$\mathrm{sn}(nu) = g.\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u.\frac{\mathrm{P}'\left(1 - \frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 \overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}{\mathrm{P}\left(1 - \frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)},$$

und es bleibt also nur noch der Nenner sammt dem Factor g zu bestimmen übrig.

Bei der Specialisirung des Regulators $\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)$ sind nur die folgenden Verbindungen zulässig, wenn n eine gerade Zahl ist:

$$2.\quad \begin{cases} (2\alpha) = +2, +4, +6, \ldots + (n-2) \text{ mit } (2\beta+1) = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots \pm (n-1) \text{ und} \\ (2\alpha) = 0 \text{ und } = +n \text{ mit } (2\beta+1) = +1, +3, +5, \ldots + (n-1), \end{cases}$$

und zwar aus denselben Gründen, welche oben angegeben wurden. Aendern wir also auch im Nenner P ab in P′, um auf die so eben angegebenen Verbindungen den Divisor einzuschränken, so ist

$$\frac{\mathrm{sn}(nu)}{\mathrm{sn}\,u} = g.\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u.\frac{\mathrm{P}'\left(1 - \frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 \overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}{\mathrm{P}'\left(1 - \frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}.$$

In §. 113. wurde für $\mathrm{sn}\,u$ eine Reihe von der Form $\mathrm{sn}\,u = u - au^3 + bu^5 -$ etc. gefunden, also ist $\frac{\mathrm{sn}(nu)}{\mathrm{sn}\,u} = \frac{n - an^3u^2 + bn^5u^4 - \text{etc.}}{1 - au^2 + bu^4 - \text{etc.}}$, und setzt man $u = 0$, so ist $\frac{\mathrm{sn}(nu)}{\mathrm{sn}\,u} = n$; setzt man aber auch in der vorigen Gleichung $u = 0$, so erhält man $n = g$, und es ist also, wenn n eine *gerade* Zahl ist,

$$3.\quad \mathrm{sn}(nu) = n.\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u.\frac{\mathrm{P}'\left(1 - \frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 \overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}{\mathrm{P}'\left(1 - \frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}.$$

Da die Anzahl der Verbindungen bei der Specialisirung des Regulators $\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)$, $\frac{n-2}{2}.n+2.\frac{n}{2}=\frac{n^2}{2}$ ist, so ist der Ausdruck von $\operatorname{sn}(nu)$ von der Form

$$\operatorname{sn}(nu) = n.\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u.\frac{\operatorname{sn}u+\overset{1}{A}\operatorname{sn}^3u+\overset{2}{A}\operatorname{sn}^5u\ldots\ldots+\overset{\frac{1}{2}(nn-4)}{A}.\operatorname{sn}^{nn-3}u}{1+\overset{1}{D}\operatorname{sn}^2u+\overset{2}{D}\operatorname{sn}^4u\ldots\ldots+\overset{\frac{1}{2}nn}{D}.\operatorname{sn}^{nn}u},$$

wenn Zähler und Nenner als entwickelte arithmetische Formen dargestellt werden, welche nach Potenzen von $\operatorname{sn}u$ fortschreiten. Die imaginären Factoren im Ausdrucke (3.) geben sowohl im Zähler als im Nenner reelle arithmetische Formen, da die Coefficienten $\overset{1}{A}$, $\overset{2}{A}$, $\overset{3}{A}$ etc. und $\overset{1}{D}$, $\overset{2}{D}$, $\overset{3}{D}$ etc. nach §. 149. nicht imaginär sind.

Ist aber n eine *ungerade* Zahl, so findet man auf ähnliche Weise, und mit Beachtung des §. 149.,

$$\operatorname{sn}(nu) = g.\operatorname{sn}u.\frac{\mathrm{P}\left(1-\frac{\operatorname{sn}^2u}{\operatorname{sn}^2\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}{\mathrm{P}\left(1-\frac{\operatorname{sn}^2u}{\operatorname{sn}^2\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}.$$

Außerdem müssen die in diesem Ausdrucke vorkommenden beiden Regulatoren $\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)=\frac{2\alpha\pm2\beta iK}{n}$ und $\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)=\frac{2\alpha\pm(2\beta+1)iK'}{n}$ auf eine andere Art specialisirt werden, als vorhin. Bei der Specialisirung des Regulators $\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)$ sind nur zulässig die Verbindungen von

$$4.\ \begin{cases}(2\alpha)=+2,+4,+6,\ldots.(n-1) \text{ mit } (2\beta)=\pm2,\pm4,\pm6,\ldots.\pm(n-1),\\ 2\alpha=0 \text{ mit } 2\beta=+2,+4,+6,\ldots.+(n-1) \text{ und}\\ 2\beta=0 \text{ mit } 2\alpha=+2,+4,+6,\ldots.+(n-1),\end{cases}$$

so dafs die Anzahl der Verbindungen $=\frac{n-1}{2}.(n-1)+n-1=\frac{nn-1}{2}$ ist. Ausgeschlossen bleibt die Verbindung von $2\alpha=0$ mit $2\beta=0$, weil dann $\operatorname{sn}(nu)$ wegen des Factors $\operatorname{sn}u$ gleich Null wird; ausgeschlossen bleiben ferner wegen der Formel $\operatorname{sn}^2\left(-\frac{2\beta iK'}{n}\right)=\operatorname{sn}^2\left(+\frac{2\beta iK'}{n}\right)$ die Verbindungen von $2\alpha=0$ mit negativen Werthen von 2β, weil dadurch dieselben Werthe von $\operatorname{sn}^2\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)$ entstehen, als durch die Verbindungen von $2\alpha=0$ mit positiven Werthen von 2β; ferner bleiben ausgeschlossen die Verbindungen von $2\beta=0$ mit negativen Werthen von 2α, so wie über-

haupt alle Werthe von 2β nur mit positiven Werthen von 2α verbunden werden, weil

$$\operatorname{sn}^2\left(\frac{-2\alpha K+2\beta iK'}{n}\right)=\operatorname{sn}^2\left(\frac{+2\alpha K-2\beta iK'}{n}\right) \text{ und}$$

$$\operatorname{sn}^2\left(\frac{-2\alpha K-2\beta iK'}{n}\right)=\operatorname{sn}^2\left(\frac{+2\alpha K+2\beta iK'}{n}\right) \text{ ist.}$$

Bei der Specialisirung des Regulators $\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)$ sind nun blofs die Verbindungen von

$$5.\ \begin{cases} 2\alpha=+2,+4,+6,\ldots+(n-1) \text{ mit } (2\beta+1)=\pm1,\pm3,\pm5,\ldots\pm(n-2),\\ 2\alpha=0 \text{ mit } (2\beta+1)=+1,+3,+5,\ldots+(n-2),\\ (2\beta+1)=n \text{ mit } 2\alpha=+2,+4,+6,\ldots+(n-1)\end{cases}$$

zulässig, so dafs die Anzahl aller Verbindungen, wodurch wirklich verschiedene Werthe von $\operatorname{sn}^2\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)$ entstehen, nun $=\frac{n-1}{2}.n-1+\frac{2(n-1)}{2}$ $=\frac{nn-1}{2}$ ist. Alle übrigen möglichen Verbindungen müssen ausgeschlossen werden, weil dadurch solche Werthe von $\operatorname{sn}^2\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)$ entstehen, welche unter den genannten Werthen bereits enthalten sind. Aendern wir die Zeichen P in P′ ab, um dadurch auf die Befolgung der so eben angegebenen Vorschriften beim Specialisiren aufmerksam zu machen, und beachten wir, dafs sich, wie vorhin, $g=n$ findet, so haben wir die Formel

$$6.\qquad \operatorname{sn}(nu)=n.\operatorname{sn}u.\frac{\mathrm{P}'\left(1-\dfrac{\operatorname{sn}^2u}{\operatorname{sn}^2\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}{\mathrm{P}'\left(1-\dfrac{\operatorname{sn}^2u}{\operatorname{sn}^2\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}.$$

Entwickelt man den Zähler und Nenner nach Potenzen von $\operatorname{sn}u$, so erhält der Ausdruck die folgende Form:

$$\operatorname{sn}(nu)=n.\frac{\operatorname{sn}u+\overset{1}{A}\operatorname{sn}^3u+\overset{2}{A}\operatorname{sn}^5u\ldots+\overset{\frac12(nn-1)}{A}.\operatorname{sn}^{nn}u}{1+\overset{1}{D}\operatorname{sn}^2u+\overset{2}{D}\operatorname{sn}^4u\ldots+\overset{\frac12(nn-1)}{D}.\operatorname{sn}^{nn-1}u}.$$

§. 151.

Beweis der Gleichung $\overset{1}{D}=0$ für jede ganze Zahl n.

Setzen wir nun in Anwendung der Bezeichnung des §. 149. den Nenner des Ausdrucks von $\operatorname{sn}u$

$$R_n=1+\overset{1}{D}\operatorname{sn}^2u+\overset{2}{D}\operatorname{sn}^4u\ldots+\overset{m}{D}\operatorname{sn}^{2m}u,$$

so dafs für ein gerades n, $m=\frac{nn}{2}$ ist, für ein ungerades aber $m=\frac{nn-1}{2}$,

so ist in Beziehung auf die aus den vorigen Formeln zu ziehenden Folgerungen der Beweis nöthig, dafs der Coefficient $\overset{1}{D}$ immer gleich Null sei, es mag n eine gerade oder ungerade ganze Zahl sein. Wäre der genannte Coefficient $= 0$, so hätte der Nenner von $\mathrm{sn}(nu)$ die Form

$$R_{(n)} = 1 + \mathrm{sn}^4 u\,(\overset{2}{D} + \overset{3}{D}\,\mathrm{sn}^2 u + \overset{4}{D}\,\mathrm{sn}^4 u \ldots)$$

und könnte also vorgestellt werden durch

$$R_{(n)} = 1 + x^4.\,\lambda(x^2),$$

wenn wieder, wie im §. 149. gesetzt wird, $x = \mathrm{sn}\,u$ und unter $\lambda(x^2)$ eine rationale ganze Function von x^2 verstanden wird. Für $n = 1$ ist $R_{(n)} = 1$, also $\lambda(x^2) = 0$; für $n = 2$ ist $R_n = 1 - k^2 x^4$, also $\lambda(x^2) = -k^2$ und also noch unabhängig von x. In beiden Fällen ist also $\overset{1}{D} = 0$, und um zu beweisen, dafs immer $\overset{1}{D} = 0$ sei, ist zu zeigen, dafs $R_{(n)}$ die Form $1 + x^4\lambda(x^2)$ habe. Nach §. 149. ist immer

$$R_{(n+1)} = R_n^2 - k^2 x^2.\,U_n^2).\,R_{(n-1)}.$$

Nehmen wir nun an, dafs R_n und $R_{(n-1)}$ die obige Form haben, so hat R_n^2 die Form $(1 + x^4\lambda(x^2))^2 = 1 + 2x^4\lambda(x^2) + x^8(\lambda(x^2))^2 = 1 + x^4\lambda(x^2)$. Ferner ist $U_n = xyz\lambda(x^2)$, wenn n gerade, und $= x\lambda(x^2)$, wenn n ungerade ist. Im ersten Falle haben wir also

$$R_{(n+1)} = (1 + x^4\lambda(x^2) - k^2 x^4(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)\lambda(x^2))(1 + x^4\lambda(x^2))$$

oder

$$R_{(n+1)} = (1 + x^4\lambda(x^2))(1 + x^4\lambda(x^2)),$$

und also auch

$$R_{(n+1)} = 1 + x^4\lambda(x^2).$$

Im zweiten Falle haben wir

$$R_{(n+1)} = (1 + x^4\lambda(x^2) - k^2 x^4(\lambda(x^2))^2)(1 + x^4\lambda(x^2)),$$

also

$$R_{(n+1)} = (1 + x^4\lambda(x^2))(1 + x^4\lambda(x^2)),$$

oder ebenfalls

$$R_{(n+1)} = 1 + x^4\lambda(x^2).$$

In beiden Fällen also hat $R_{(n+1)}$ die Form $1 + x^4\lambda(x^2)$, wenn R_n und $R_{(n-1)}$ diese Form haben, und in beiden Fällen ist also $\overset{1}{D} = 0$, wenn diese Gleichung für die beiden vorhergehenden Werthe von n richtig ist. Da nun für $n = 1$ und $n = 2$, $\overset{1}{D} = 0$ ist, so ist auch $\overset{1}{D} = 0$ für $n = 3$, also auch für $n = 4$, u. s. w.

Wird das Product

$$R_n = \mathrm{P}'\left(1 - \frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha, \beta)}\right)$$

nach Potenzen von $\mathrm{sn}^2 u$ entwickelt, so wird der Coefficient $\overset{1}{D}$ von $\mathrm{sn}^2 u$ zu der Summe aller einzelnen Brüche, welche aus dem allgemeinen Gliede $-\frac{1}{\mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha, \beta)}$ dadurch hergeleitet werden, daſs man sich auf solche Verbindungen der Werthe von 2α mit den Werthen von $(2\beta+1)$ beschränkt, welche für ein gerades n unter (2.) und für ein ungerades n unter (5.) im §. 150. angegeben sind. Bezieht sich das Summenzeichen S' auf die angegebenen Verbindungen, so ist die Gleichung $\overset{1}{D} = 0$ einerlei mit

$$1. \quad S'\left[\frac{1}{\mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha, \beta)}\right] = 0,$$

und es gilt also auch diese Gleichung, die Zahl n des Regulators $\overset{4}{\varrho}(\alpha, \beta) = \frac{2\alpha K + (2\beta+1) i K'}{n}$ mag gerade oder ungerade sein.

Wir stellen diese Gleichung auch noch anders dar. Ist n eine gerade Zahl, so ist, weil $\mathrm{sn}(u + iK') = \frac{1}{k\,\mathrm{sn}\,u}$, auch

$$\mathrm{sn}\left(\frac{2\alpha + (2\beta+1) i K'}{n} + iK'\right) = \frac{1}{k\,\mathrm{sn}\,\overset{4}{\varrho}(\alpha, \beta)}.$$

Setzt man nun $(2\beta+1) + (2\beta'+1) = n$, so ist

$$\frac{(2\beta+1) i K'}{n} + iK' = 2iK' - \frac{(2\beta'+1)}{n} iK',$$

also

$$\mathrm{sn}^2\left(\frac{2\alpha - (2\beta'+1) i K'}{n}\right) = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{\mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha, \beta)}.$$

Summirt man diese Gleichung mit Rücksicht auf (2.) im §. 150., so erhält man für ein gerades n

$$S'[\mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha, \beta)] = \frac{1}{k} \cdot S'\left[\frac{1}{\mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha, \beta)}\right]$$

und der Gleichung (1.) gemäſs ist also für

$$2. \quad \textit{ein gerades } n \text{ auch } S'[\mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha, \beta)] = 0.$$

Ist n aber eine ungerade Zahl, so muſs $(2\beta+1) + 2\beta' = n$ gesetzt werden; dann folgt

$$\mathrm{sn}^2\left(\frac{2\alpha \mp 2\beta' i K'}{n}\right) = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{\mathrm{sn}^2\left(\frac{2\alpha \pm (2\beta+1) i K'}{n}\right)},$$

und hieraus erhält man durch Summation und wegen der Gleichung (1.) für

3. *ein ungerades n* die Formel $S'[\operatorname{sn}^2 \overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)] = 0.$

§. 152.

Relationen unter den Coefficienten im Zähler und Nenner des entwickelten Ausdrucks von $\operatorname{sn}(nu)$.

Setzen wir wieder für *ein gerades n,* wie in §. 150.,

$$1.\quad \operatorname{sn}(nu) = n.\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u.\frac{\operatorname{sn}u + \overset{1}{A}.\operatorname{sn}^3 u + \overset{2}{A}.\operatorname{sn}^5 u \ldots + \overset{m-2}{A}.\operatorname{sn}^{2m-3} u}{1 + \overset{1}{D}.\operatorname{sn}^2 u + \overset{2}{D}.\operatorname{sn}^4 u \ldots + \overset{m}{D}.\operatorname{sn}^{2m} u},$$

indem der Kürze wegen $m = \frac{nn}{2}$ genommen wird, und hierin $u + iK'$ für u, so verwandelt sich $\operatorname{sn}u$ in $\frac{1}{k\operatorname{sn}u}$, $\operatorname{cn}u$ in $\frac{-i\operatorname{dn}u}{k\operatorname{sn}u}$, $\operatorname{dn}u$ in $-\frac{i\operatorname{cn}u}{\operatorname{sn}u}$, also $\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u$ in $-\frac{\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u}{k\operatorname{sn}^2 u}$; ferner verwandelt sich der Zähler des beigefügten Bruches in

$$\frac{\overset{m-2}{A}\, k\operatorname{sn}u + \overset{m-3}{A}\,(k\operatorname{sn}u)^3 + \overset{m-4}{A}\,(k\operatorname{sn}u)^5 \ldots + (k\operatorname{sn}u)^{2m-3}}{(k\operatorname{sn}u)^{2m-2}},$$

der Nenner aber in

$$\frac{\overset{m}{D} + \overset{m-1}{D}\,(k\operatorname{sn}u)^2 + \overset{m-2}{D}\,(k\operatorname{sn}u)^4 \ldots + (k\operatorname{sn}u)^{2m}}{(k\operatorname{sn}u)^{2m}},$$

nu in $nu + niK'$, also $\operatorname{sn}(nu)$ wieder in $\operatorname{sn}(nu)$, da n eine gerade Zahl ist; es ist mithin auch

$$\operatorname{sn}(nu) = n\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u.\frac{-\overset{m-2}{A}\,k^2\operatorname{sn}u - \overset{m-3}{A}\,k^4\operatorname{sn}^3 u - \overset{m-4}{A}\,k^6\operatorname{sn}^5 u \ldots - k^{2m-2}\operatorname{sn}^{2m-3} u}{\overset{m}{D} + \overset{m-1}{D}\,k^2\operatorname{sn}^2 u + \overset{m-2}{D}\,k^4\operatorname{sn}^4 u \ldots + k^{2m}.\operatorname{sn}^{2m} u}.$$

Wird dieser Ausdruck wieder mit dem vorigen identificirt, so erhält man

$$\begin{array}{lcl}
-\overset{m-2}{A}.k^2 = \overset{m}{D} & \text{und} & \overset{m-1}{D} = \overset{1}{D} = 0,\\
-\overset{m-3}{A}.k^4 = \overset{1}{A}.\overset{m}{D} & - & \overset{m-2}{D}.k^4 = \overset{2}{D}.\overset{m}{D},\\
-\overset{m-4}{A}.k^6 = \overset{2}{A}.\overset{m}{D} & - & \overset{m-3}{D}.k^6 = \overset{3}{D}.\overset{m}{D},\\
-\overset{m-5}{A}.k^8 = \overset{3}{A}.\overset{m}{D} & - & \overset{m-4}{D}.k^8 = \overset{4}{D}.\overset{m}{D},\\
\ldots & \ldots & \ldots\\
-k^{2m-2} = \overset{m-2}{A}.\overset{m}{D} & - & k^{2m} = \overset{m}{D}.\overset{m}{D}.
\end{array}$$

Aus der letzten Gleichung folgt unmittelbar $\overset{m}{D} = \pm k^m$, und es bleibt nur noch das Vorzeichen sorgfältiger zu bestimmen. Aus der Gleichung

$\operatorname{sn} u . \operatorname{sn}(u + iK') = \frac{1}{k}$ folgt

$$\operatorname{sn}\left(\frac{2\alpha K \mp (2\beta+1) iK'}{n}\right) . \operatorname{sn}\left(\frac{2\alpha K \pm (2\beta'+1) iK'}{n}\right) = \frac{1}{k} \quad \text{und}$$

$$\operatorname{sn}\left(\frac{(2\beta+1) iK'}{n}\right) . \operatorname{sn}\left(\frac{(2\beta'+1) iK'}{n}\right) = -\frac{1}{k}.$$

Werden diese Gleichungen nach der Vorschrift (2.) für den Regulator $\overset{4}{\varrho}(\alpha, \beta)$ im §. 150. specialisirt und mit einander multiplicirt, so kommt die zweite Gleichung nur $\frac{n}{2}$ mal zur Anwendung, und es ist also

$$\mathrm{P}' [\operatorname{sn} \overset{4}{\varrho}(\alpha, \beta)] . \mathrm{P}' [\operatorname{sn} \overset{4}{\varrho}(\alpha, \beta)] = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{k^{\frac{nn}{2}}} \quad \text{oder} \quad \mathrm{P}' [\operatorname{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha, \beta)] = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{k^m}.$$

Da aber auch durch die wirkliche Multiplication gefunden wird

$$\overset{m}{D} = (-1)^m . \mathrm{P}' \left[\frac{1}{\operatorname{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha, \beta)}\right],$$

so ist $\overset{m}{D} = (-1)^m . (-1)^{\frac{n}{2}} . k^m = (-1)^{\frac{n}{2}} . k^m$, da $m = \frac{n^2}{2}$ eine gerade Zahl ist. Ferner ist auch $\left(\frac{n}{2}\right)^2$ ungerade oder gerade, jenachdem $\frac{n}{2}$ ungerade oder gerade ist, daher ist $(-1)^{\frac{n}{2}} = (-1)^{\frac{nn}{4}} = (-1)^{\frac{m}{2}}$, und also endlich

$$\overset{m}{D} = (-1)^{\frac{m}{2}} . k^m,$$

folglich

$$2. \quad \begin{cases} \overset{m-2}{A} = (-1)^{\frac{m}{2}-1} . k^{m-2} & \text{und} \quad \overset{m-1}{D} = \overset{1}{D} = 0, \\ \overset{m-3}{A} = (-1)^{\frac{m}{2}-1} . k^{m-4} . \overset{1}{A} & - \quad \overset{m-2}{D} = (-1)^{\frac{m}{2}} . k^{m-4} . \overset{2}{D}, \\ \overset{m-4}{A} = (-1)^{\frac{m}{2}-1} . k^{m-6} . \overset{2}{A} & - \quad \overset{m-3}{D} = (-1)^{\frac{m}{2}} . k^{m-6} . \overset{3}{D}, \\ \overset{m-5}{A} = (-1)^{\frac{m}{2}-1} . k^{m-8} . \overset{3}{A} & - \quad \overset{m-4}{D} = (-1)^{\frac{m}{2}} . k^{m-8} . \overset{4}{D} \\ \quad \text{u. s. w.} & \quad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Setzt man aber für ein *ungerades* n, wie in §. 150.,

$$3. \quad \operatorname{sn}(nu) = n . \frac{\operatorname{sn} u + \overset{1}{A} \operatorname{sn}^3 u + \overset{2}{A} \operatorname{sn}^5 u \ldots + \overset{m}{A} \operatorname{sn}^{2m+1} u}{1 + \overset{1}{D} \operatorname{sn}^2 u + \overset{2}{D} \operatorname{sn}^4 u \ldots + \overset{m}{D} \operatorname{sn}^{2m} u},$$

indem der Kürze wegen $m = \frac{nn-1}{2}$ genommen wird, und $u + iK'$ für u, wodurch sich $\operatorname{sn} u$ in $\frac{1}{k \operatorname{sn} u}$ und $\operatorname{sn}(nu)$ in $\frac{1}{k \operatorname{sn}(nu)}$ verwandelt, so verwandelt sich der Nenner in

$$\frac{\overset{m}{D}+\overset{m-1}{D}\,k^2\,\mathrm{sn}^2 u+\overset{m-2}{D}\,k^4\,\mathrm{sn}^4 u\ldots\ldots+k^{2m}\,\mathrm{sn}^{2m} u}{k^{2m}\,\mathrm{sn}^{2m} u},$$

und der Zähler in

$$\frac{\overset{m}{A}+\overset{m-1}{A}\,k^2\,\mathrm{sn}^2 u+\overset{m-2}{A}\,k^4\,\mathrm{sn}^4 u\ldots\ldots+k^{2m}\,\mathrm{sn}^{2m} u}{k^{2m+1}.\,\mathrm{sn}^{2m+1} u};$$

daher erhält man

$$\mathrm{sn}(nu)=\frac{1}{n}\cdot\frac{\overset{m}{D}\,\mathrm{sn}\,u+\overset{m-1}{D}\,k^2\,\mathrm{sn}^3 u+\overset{m-2}{D}\,k^4\,\mathrm{sn}^5 u\ldots\ldots+k^{2m}\,\mathrm{sn}^{2m+1} u}{\overset{m}{A}+\overset{m-1}{A}\,k^2\,\mathrm{sn}^2 u+\overset{m-2}{A}\,k^4\,\mathrm{sn}^4 u\ldots\ldots+k^{2m}\,\mathrm{sn}^{2m} u},$$

und weil dieser Ausdruck mit dem Ausdrucke (3.) einerlei sein mufs, so findet man die folgenden Gleichungen:

$$\begin{array}{lcl}
\overset{m}{D}=n^2.\overset{m}{A} & \text{und} & \overset{m-1}{A}=\overset{1}{D}=0,\\
k^2.\overset{m-1}{D}=n^2.\overset{1}{A}.\overset{m}{A} & - & \overset{m-2}{A}.k^4=\overset{2}{D}.\overset{m}{A},\\
k^4.\overset{m-2}{D}=n^2.\overset{2}{A}.\overset{m}{A} & - & \overset{m-3}{A}.k^6=\overset{3}{D}.\overset{m}{A},\\
k^6.\overset{m-3}{D}=n^2.\overset{3}{A}.\overset{m}{A} & - & \overset{m-4}{A}.k^8=\overset{4}{D}.\overset{m}{A},\\
\text{u. s. w.} & & \text{u. s. w.}\\
k^{2m}=n^2.\overset{m}{A}{}^2 & - & k^{2m}=\overset{m}{A}.\overset{m}{D}.
\end{array}$$

Aus der letzten Gleichung folgt $\overset{m}{A}=\pm\frac{k^m}{n}$, und es bleibt nur blofs noch das Vorzeichen zu bestimmen. Durch die wirkliche Multiplication erhält man nach Formel (6.) des §. 150. die Bestimmung

$$\overset{m}{A}=(-1)^m.\,\mathrm{P}'\left[\frac{1}{\sin^2\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right],$$

und da, wenn $n=2r+1$ gesetzt wird, $\frac{n^2-1}{2}=2r+2r^2=m$ eine gerade Zahl ist, so ist $(-1)^m=+1$, also zunächst $\overset{m}{A}=\mathrm{P}'\left[\frac{1}{\sin^2\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right]$.

Ist nun α nicht Null, so gehört zu einem Modular-Sinus $\mathrm{sn}\left(\frac{2\alpha K+2\beta iK'}{n}\right)$ $=F+Gi$, allemal ein Modular-Sinus $\mathrm{sn}\left(\frac{2\alpha K-2\beta iK'}{n}\right)=F-Gi$, und das Product beider F^2+G^2 ist also immer positiv: um so mehr also das Product ihrer Quadrate. Da es nur noch auf die Bestimmung ankommt, ob $\overset{m}{A}$ positiv oder negativ sei, so können wir alle die Modular-Sinus sogleich weglassen, welche $\frac{2\alpha K}{n}$ als reellen Theil ihres Argumentes haben. Hiernach hat also $\overset{m}{A}$ einerlei Vorzeichen mit dem Producte

$$\mathrm{sn}^2\frac{2iK'}{n},\ \sin^2\frac{4iK'}{n}.\ \mathrm{sn}^2\frac{6iK'}{n}\ldots.\ \mathrm{sn}^2\frac{(n-1)iK'}{n}$$

oder mit

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}.\,\mathfrak{Sn}^2\frac{2K'}{n}.\,\mathfrak{Sn}^2\frac{4K'}{3}.\,\mathfrak{Sn}^2\frac{6K'}{n}\ldots.\,\mathfrak{Sn}^2\frac{n-1}{n}K',$$

und da die hier vorkommenden hyperbolischen Modular-Sinus sämmtlich positiv sind, so ist

$$\overset{m}{A}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}.\frac{k^m}{n},\quad \text{und folglich}\quad \overset{m}{D}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}.nk^m.$$

Durch die Substitution dieser Werthe verwandeln sich die vorigen Formeln in

$$\overset{m-1}{D}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}.nk^{m-2}.\overset{1}{A}\quad\text{und}\quad \overset{m-1}{A}=\overset{1}{D}=0,$$

$$\overset{m-2}{D}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}.nk^{m-4}.\overset{2}{A}\quad\text{-}\quad \overset{m-2}{A}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}.\frac{k^{m-4}}{n}.\overset{2}{D},$$

$$\overset{m-3}{D}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}.nk^{m-6}.\overset{3}{A}\quad\text{-}\quad \overset{m-3}{A}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}.\frac{k^{m-6}}{n}.\overset{3}{D},$$

$$\overset{m-4}{D}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}.nk^{m-8}.\overset{4}{A}\quad\text{-}\quad \overset{m-4}{A}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}.\frac{k^{m-8}}{n}.\overset{4}{D}$$

u. s. w. u. s. w.

§. 153.

Mehrgliederiger Ausdruck für $\mathrm{sn}^2(nu)$ für ein gerades n, desgleichen für $\mathrm{cn}^2(nu)$ und $\mathrm{dn}^2(nu)$.

Die in §. 150. gefundene Formel kann auch also dargestellt werden:

$$\mathrm{sn}(nu)=n.\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u.\frac{P'[\mathrm{sn}^2u-\mathrm{sn}^2\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)]}{P'[\mathrm{sn}^2u-\mathrm{sn}^2\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)]}.\frac{P'[\mathrm{sn}^2\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)]}{P'[\mathrm{sn}^2\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)]},$$

da die Anzahl der Factoren eines jeden Productes P′ eine gerade Zahl ist. Ferner ist

$$\overset{m-2}{A}=(-1)^{m-2}.P'\left[\frac{1}{\mathrm{sn}^2\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right]\quad\text{und}\quad \overset{m}{D}=(-1)^m.P'\left[\frac{1}{\mathrm{sn}^2\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right];$$

also ist

$$\frac{P'[\mathrm{sn}^2\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)]}{P'[\mathrm{sn}^2\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)]}=\frac{\overset{m-2}{A}}{\overset{m}{D}}=-\frac{1}{k^2},$$

und mithin

$$\frac{k\,\mathrm{sn}(nu)}{n}=-\frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{k}.\frac{P'[\mathrm{sn}^2u-\mathrm{sn}^2\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)]}{P'[\mathrm{sn}^2u-\mathrm{sn}^2\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)]}.$$

Setzt man nun $\frac{k\,\text{sn}(nu)}{n} = \lambda$ und $\text{sn}\,u = x$, so erhält man, wenn man diese Gleichung zum Quadrate erhebt, um sie rational zu machen:

$$\lambda^2 . \text{P}'[x^2 - \text{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)]^2 = \frac{x^2(1-x^2)(1-k^2x^2)}{k^2} . \text{P}'[x^2 - \text{sn}^2 \overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)]^2, \text{ oder}$$

$$1. \quad \text{P}'[x^2 - \text{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)]^2 - \frac{1}{\lambda^2} x^2 (x^2-1)\left(x^2 - \frac{1}{k^2}\right) . \text{P}'[x^2 - \text{sn}^2 \overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)^2]^2 = 0.$$

Die höchste Potenz von x in dieser Gleichung ist x^{2nn}, da das Product $\text{P}'[x^2 - \text{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)]^2$ nach §. 150. eine durch $\frac{nn}{2}$ ausgedrückte Menge von Factoren des vierten Grades hat; der Coefficient dieser Potenz ist $= 1$; die nächst niedrige Potenz x^{2nn-2} hat zum Coefficienten $\frac{-1}{\lambda^2} - 2S' \text{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)$ und überhaupt erhält die Gleichung die Form

$$x^{2nn} - \overset{1}{g}\, x^{2nn-2} + \overset{2}{g}\, x^{2nn-4} - \overset{3}{g}\, x^{2nn-6} \dots \pm \overset{nn}{g} = 0.$$

Sie dient zur Herleitung von $x = \text{sn}\,u$ aus $\lambda = \frac{k\,\text{sn}(nu)}{n}$. Da keine Potenzen von x mit einem ungeraden Exponenten in dieser Gleichung vorkommen, so hat sie $\frac{nn}{2}$ Paare gleicher, aber entgegengesetzter Wurzeln. $x = +\text{sn}\,u$ und $x = -\text{sn}\,u$ sind zwei solche Wurzeln und der Ausdruck auf der linken Seite ist also theilbar durch $x^2 - \text{sn}^2 u$. Sollen $x = +\text{sn}\,u'$ und $x = -\text{sn}\,u'$ zwei andere Wurzeln der Gleichung (1.) sein, so müssen sie so beschaffen sein, dafs $\text{sn}(nu') = \text{sn}(nu)$ ist. Da nun aber überhaupt $\text{sn}[(-1)^\alpha(nu + 2\alpha K + 2\beta i K')] = \text{sn}\,u$ ist, so schliefst man, dafs überhaupt $nu' = (-1)^\alpha(nu + 2\alpha K + 2\beta i K')$ ist, oder einfacher

$$u' = (-1)^\alpha \left(n + \frac{2\alpha K + 2\beta i K'}{n}\right).$$

Nimmt man auf beiden Seiten den Modular-Sinus mit dem Modul k, so ist $x = (-1)^\alpha \text{sn}\left(u + \frac{2\alpha K + 2\beta i K'}{n}\right)$ und $x = -(-1)^\alpha \text{sn}\left(u + \frac{2\alpha K + 2\beta i K'}{n}\right)$ die allgemeine Darstellung eines Paares gleicher und entgegengesetzter Wurzeln; also ist

$$x^2 - \text{sn}^2\left(u + \frac{2\alpha K + 2\beta i K'}{n}\right)$$

die allgemeine Form der Factoren der Gleichung (1.). Nehmen wir die Zahlen α und β positiv und kleiner als n, also

$$\alpha = 0, +2, +4, +6, \dots +(n-1),$$
$$\beta = 0, +2, +4, +6, \dots +(n-1),$$

und verbinden alle Werthe von α mit allen Werthen von β, so erhalten wir nn Verbindungen; und bezeichnen wir das aus dem allgemeinen Factor gebildete Product mit $\overset{n-1}{\underset{0}{\mathrm{P}}}$, so ist

$$2.\quad \overset{n-1}{\underset{0}{\mathrm{P}}}\left[x^2 - \mathrm{sn}^2\left(u + \frac{2\alpha K + 2\beta i K'}{n}\right)\right] = 0$$

eine Gleichung, welche mit der Gleichung (1.) die gleichen Wurzeln hat. Die höchste Potenz von x in dieser Gleichung ist x^{3nn} und ihr Coefficient ist $= 1$; wie in der Gleichung (1.). Um zu zeigen, daſs die Wurzeln dieser Gleichung, welche auch der Gleichung (1.) Genüge leisten, wirklich verschieden sind, nehme man an, daſs

$$\mathrm{sn}^2\left(u + \frac{2\alpha K + 2\beta i K'}{n}\right) = \mathrm{sn}^2\left(u + \frac{2\alpha' K + 2\beta' i K'}{n}\right)$$

sei; dann folgt, daſs $u + \frac{2\alpha K + 2\beta i K'}{n} = u + \frac{2\alpha' K + 2\beta' i K'}{n} + 2pK + 2qiK'$ sei, wenn p und q ganze Zahlen vorstellen; daſs also

$$(2\alpha - 2\alpha^2 - 2pn)K + (2\beta - 2\beta' - 2qn)iK',$$

folglich $\alpha = \alpha' + pn$ und $\beta = \beta' + qn$ sei; was ungereimt ist, da jede der Zahlen α, β, α', β' kleiner als n sein soll.

Wird die Gleichung (2.) entwickelt, so findet sich, als Coefficient der Potenz x^{2nn-2} in ihr,

$$-\overset{n-1}{\underset{0}{S}}\left[\mathrm{sn}^2\left(u + \frac{2\alpha K + 2\beta i K'}{n}\right)\right],$$

und da der Coefficient eben dieser Potenz in der Gleichung (1.) $= -\overset{1}{y}$ ist, so ist

$$\overset{n-1}{\underset{0}{S}}\left[\mathrm{sn}^2\left(u + \frac{2\alpha K + 2\beta i K'}{n}\right)\right] = \frac{1}{\lambda^2} + 2S'[\mathrm{sn}^2\overset{4}{\varrho}(\alpha, \beta)].$$

Da aber der Formel (2.) im §. 151. gemäſs $S'[\mathrm{sn}^2\overset{4}{\varrho}(\alpha, \beta)] = 0$ für ein gerades n ist, so haben wir

$$3.\quad \frac{n^2}{k^2\,\mathrm{sn}^2(nu)} = \overset{n-1}{\underset{0}{S}}\left[\mathrm{sn}^2\left(u + \frac{2\alpha K + 2\beta i K'}{n}\right)\right],$$

und das Summationszeichen $\overset{n-1}{\underset{0}{S}}$ in dieser Formel giebt zu erkennen, daſs für α und β alle vorhin angegebenen Werthe gesetzt werden sollen. Die Summe auf der rechten Seite begreift also nn einzelne Glieder.

Setzt man $u + iK'$ für u, so bleibt $\mathrm{sn}(nu)$ ungeändert, da n eine gerade Zahl ist, und man erhält also

$$4.\quad \frac{n^2}{\mathrm{sn}^2(nu)} = \overset{n-1}{\underset{0}{S}}\left\{\frac{1}{\mathrm{sn}^2\left(u + \frac{2\alpha K + 2\beta i K'}{n}\right)}\right\}.$$

Subtrahirt man von jedem Gliede auf der rechten Seite Eins, so muſs man auf der linken Seite n^2 subtrahiren. Dadurch erhält man

$$5.\quad \frac{n^2}{\operatorname{tn}^2(nu)} = \overset{n-1}{\underset{0}{S}} \left\{\frac{1}{\operatorname{tn}^2\left(u+\frac{2\alpha K+2\beta i K'}{n}\right)}\right\}.$$

Subtrahirt man jedes Glied der Gleichung (3) auf der rechten Seite von Eins, so erhält man

$$6.\quad -\frac{n^2 \operatorname{dn}^2(nu)}{k^2 \operatorname{sn}^2(nu)} = \overset{n-1}{\underset{0}{S}} \left[\operatorname{cn}^2\left(u+\frac{2\alpha K+2\beta i K'}{n}\right)\right] = -\frac{k'^2}{k^2}\cdot\frac{1}{\operatorname{cn}^2(nu)}.$$

Setzt man in dieser Gleichung $u+\frac{K}{n}$ für u, so erhält man

$$7.\quad -\frac{k'^2}{k^2}\cdot\frac{1}{\operatorname{cn}^2(nu)} = \overset{n-1}{\underset{0}{S}} \left[\operatorname{cn}^2\left(u+\frac{(2\alpha+1)K+2\beta i K'}{n}\right)\right].$$

Multiplicirt man die Gleichung (3.) mit k^2, und subtrahirt auf der rechten Seite jedes Glied von Eins, so erhält man

$$8.\quad -\frac{n^2}{\operatorname{tn}^2(nu)} = \overset{n-1}{\underset{0}{S}} \left[\operatorname{dn}^2\left(u+\frac{2\alpha K+2\beta i K'}{n}\right)\right]$$

Setzt man in der Gleichung (3.) $u+\frac{iK'}{n}$ für u, so wird sie

$$9.\quad n^2.\operatorname{sn}^2(nu) = \overset{n-1}{\underset{0}{S}} \left[\operatorname{sn}^2\left(u+\frac{2\alpha K+(2\beta+1)i K'}{n}\right)\right].$$

Subtrahirt man jedes Glied auf der rechten Seite von Eins, so entsteht

$$10.\quad n^2.\operatorname{cn}^2(nu) = \overset{n-1}{\underset{0}{S}} \left[\operatorname{cn}^2\left(u+\frac{2\alpha K+(2\beta+1)i K'}{n}\right)\right].$$

Multiplicirt man aber die Gleichung (9.) zuvor mit k^2, so erhält man

$$11.\quad n^2.\operatorname{dn}^2(nu) = \overset{n-1}{\underset{0}{S}} \left[\operatorname{dn}^2\left(u+\frac{2\alpha K+(2\beta+1)i K'}{n}\right)\right].$$

Zusatz. In Formel (9.) wird 2α höchstens $=2n-2$ und $2\beta+1$ höchstens $=2n-1$. Sind nun $2\alpha'$ und $2\beta'+1$ gröſser als n, so kann man sie durch $2\alpha'=2n-2\alpha$ und $2\beta'+1=2n-(2\beta+1)$ darstellen, und dann sind 2α und $2\beta'+1$ ganze positive Zahlen, welche $<n$ sind. Da nun

$$\operatorname{sn}^2\left(u+\frac{2\alpha' K+(2\beta'+1)iK'}{n}\right) = \operatorname{sn}^2\left(u+\frac{2\alpha' K-(2\beta+1)iK'}{n}\right)$$
$$= \operatorname{sn}^2\left(u+\frac{-2\alpha K+(2\beta'+1)iK'}{n}\right) = \operatorname{sn}^2\left(u+\frac{-2\alpha K-(2\beta+1)iK'}{n}\right)$$

ist, so kann man die Gleichung (9.), mit Anwendung der Bezeichnung des §. 150., auch also darstellen:

$$n^2.\operatorname{sn}^2(nu) = S'\,[\operatorname{sn}^2(u+\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)) + \operatorname{sn}^2(u-\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta))].\quad \text{Eben so ist}$$

$$n^2.\operatorname{cn}^2(nu) = S'\,[\operatorname{cn}^2(u+\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)) + \operatorname{cn}^2(u-\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta))],$$

$$n^2.\operatorname{dn}^2(nu) = S'\,[\operatorname{dn}^2(u+\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)) + \operatorname{dn}^2(u-\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta))].$$

Bei Beachtung des Schemas (2.) (in §. 150.) der Specialisirung des Regulators $\varrho(\alpha,\beta)$ erhält man $\frac{nn}{2}$ Glieder aus den allgemeinen hinter S' stehenden Gliedern, und da jedes aus zwei Gliedern besteht, so erhält man nn Glieder zu summiren; wie vorhin.

§. 154.

Vielgliederiger Ausdruck von $\operatorname{sn}(nu)$ für ein ungerades n; ferner für $\operatorname{sn}^2(nu)$, $\operatorname{cn}^2(nu)$ und $\operatorname{dn}^2(nu)$.

Nach §. 152. ist für ein ungerades n, wenn wieder $m=\frac{nn-1}{2}$ und $\operatorname{sn} u = x$ gesetzt wird,

$$\frac{\operatorname{sn}(nu)}{n}\left(x^{2m}+\frac{\overset{m-1}{D}}{\overset{m}{D}}x^{2m-2}\ldots.+\frac{1}{\overset{m}{D}}\right)=\frac{\overset{m}{A}}{\overset{m}{D}}\left(x^{2m+1}+\frac{\overset{m-1}{A}}{\overset{m}{D}}x^{2m-1}\ldots.+\frac{1}{\overset{m}{D}}.x\right),$$

oder, da $\frac{\overset{m}{A}}{\overset{m}{D}}=\frac{1}{nn}$ ist,

$$1.\quad x^{2m+1}+\frac{\overset{m-1}{A}}{\overset{m}{D}}x^{2m-1}+\frac{\overset{m-2}{A}}{\overset{m}{D}}x^{2m-3}\ldots.\frac{x}{\overset{m}{D}}-n\operatorname{sn}(nu)\left(x^{2m}+\frac{\overset{m-1}{D}}{\overset{m}{D}}x^{2m-2}\ldots.+\frac{1}{\overset{m}{D}}\right)=0.$$

Eine Wurzel dieser Gleichung ist $x=\operatorname{sn} u$, und soll $\operatorname{sn} u'$ eine zweite sein, so muſs $\operatorname{sn}(nu')=\operatorname{sn}(nu)$ sein, und hieraus findet man, wie vorher, $u=(-1)^\alpha\left(u+\frac{2\alpha K+2\beta i K'}{n}\right)$; also ist

$$x=(-1)^\alpha.\operatorname{sn}\left(u+\frac{2\alpha K+2\beta i K'}{n}\right)$$

die allgemeine Form aller Wurzeln der Gleichung (1.). Nimmt man

$$\alpha=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \ldots.\ \pm\frac{n-1}{2},$$

$$\beta=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \ldots.\ \pm\frac{n-1}{2}$$

und verbindet alle Werthe von α mit allen Werthen von β, so erhält man nn Verbindungen. Der Grad der Gleichung (1.) ist aber ebenfalls $2m+1=nn$; und da alle aus der genannten Specialisirung hervorgehenden Werthe von x von einander verschieden sind, so sind sie gerade die nn Wurzeln der Gleichung (1.), die wir durch x, x', x'', x''' etc. vorstellen. Da der Coefficient der höchsten Potenz von x in der Gleichung (1.) Eins ist, so ist der Coefficient von x^{2m} die negative Summe der Wurzeln, also

$$n\,\mathrm{sn}(nu) = x + x' + x'' + x''' + \text{etc.}$$

oder

$$2.\quad n\,\mathrm{sn}(nu) = S(-1)^{\alpha}\,\mathrm{sn}\Big(u + \frac{2\alpha K + 2\beta i K'}{n}\Big).$$

Bezeichnet man die Summe der Quadrate der Wurzeln mit s und die Summe ihrer Binionen mit t, so ist

$$n^2\,\mathrm{sn}^2(nu) = (x + x' + x'' + x''' + \text{etc.})^2 = s + 2t.$$

Die Summe der Binionen der Wurzeln der Gleichung (1.) ist der positive Coefficient von x^{2m-1}; also ist $t = \frac{\overset{m}{A}}{\overset{m}{D}} = 0$, nach §. 152., da n eine ungerade Zahl ist. Es ist folglich $n^2\,\mathrm{sn}^2(nu) = s$, oder

$$3.\quad \begin{cases} n^2\,\mathrm{sn}^2(nu) = S\Big[\mathrm{sn}^2\Big(u + \frac{2\alpha K + 2\beta i K'}{n}\Big)\Big], \text{ also} \\ n^2\,\mathrm{cn}^2(nu) = S\Big[\mathrm{sn}^2\Big(u + \frac{2\alpha K + 2\beta i K'}{n}\Big)\Big], \\ n^2\,\mathrm{dn}^2(nu) = S\Big[\mathrm{sn}^2\Big(u + \frac{2\alpha K + 2\beta i K'}{n}\Big)\Big], \end{cases}$$

und in den Formeln (2.) und (3.) sind die Werthe $\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \pm \frac{n-1}{2}$ mit den Werthen $\beta = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \pm \frac{n-1}{2}$ zu verbinden.

Nehmen wir Rücksicht auf das Schema der Specialisirung des Regulators $\overset{1}{\varrho}(\alpha, \beta)$ unter (4.) im §. 150., weil n eine ungerade Zahl ist, so können die vorigen Formeln auch also dargestellt werden:

$$4.\quad \begin{cases} n\,\mathrm{sn}(nu) = \mathrm{sn}\,u + S'\{(-1)^{\alpha}[\mathrm{sn}(u + \overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)) + \mathrm{sn}(u - \overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta))]\}, \\ n^2\,\mathrm{sn}^2(nu) = \mathrm{sn}^2 u + S'[\mathrm{sn}^2(u + \overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)) + \mathrm{sn}^2(u - \overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta))], \\ n^2\,\mathrm{cn}^2(nu) = \mathrm{cn}^2 u + S'[\mathrm{cn}^2(u + \overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)) + \mathrm{cn}^2(u - \overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta))], \\ n^2\,\mathrm{dn}^2(nu) = \mathrm{dn}^2 u + S'[\mathrm{dn}^2(u + \overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)) + \mathrm{dn}^2(u - \overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta))]. \end{cases}$$

§. 155.

Ausdruck von $\mathrm{cn}(nu)$ durch $\mathrm{sn}\,u$ und $\mathrm{cn}\,u$ in der Form eines Products.

Nach §. 149. hat der Ausdruck von $\mathrm{cn}(nu)$ immer denselben Nenner als der von $\mathrm{sn}(nu)$, es mag n eine gerade oder eine ungerade Zahl sein. Nehmen wir zuerst an, daſs n eine *gerade* Zahl sei, so hat der Ausdruck von $\mathrm{cn}(nu)$ zum Zähler eine rationale ganze Function von x^2 oder $\mathrm{sn}^2 u$; daher können wir für ein gerades n setzen:

$$\mathrm{cn}(nu) = g.\frac{\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{a^2}\right)\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{b^2}\right)\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{c^2}\right)\ldots}{\mathrm{P}'\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)},$$

und $\pm a$, $\pm b$, $\pm c$ etc. sind nun die Werthe von $\mathrm{sn}\, u$, für welche $\mathrm{cn}(nu) = 0$ wird, und welche sammt dem constanten Factor g nun allein noch zu ermitteln sind. Soll $\mathrm{cn}(nu) = 0$ sein, so mufs $nu = (2\alpha+1)K + 2\beta iK'$, also $u = \frac{(2\alpha+1)K+2\beta iK'}{n}$ und $x = \mathrm{sn}\left(\frac{(2\alpha+1)K+2\beta iK'}{n}\right)$ sein. Nehmen wir also als zweiten Regulator $\overset{2}{\varrho}(\alpha,\beta) = \frac{(2\alpha+1)K+2\beta iK'}{n}$, so erhalten wir

$$\mathrm{cn}(nu) = g.\frac{\mathrm{P}\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 \overset{2}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}{\mathrm{P}'\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}.$$

Da die Ausdrücke von a^2, b^2, c^2 etc. verschieden sein sollen, so specialisirt man den Regulator $\overset{2}{\varrho}(\alpha,\beta)$ durch die Verbindungen

1. $\begin{cases} \text{Von } (2\alpha+1) = +1, +3, +5, \ldots + (n-1) \text{ mit } (2\beta) = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots \pm (n-2) \text{ und} \\ \text{Von } \quad 2\beta = 0 \quad \text{und} \quad = +n \quad \text{mit} \quad (2\alpha+1) = +1, +3, +5, \ldots + (n-1). \end{cases}$

Die Anzahl dieser Verbindungen ist $= \frac{n}{2}.(n-2) + 2.\frac{n}{2} = \frac{n^2}{2}$. Wir verwandeln P in P′, um auf diese Vorschrift bei der Specialisirung aufmerksam zu machen. Die Verbindungen aller übrigen Werthe von $2\alpha+1$ und 2β mit einander geben Werthe von $\mathrm{sn}^2\overset{2}{\varrho}(\alpha,\beta)$, welche unter den angegebenen bereits vorkommen, und unter ihnen giebt es keine gleichen Werthe von $\mathrm{sn}^2\overset{2}{\varrho}(\alpha,\beta)$. Setzt man $u = 0$, so erhält man $g = 1$, und es ist also für ein *gerades n:*

$$2.\quad \mathrm{cn}(nu) = \frac{\mathrm{P}'\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 \overset{2}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}{\mathrm{P}'\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}.$$

Setzt man in dieser Formel $u = K$, so hat man, da n eine gerade Zahl ist, $\mathrm{cn}(nu) = (-1)^{\frac{n}{2}}$; daher ist

$$(-1)^{\frac{n}{2}} = \frac{\mathrm{P}'[\mathrm{tn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)]}{\mathrm{P}'[\mathrm{tn}^2 \overset{2}{\varrho}(\alpha,\beta)]}.$$

Ferner läſst sich die Formel (2.) auch also darstellen:

$$\operatorname{cn}(nu) = \frac{P'(\operatorname{cn}^2 \overset{2}{\varrho}(\alpha,\beta) - \operatorname{cn}^2 u)}{P'(\operatorname{cn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta) - \operatorname{cn}^2 u)} \cdot \frac{P'[\operatorname{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)]}{P'[\operatorname{sn}^2 \overset{2}{\varrho}(\alpha,\beta)]},$$

und dividirt man diese Gleichung durch die vorige, so erhält man

$$3. \quad (-1)^{\frac{n}{2}} . \operatorname{cn}(nu) = \frac{P'\left(1 - \dfrac{\operatorname{cn}^2 u}{\operatorname{cn}^2 \overset{2}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}{P'\left(1 - \dfrac{\operatorname{cn}^2 u}{\operatorname{cn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)},$$

Ist n eine *ungerade* ganze Zahl, so findet man, wie vorhin,

$$\operatorname{cn}(nu) = \operatorname{cn} u . \frac{P'\left(1 - \dfrac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 \overset{2}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}{P'\left(1 - \dfrac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}.$$

Aber die Regulatoren $\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)$ und $\overset{2}{\varrho}(\alpha,\beta)$ müssen nun anders specialisirt werden. In Beziehung auf den Regulator $\overset{2}{\varrho}(\alpha,\beta) = \frac{(2\alpha+1)K + 2\beta i K'}{n}$ hat man die Werthe

$$4. \begin{cases} (2\alpha+1) = +1, +3, +5, +7, \ldots + (n-2) \text{ mit } 2\beta = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots \pm (n-1), \\ 2\alpha+1 = n \text{ mit } \quad 2\beta = +2, +4, +5, \ldots + (n-1), \\ \quad 2\beta = 0 \text{ mit } 2\alpha+1 = +1, +3, +5, \ldots + (n-2) \end{cases}$$

zu verbinden, so daſs die Anzahl der Verbindungen, und also auch die der quadratischen Factoren im Zähler des Ausdrucks von $\operatorname{cn}(nu)$

$$= \frac{n-1}{2} . (n-1) + 2 . \frac{(n-1)}{2} = \frac{nn-1}{2} \text{ ist.}$$

Verwandeln wir, mit Hinweisung auf die so eben angegebene Art der Specialisirung des Regulators $\varrho(\alpha,\beta)$, das Zeichen P wieder in P′, so haben wir für ein *ungerades n:*

$$5. \quad \operatorname{cn}(nu) = \operatorname{cn} u . \frac{P'\left(1 - \dfrac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 \overset{2}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}{P'\left(1 - \dfrac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}.$$

Setzen wir nun $u = K$, so wird $\frac{\operatorname{cn}(nu)}{\operatorname{cn} u} = \frac{0}{0}$, und nach einer bekannten Regel findet man das wahre Verhältniſs:

$$= \frac{\partial \operatorname{cn}(nu)}{\partial \operatorname{cn} u} = \frac{n \operatorname{sn}(nu) \operatorname{dn}(nu)}{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} . n;$$

daher ist für ein *ungerades* n:

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}.n = \frac{P'[\mathrm{tn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha, \beta)]}{P'[\mathrm{tn}^2 \overset{2}{\varrho}(\alpha, \beta)]}.$$

Giebt man nun der Gleichung (5.) zuerst die Gestalt

$$\mathrm{cn}(nu) = \mathrm{cn}\,u.\frac{P'[\mathrm{cn}^2 \overset{2}{\varrho}(\alpha, \beta) - \mathrm{cn}^2 u]}{P'[\mathrm{cn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha, \beta) - \mathrm{cn}^2 u]}.\frac{P'[\mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha, \beta)]}{P'[\mathrm{sn}^2 \overset{2}{\varrho}(\alpha, \beta)]}$$

und dividirt sie dann durch die vorige Gleichung, so findet man

$$6. \quad (-1)^{\frac{n-1}{2}}.\mathrm{cn}(nu) = n.\mathrm{cn}\,u.\frac{P'\left(1 - \dfrac{\mathrm{cn}^2 u}{\mathrm{cn}^2 \overset{2}{\varrho}(\alpha, \beta)}\right)}{P'\left(1 - \dfrac{\mathrm{cn}^2 u}{\mathrm{cn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha, \beta)}\right)}.$$

Zusatz. Setzt man in der Gleichung (3. §. 150.) ebenfalls $u = K$, so wird $\frac{\mathrm{sn}(nu)}{\mathrm{cn}\,u} = \frac{0}{0}$. Der Werth dieses Verhältnisses ist $\frac{\partial\,\mathrm{sn}(nu)}{\partial\,\mathrm{cn}\,u} = \frac{n\,\mathrm{cn}(nu)\,\mathrm{dn}(nu)}{-\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u} = (-1)^{\frac{n}{2}-1}.\frac{n}{k'}$. Im Uebrigen reducirt sich der Ausdruck auf der rechten Seite auf $\frac{nk'.P'[\mathrm{tn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha, \beta)]}{P'[\mathrm{tn}^2 \overset{1}{\varrho}(\alpha, \beta)]}$; daher ist für ein *gerades* n:

$$\frac{P'[\mathrm{tn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha, \beta)]}{P'[\mathrm{tn}^2 \overset{1}{\varrho}(\alpha, \beta)]} = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}-1}}{k'^2}.$$

Da nun aber $\overset{m-2}{A} = P'\left[\frac{1}{\mathrm{sn}^2 \overset{1}{\varrho}(\alpha, \beta)}\right]$ und $\overset{m}{D} = P'\left[\frac{1}{\mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha, \beta)}\right]$, also $\frac{\overset{m}{D}}{\overset{m-2}{A}} = \frac{P'[\mathrm{sn}^2 \overset{1}{\varrho}(\alpha, \beta)]}{P'[\mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha, \beta)]} = -k^2$ ist, so erhält man, wenn hiermit die vorige Gleichung multiplicirt wird, für ein gerades n,

$$\frac{P'[\mathrm{cn}^2 \overset{1}{\varrho}(\alpha, \beta)]}{P'[\mathrm{cn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha, \beta)]} = (-1)^{\frac{n}{2}}.\frac{k^2}{k'^2}.$$

Setzt man aber in der Formel (6. §. 150.) auch $u = K$, so erhält man für ein *ungerades* n:

$$\frac{P'[\mathrm{tn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha, \beta)]}{P'[\mathrm{tn}^2 \overset{1}{\varrho}(\alpha, \beta)]} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}.\frac{1}{n}.$$

Ferner ist $\overset{m}{A} = P'\left[\frac{1}{\mathrm{sn}^2 \overset{1}{\varrho}(\alpha, \beta)}\right]$ und $\overset{m}{D} = P'\left[\frac{1}{\mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha, \beta)}\right]$, also

$$\frac{P'[\mathrm{sn}^2 \overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)]}{P'[\mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)]} = \frac{\overset{m}{D}}{\overset{m}{A}} = n^2 \text{ (nach §. 152.)};$$

und wird die vorige Gleichung hiermit multiplicirt, so entsteht für ein *ungerades n:*

$$\frac{P'[\mathrm{cn}^2 \overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)]}{P'[\mathrm{cn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)]} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}.n.$$

§. 156.

Ausdruck von $\mathrm{dn}(nu)$ durch $\mathrm{sn}\,u$ und $\mathrm{dn}\,u$ in der Form eines Productes.

Auch der Ausdruck von $\mathrm{dn}(nu)$ hat mit dem von $\mathrm{sn}(nu)$ denselben Nenner; und da der Zähler für ein gerades n eine rationale Function von $\mathrm{sn}^2 u$ ist, so kann der Ausdruck von $\mathrm{dn}(nu)$ vorgestellt werden durch

$$\mathrm{dn}(nu) = g.\frac{\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{a^2}\right)\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{b^2}\right)\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{c^2}\right)\cdots}{P'\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)},$$

und a^2, b^2, c^2 etc. sind nun alle von einander verschiedene Werthe von $\mathrm{sn}^2 u$, für welche $\mathrm{dn}(nu) = 0$ ist. Da überhaupt $\mathrm{dn}((2\alpha+1)K+(2\beta+1)iK') = 0$ ist, so ist $\mathrm{dn}(nu) = 0$, wenn $nu = (2\alpha+1)K+(2\beta+1)iK'$, also $u = \frac{(2\alpha+1)K+(2\beta+1)iK'}{n}$ und $\mathrm{sn}^2 u = \mathrm{sn}^2\left(\frac{(2\alpha+1)K+(2\beta+1)iK'}{n}\right)$ ist. Nimmt man zum Regulator $\overset{3}{\varrho}(\alpha,\beta) = \frac{(2\alpha+1)K+(2\beta+1)iK'}{n}$, so hat man

$$\mathrm{dn}(nu) = \frac{P\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 \overset{3}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}{P'\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)};$$

indem sich $g = 1$ findet, wenn man $u = 0$ setzt. Sollen alle Werthe von $\mathrm{sn}^2 \overset{3}{\varrho}(\alpha,\beta)$ verschieden werden, so hat man sich bei der Specialisirung des Regulators $\overset{3}{\varrho}(\alpha,\beta)$ auf folgende Verbindungen zu beschränken:

1. $(2\alpha+1) = +1, +3, +5, \ldots + (n-1)$ mit $(2\beta+1) = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots \pm (n-1)$,

deren Anzahl $= \frac{n}{2}.n = \frac{nn}{2}$ ist. Und verwandeln wir, um dieses anzudeuten, wieder P in P′, so erhalten wir für ein *gerades n:*

$$2.\quad \mathrm{dn}(nu) = \frac{P'\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 \overset{3}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}{P'\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}.$$

Da $1-\frac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 \overset{3}{\varrho}(\alpha,\beta)} = \frac{k^2 \operatorname{sn}^2 \overset{3}{\varrho}(\alpha,\beta) - k^2 \operatorname{sn}^2 u}{k^2 \operatorname{sn}^2 \overset{3}{\varrho}(\alpha,\beta)} = \frac{\operatorname{dn}^2 u - \operatorname{dn}^2 \overset{3}{\varrho}(\alpha,\beta)}{k^2 \operatorname{sn}^2 \overset{3}{\varrho}(\alpha,\beta)}$, so erhält man

$$\operatorname{dn}(nu) = \frac{\mathrm{P}'(\operatorname{dn}^2 \overset{3}{\varrho}(\alpha,\beta) - \operatorname{dn}^2 u)}{\mathrm{P}'(\operatorname{dn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta) - \operatorname{dn}^2 u)} \cdot \frac{\mathrm{P}'[\operatorname{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)]}{\mathrm{P}'[\operatorname{sn}^2 \overset{3}{\varrho}(\alpha,\beta)]}.$$

Setzt man in dieser Gleichung $u = K \pm iK'$, so ist $\operatorname{dn} u = 0$ und $\operatorname{dn}(nK \pm niK') = (-1)^{\frac{n}{2}}$, da n eine gerade Zahl ist; daher ist

$$(-1)^{\frac{n}{2}} = \frac{\mathrm{P}'[\operatorname{dn}^2 \overset{3}{\varrho}(\alpha,\beta)]}{\mathrm{P}'[\operatorname{dn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)]} \cdot \frac{\mathrm{P}'[\operatorname{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)]}{\mathrm{P}'[\operatorname{sn}^2 \overset{3}{\varrho}(\alpha,\beta)]};$$

und wird die vorige Gleichung hierdurch dividirt, so entsteht für ein gerades n:

$$3. \quad (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot \operatorname{dn}(nu) = \frac{\mathrm{P}'\left(1-\frac{\operatorname{dn}^2 u}{\operatorname{dn}^2 \overset{3}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}{\mathrm{P}'\left(1-\frac{\operatorname{dn}^2 u}{\operatorname{dn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}.$$

Denselben Ausdruck erhält man kürzer, wenn man in der Formel 3. §. 155. ku für u und $\frac{1}{k}$ statt des Moduls k setzt.

Ist aber n eine ungerade Zahl, so findet man auf ähnliche Weise, wie vorhin, den Ausdruck

$$\operatorname{dn}(nu) = \operatorname{dn} u \cdot \frac{\mathrm{P}'\left(1-\frac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 \overset{3}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}{\mathrm{P}'\left(1-\frac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}.$$

Damit alle Werthe von $\operatorname{sn}^2 \overset{3}{\varrho}(\alpha,\beta)$ verschieden von einander sind, hat man sich bei der Specialisirung des Regulators $\overset{3}{\varrho}(\alpha,\beta)$ für ein ungerades n zu beschränken auf die Verbindungen von

$$4. \begin{cases} (2\alpha+1) = +1, +3, +5, \ldots + (n-2) \text{ mit } (2\beta+1) = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots, \pm (n-2), \\ (2\alpha+1) = n \text{ mit } (2\beta+1) = +1, +3, +5, \ldots + (n-2), \\ (2\beta+1) = n \text{ mit } (2\alpha+1) = +1, +3, +5, \ldots + (n-2), \end{cases}$$

deren Anzahl $= \frac{n-1}{2} \cdot (n-1) + 2 \cdot \frac{(n-1)}{2} = \frac{nn-1}{2}$ ist. Verwandelt man, mit Hinweisung auf diese Specialisirung, P in P′, so hat man

$$5. \quad \operatorname{dn}(nu) = \operatorname{dn} u \cdot \frac{\mathrm{P}'\left(1-\frac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 \overset{3}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}{\mathrm{P}'\left(1-\frac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}.$$

Stellt man diese Gleichung zuerst also dar:

$$\mathrm{dn}(nu) = \mathrm{dn}\,u.\frac{\mathrm{P}'[\mathrm{dn}^2 \overset{3}{\varrho}(\alpha,\beta) - \mathrm{dn}^2 u]}{\mathrm{P}'[\mathrm{dn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta) - \mathrm{dn}^2 u]}.\frac{\mathrm{P}'[\mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)]}{\mathrm{P}'[\mathrm{sn}^2 \overset{3}{\varrho}(\alpha,\beta)]},$$

und setzt $u = K \pm iK'$, also $\mathrm{dn}\,u = 0$, so verwandelt sich das Verhältnifs $\frac{\mathrm{dn}(nu)}{\mathrm{dn}\,u}$ in $\frac{0}{0}$. Nimmt man aber $\frac{\partial\,\mathrm{dn}(nu)}{\partial\,\mathrm{dn}\,u} = \frac{n\,\mathrm{sn}(nu)\,\mathrm{cn}(nu)}{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u}$ und setzt hierin $u = K \pm iK$, so ist $\mathrm{sn}(nu) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}.\frac{1}{k}$, $\mathrm{cn}(nu) = \pm\frac{k'}{ik}$, $\mathrm{sn}\,u = \frac{1}{k}$ und $\mathrm{cn}\,u = \pm\frac{k'}{ik}$; daher erhält man

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}.n = \frac{\mathrm{P}'[\mathrm{dn}^2 \overset{3}{\varrho}(\alpha,\beta)]}{\mathrm{P}'[\mathrm{dn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)]}.\frac{\mathrm{P}'[\mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)]}{\mathrm{P}'[\mathrm{sn}^2 \overset{3}{\varrho}(\alpha,\beta)]};$$

und wird die vorige Gleichung hierdurch dividirt, so entsteht

$$6.\quad (-1)^{\frac{n-1}{2}}.\mathrm{dn}(nu) = n.\mathrm{dn}\,u.\frac{\mathrm{P}'\left(1 - \frac{\mathrm{dn}^2 u}{\mathrm{dn}^2 \overset{3}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}{\mathrm{P}'\left(1 - \frac{\mathrm{dn}^2 u}{\mathrm{dn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}.$$

§. 157.

Uebersicht der Specialisirung der vier Regulatoren und der Ausdrücke für $\mathrm{sn}(nu)$, $\mathrm{cn}(nu)$, $\mathrm{dn}(nu)$.

Wir stellen nun die vorigen Resultate übersichtlich zusammen, mit Angabe der Specialisirungen der Regulatoren.

I. Ist n eine *gerade* Zahl.

$$\textit{Regulator}\ \overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta) = \frac{2K\alpha + 2\beta iK'}{n}.$$

Verbindungen:

$(2\alpha) = +2, +4, +6, \ldots + (n-2)$ mit $2\beta = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots \pm (n-2)$,
$2\alpha = 0, n$ mit $2\beta = +2, +4, +6, \ldots + (n-2)$,
$2\beta = 0, n$ mit $2\alpha = +2, +4, +6, \ldots + (n-2)$.

Zahl der Verbindungen $= \frac{n^2-4}{2} = \frac{nn}{2} - 2$.

$$\textit{Regulator}\ \overset{2}{\varrho}(\alpha,\beta) = \frac{(2\alpha+1)K + 2\beta iK'}{n}.$$

Verbindungen:

$(2\alpha+1) = +1, +3, +5, \ldots + (n-1)$ mit $(2\beta) = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots \pm (n-2)$,
$(2\beta) = 0$ mit $(2\alpha+1) = +1, +3, +5, \ldots + (n-1)$,
$(2\beta) = n$ mit $(2\alpha+1) = +1, +3, +5, \ldots + (n-1)$.

Zahl der Verbindungen $= \frac{nn}{2}$.

$$Regulator\ \overset{3}{\varrho}(\alpha,\beta) = \frac{(2\alpha+1)K+(2\beta+1)iK'}{n}.$$

Verbindungen:

$(2\alpha+1) = +1, +3, +5, \dots +(n-1)$ mit $(2\beta+1) = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots \pm(n-1)$,

Zahl der Verbindungen $= \frac{nn}{2}$.

$$Regulator\ \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta) = \frac{2\alpha K+(2\beta+1)iK'}{n}.$$

Verbindungen:

$2\alpha = +2, +4, +6, \dots +(n-2)$ mit $2\beta+1 = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots \pm(n-1)$,

$2\alpha = 0, n$ mit $(2\beta+1) = +1, +3, +5, \dots +(n-1)$.

Zahl der Verbindungen $= \frac{nn}{2}$.

$$1.\quad \mathrm{sn}(nu) = n\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u.\frac{P'\left(1-\dfrac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 \overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}{P'\left(1-\dfrac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)},$$

$$2.\quad \mathrm{cn}(nu) = \frac{P'\left(1-\dfrac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 \overset{2}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}{P'\left(1-\dfrac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)} = (-1)^{\frac{n}{2}}.\frac{P'\left(1-\dfrac{\mathrm{cn}^2 u}{\mathrm{cn}^2 \overset{2}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}{P'\left(1-\dfrac{\mathrm{cn}^2 u}{\mathrm{cn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)},$$

$$3.\quad \mathrm{dn}(nu) = \frac{P'\left(1-\dfrac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 \overset{3}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}{P'\left(1-\dfrac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 \overset{3}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)} = (-1)^{\frac{n}{2}}.\frac{P'\left(1-\dfrac{\mathrm{dn}^2 u}{\mathrm{dn}^2 \overset{3}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}{P'\left(1-\dfrac{\mathrm{dn}^2 u}{\mathrm{dn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)},$$

oder auch, wenn $m = \frac{nn}{2}$ gesetzt wird,

$$4.\quad \mathrm{sn}(nu) = n\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u.\frac{\mathrm{sn}\,u + \overset{1}{A}\,\mathrm{sn}^3 u + \overset{2}{A}\,\mathrm{sn}^5 u \dots + \overset{m-2}{A}.\,\mathrm{sn}^{2m-3} u}{1+\overset{1}{D}\,\mathrm{sn}^2 u + \overset{2}{D}\,\mathrm{sn}^4 u \dots + \overset{m}{D}.\,\mathrm{sn}^{2m} u};$$

$$5.\quad (-1)^{\frac{n}{2}}.\,\mathrm{cn}(nu) = \frac{1+\overset{1}{B}\,\mathrm{cn}^2 u + \overset{2}{B}\,\mathrm{cn}^4 u \dots + \overset{m}{B}\,\mathrm{cn}^{2m} u}{1+\overset{1}{D'}\,\mathrm{cn}^2 u + \overset{2}{D'}\,\mathrm{cn}^4 u \dots + \overset{m}{D'}\,\mathrm{cn}_{2m} u},$$

$$6.\quad (-1)^{\frac{n}{2}}.\,\mathrm{dn}(nu) = \frac{1+\overset{1}{C}\,\mathrm{dn}^2 u + \overset{2}{C}\,\mathrm{dn}^4 u \dots + \overset{m}{C}\,\mathrm{dn}^{2m} u}{1+\overset{1}{D''}\,\mathrm{dn}^2 u + \overset{2}{D''}\,\mathrm{dn}^4 u \dots + \overset{m}{D''}\,\mathrm{dn}^{2m} u}.$$

II. Ist n eine ungerade Zahl.

$$\textit{Regulator}\ \overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta) = \frac{2\alpha K + 2\beta i K'}{n}.$$

Verbindungen:

$(2\alpha) = +2, +4, +6, \ldots + (n-1)$ mit $2\beta = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots \pm (n-1)$,
$2\alpha = 0$ mit $2\beta = +2, +4, +6, \ldots + (n-1)$,
$2\beta = 0$ mit $2\alpha = +2, +4, +6, \ldots + (n-1)$.

Zahl der Verbindungen $= \frac{nn-1}{2}$.

$$\textit{Regulator}\ \overset{2}{\varrho}(\alpha,\beta) = \frac{(2\alpha+1)K + 2\beta i K'}{u}.$$

Verbindungen:

$(2\alpha+1) = +1, +3, +5, \ldots + (n-2)$ mit $(2\beta) = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots \pm (n-1)$,
$(2\alpha+1) = n$ mit $(2\beta) = +2, +4, +6, \ldots + (n-1)$,
$(2\beta) = 0$ mit $(2\alpha+1) = +1, +3, +5, \ldots + (n-2)$.

Zahl der Verbindungen $= \frac{nn-1}{2}$.

$$\textit{Regulator}\ \overset{3}{\varrho}(\alpha,\beta) = \frac{(2\alpha+1) + (2\beta+1) i K'}{n}.$$

Verbindungen:

$(2\alpha+1) = +1, +3, +5, \ldots + (n-2)$ mit $(2\beta+1) = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots \pm (n-2)$,
$2\alpha+1 = n$ mit $2\beta+1 = +1, +3, +5, \ldots + (n-2)$,
$2\beta+1 = n$ mit $2\alpha+1 = +1, +3, +5, \ldots + (n-2)$.

Zahl der Verbindungen $= \frac{nn-1}{2}$.

$$\textit{Regulator}\ \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta) = \frac{2\alpha K + 2\beta i K'}{n}.$$

Verbindungen:

$(2\alpha) = +2, +4, +6, \ldots + (n-1)$ mit $2\beta+1 = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots \pm (n-2)$,
$2\alpha = 0$ mit $2\beta+1 = +1, +3, +5, \ldots + (n-2)$,
$2\beta+1 = n$ mit $2\alpha = +2, +4, +6, \ldots + (n-1)$.

Zahl der Verbindungen $= \frac{nn-1}{2}$.

Setzt man zur Abkürzung $m = \frac{nn-1}{2}$, so ist $2m+1 = nn$,

$$7. \quad \mathrm{sn}(nu) = n\,\mathrm{sn}\,u . \frac{P'\left(1 - \frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 \overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}{P'\left(1 - \frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)},$$

$$8.\quad \mathrm{cn}(nu) = \mathrm{cn}\,u.\frac{\mathrm{P}'\left(1-\dfrac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 \overset{2}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}{\mathrm{P}'\left(1-\dfrac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}.n\,\mathrm{cn}\,u.\frac{\mathrm{P}'\left(1-\dfrac{\mathrm{cn}^2 u}{\mathrm{cn}^2 \overset{2}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}{\mathrm{P}'\left(1-\dfrac{\mathrm{cn}^2 u}{\mathrm{cn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)},$$

$$9.\quad \mathrm{dn}(nu) = \mathrm{dn}\,u.\frac{\mathrm{P}'\left(1-\dfrac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 \overset{3}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}{\mathrm{P}'\left(1-\dfrac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}.n\,\mathrm{dn}\,u.\frac{\mathrm{P}'\left(1-\dfrac{\mathrm{dn}^2 u}{\mathrm{dn}^2 \overset{3}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)}{\mathrm{P}'\left(1-\dfrac{\mathrm{dn}^2 u}{\mathrm{dn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)},$$

oder auch

$$10.\qquad \mathrm{sn}(nu) = n.\frac{\mathrm{sn}\,u + \overset{1}{A}\,\mathrm{sn}^3 u + \overset{2}{A}\,\mathrm{sn}^5 u \ldots + \overset{m}{A}\,\mathrm{sn}^{2m+1} u}{1 + \overset{1}{D}\,\mathrm{sn}^2 u + \overset{2}{D}\,\mathrm{sn}^4 u \ldots + \overset{m}{D}\,\mathrm{sn}^{2m} u},$$

$$11.\quad (-1)^{\frac{n-1}{2}}.\mathrm{cn}(nu) = n.\frac{\mathrm{cn}\,u + \overset{1}{B}\,\mathrm{cn}^3 u + \overset{2}{B}\,\mathrm{cn}^5 u \ldots + \overset{m}{B}\,\mathrm{cn}^{2m+1} u}{1 + \overset{1}{D'}\,\mathrm{cn}^2 u + \overset{2}{D'}\,\mathrm{cn}^4 u \ldots + \overset{m}{D'}\,\mathrm{cn}^{2m} u},$$

$$12.\quad (-1)^{\frac{n-1}{2}}.\mathrm{dn}(nu) = n.\frac{\mathrm{dn}\,u + \overset{1}{C}\,\mathrm{dn}^3 u + \overset{2}{C}\,\mathrm{dn}^5 u \ldots + \overset{m}{C}\,\mathrm{dn}^{2m+1} u}{1 + \overset{1}{D''}\,\mathrm{dn}^2 u + \overset{2}{D''}\,\mathrm{dn}^4 u \ldots + \overset{m}{D''}\,\mathrm{dn}^{2m} u},$$

§. 158.

Relationen unter den Coefficienten in dem entwickelten Zähler und Nenner der Ausdrücke von $\mathrm{cn}(nu)$ und $\mathrm{dn}(nu)$.

Setzt man in der Formel (6. §. 157.) $K-u$ statt u, so verwandelt sich $\mathrm{dn}\,u$ in $\frac{k'}{\mathrm{dn}\,u}$ und $\mathrm{dn}(nu)$ wieder in $\mathrm{dn}(nu)$, da n eine gerade Zahl ist. Wir erhalten also

$$(-1)^{\frac{n}{2}}.\mathrm{dn}(nu) = \frac{\overset{m}{C}\,k'^{2m} + \overset{m}{C}\,k'^{2m-2}\,\mathrm{dn}^2 u \ldots + \mathrm{dn}^{2m} u}{\overset{m}{D''}\,k'^{2m} + \overset{m-1}{D''}\,k'^{2m-2}\,\mathrm{dn}^2 u \ldots + \mathrm{dn}^{2m} u},$$

und da dieser Ausdruck mit dem Ausdrucke (6.) in §. 157. derselbe sein muſs, so hat man

$$\overset{m}{C} = \overset{m}{D''},$$

$$\overset{m-1}{C} = k'^2.\overset{1}{C}\overset{m}{D''} \quad \text{und} \quad \overset{m-1}{D''} = k'^2.\overset{1}{D''}.\overset{m}{D''},$$

$$\overset{m-2}{C} = k'^4.\overset{2}{C}\overset{m}{D''} \quad - \quad \overset{m-2}{D''} = k'^4.\overset{2}{D''}.\overset{m}{D''},$$

$$\overset{m-3}{C} = k'^6.\overset{3}{C}\overset{m}{D''} \quad - \quad \overset{m-3}{D''} = k'^6.\overset{3}{D''}.\overset{m}{D''},$$

u. s. w. u. s. w.

$$1 = k'^{2m}.\overset{m}{C}\overset{m}{D'} \quad - \quad 1 = k'^{2m}.(\overset{m}{D''})^2.$$

Aus diesen Gleichungen folgt zunächst $\overset{m}{D}' = \overset{m}{C} = \pm \frac{1}{k'^m}$ und es bleibt nur noch das Vorzeichen zu bestimmen übrig. Die wirkliche Multiplication giebt $\overset{m}{C} = \mathrm{P}'\left[\frac{1}{\mathrm{dn}^2\, \overset{3}{\varrho}(\alpha, \beta)}\right]$.

Zu einem Factor von der Form $\mathrm{dn}\left(\frac{(2\alpha+1)K + (2\beta+1)iK'}{n}\right)$ gehört immer ein Factor von der Form $\mathrm{dn}\left(\frac{(2\alpha+1)K - (2\beta+1)iK'}{n}\right)$ und das Product eines solchen Paares ist immer positiv, da, wenn der erste Factor $= P \pm Qi$ ist, der andere $= P \mp Qi$, also das Product $= P^2 + Q^2$ ist. Factoren anderer Art erhält man aber bei der Specialisirung des Regulators $\overset{3}{\varrho}(\alpha, \beta)$ nicht, wenn n eine gerade Zahl ist; daher ist für $m = \frac{nn}{2}$:

$$1. \quad \left\{ \begin{array}{lll} \overset{m}{C} = \frac{1}{k'^m} & \text{und} & \overset{m}{D}'' = \frac{1}{k'^m}, \\ \overset{m-1}{C} = \frac{\overset{1}{C}}{k'^{m-2}} & - & \overset{m-1}{D}'' = \frac{\overset{1}{D}''}{k'^{m-2}}, \\ \overset{m-2}{C} = \frac{\overset{2}{C}}{k'^{m-4}} & - & \overset{m-2}{D}'' = \frac{\overset{2}{D}''}{k'^{m-4}}, \\ \overset{m-3}{C} = \frac{\overset{3}{C}}{k'^{m-6}} & - & \overset{m-3}{D}'' = \frac{\overset{3}{D}''}{k'^{m-6}} \\ \text{u. s. w.} & & \text{u. s. w.} \end{array} \right.$$

Ist aber n eine ungerade Zahl, so verwandelt sich $\mathrm{dn}(nu)$ in $\frac{k'}{\mathrm{dn}(nu)}$, wenn man $K - u$ für u setzt. Die Formel (12.) im §. 157. verwandelt sich nun in

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \mathrm{dn}(nu) = \frac{1}{n} \cdot \frac{\overset{m}{D}'' k'^{2m}\, \mathrm{dn}\, u + \overset{m-1}{D}'' k'^{2m-2}\, \mathrm{dn}^3 u \ldots + \mathrm{dn}^{2m+1} u}{\overset{m}{C} k'^{2m} + \overset{m-1}{C} k'^{2m-2}\, \mathrm{dn}^2 u \ldots + \mathrm{dn}^{2m} u},$$

und wird sie mit der früheren Formel identificirt, so hat man

$$\begin{array}{lll} \overset{m}{D}'' = n^2 . \overset{m}{C} & \text{und} & \overset{m-1}{C} = k'^2 . \overset{1}{D}'' . \overset{m}{C}, \\ \overset{m-1}{D}'' = n^2 k'^2 . \overset{1}{C}\overset{m}{C} & - & \overset{m-2}{C} = k'^4 . \overset{2}{D}'' . \overset{m}{C}, \\ \overset{m-2}{D}'' = n^2 k'^4 . \overset{2}{C}\overset{m}{C} & - & \overset{m-3}{C} = k'^6 . \overset{3}{D}'' . \overset{m}{C}, \\ \ldots\ldots & & \ldots\ldots \\ 1 = n^2 k'^{2m} . \overset{m}{C}{}^2 & - & 1 = k'^{2m} . \overset{m}{D}'' . \overset{m}{C}. \end{array}$$

Hieraus folgt aber für $m=\frac{nn-1}{2}$:

$$2.\quad\begin{cases}
\overset{m}{D''}=\frac{n}{k'^m} & \text{und}\quad \overset{m}{C}=\frac{1}{n\,k'^m},\\
\overset{m-1}{D''}=\frac{n}{k'^{m-2}}.\overset{1}{C} & \text{"}\quad \overset{m-1}{C}=\frac{1}{n\,k'^{m-2}}.\overset{1}{D''},\\
\overset{m-2}{D''}=\frac{n}{k'^{m-4}}.\overset{2}{C} & \text{"}\quad \overset{m-2}{C}=\frac{1}{n\,k'^{m-4}}.\overset{2}{D''},\\
\overset{m-3}{D''}=\frac{n}{k'^{m-6}}.\overset{3}{C} & \text{"}\quad \overset{m-3}{C}=\frac{1}{n\,k'^{m-6}}.\overset{3}{D''}\\
\text{u. s. w.} & \qquad\text{u. s. w.}
\end{cases}$$

Da sich in §. 157. die Formel (6.) in (5.) verwandelt, wenn man ku statt u und $\frac{1}{k}$ statt des Moduls k setzt, so erhält man für ein gerades n aus den vorigen Formeln, wenn $m=\frac{nn}{2}$ gesetzt wird,

$$3.\quad\begin{cases}
\overset{m}{B}=(-1)^{\frac{m}{2}}.\left(\frac{k}{k'}\right)^m & \text{und}\quad \overset{m}{D'}=(-1)^{\frac{m}{2}}.\left(\frac{k}{k'}\right)^m,\\
\overset{m-1}{B}=(-1)^{\frac{m-2}{2}}.\left(\frac{k}{k'}\right)^{m-2}.\overset{1}{B} & \text{"}\quad \overset{m-1}{D'}=(-1)^{\frac{m-2}{2}}.\left(\frac{k}{k'}\right)^{m-2}.\overset{1}{D},\\
\overset{m-2}{B}=(-1)^{\frac{m-4}{2}}.\left(\frac{k}{k'}\right)^{m-4}.\overset{2}{B} & \text{"}\quad \overset{m-2}{D'}=(-1)^{\frac{m-4}{2}}.\left(\frac{k}{k'}\right)^{m-4}.\overset{2}{D},\\
\overset{m-3}{B}=(-1)^{\frac{m-6}{2}}.\left(\frac{k}{k'}\right)^{m-6}.\overset{3}{B} & \text{"}\quad \overset{m-3}{D'}=(-1)^{\frac{m-6}{2}}.\left(\frac{k}{k'}\right)^{m-6}.\overset{3}{D}\\
\text{u. s. w.} & \qquad\text{u. s. w.},
\end{cases}$$

und die Formeln (2.) verwandeln sich für ein ungerades n in

$$4.\quad\begin{cases}
\overset{m}{D'}=(-1)^{\frac{m}{2}}.n.\left(\frac{k}{k'}\right)^m & \text{und}\quad \overset{m}{B}=(-1)^{\frac{m}{2}}.\frac{1}{n}.\left(\frac{1}{k'}\right)^m,\\
\overset{m-1}{D'}=(-1)^{\frac{m-2}{2}}.n.\left(\frac{k}{k'}\right)^{m-2}.\overset{1}{B} & \text{"}\quad \overset{m-1}{B}=(-1)^{\frac{m-2}{2}}.\frac{1}{n}.\left(\frac{k}{k'}\right)^{m-2}.\overset{1}{D'},\\
\overset{m-2}{D'}=(-1)^{\frac{m-4}{2}}.n.\left(\frac{k}{k'}\right)^{m-4}.\overset{2}{B} & \text{"}\quad \overset{m-2}{B}=(-1)^{\frac{m-4}{4}}.\frac{1}{n}.\left(\frac{k}{k'}\right)^{m-4}.\overset{2}{D'},\\
\overset{m-3}{D'}=(-1)^{\frac{m-6}{2}}.n.\left(\frac{k}{k'}\right)^{m-6}.\overset{3}{B} & \text{"}\quad \overset{m-3}{B}=(-1)^{\frac{m-6}{2}}.\frac{1}{n}.\left(\frac{h}{k'}\right)^{m-6}.\overset{3}{D'}\\
\text{u. s. w.} & \qquad\text{u. s. w.},
\end{cases}$$

in welchen wieder $m=\frac{nn-1}{2}$ ist. Zu denselben Resultaten gelangt man auch, wenn man in den Formeln (5.) und (11.) §. 157. $u+K+iK'$ statt u setzt, wodurch sich $\operatorname{cn} u$ in $\frac{k'}{ik}.\frac{1}{\operatorname{cn} u}$ verwandelt, und wenn man die hier-

durch entstehenden neuen Ausdrücke für $\mathrm{cn}(nu)$ mit den vorigen wieder identificirt.

§. 159.

Vielgliedrige Ausdrücke für $\mathrm{cn}(nu)$ und $\mathrm{dn}(nu)$, $\mathrm{am}(nu)$ und $\mathfrak{L}\,\mathrm{am}(nu)$, worin n eine ungerade Zahl ist.

Setzt man der Kürze wegen für den Augenblick $(-1)^{\frac{n-1}{2}}.\mathrm{cn}(nu)=\lambda$ und $\mathrm{cn}\,u=y$, so hat man die Gleichung

$$\frac{\lambda}{n}(\overset{m}{D'}.y^{2m}+\overset{m-1}{D'}.y^{2m-2}\ldots.+1)=\overset{m}{B}y^{2m+1}+\overset{m-1}{B}y^{2m-1}+\ldots.+y \text{ oder}$$

$$\left(y^{2m+1}+\frac{\overset{m-1}{B}}{\overset{m}{B}}y^{2m-1}\ldots.+\frac{y}{\overset{m}{B}}\right)-\frac{\lambda}{n}\left(\frac{\overset{m}{D'}}{\overset{m}{B}}y^{2m}+\frac{\overset{m-1}{D'}}{\overset{m}{B}}y^{2m-2}\ldots.+\frac{1}{\overset{m}{B}}\right)=0.$$

Eine Wurzel dieser Gleichung ist $y=\mathrm{cn}\,u$, und ist $\mathrm{cn}\,u'$ eine andere Wurzel, so mufs $\mathrm{cn}(nu')=\mathrm{cn}(nu)$ sein. Eine Folge hiervon ist, dafs nu' von nu um einen Ausdruck von der Form $4\alpha K+4\beta iK'$ verschieden ist. Man kann aber auch, da $2\alpha(n+1)$ und $2\beta(n+1)$ durch 4 theilbar sind,

$$nu'=nu+2\alpha(n+1)K+2\beta(n+1)iK$$

setzen, und hieraus folgt

$$u'=u+2\alpha K+2\beta iK'+\frac{2\alpha K+2\beta iK'}{n}.$$

Also ist

$$\mathrm{cn}\,u'=(-1)^{\alpha+\beta}\mathrm{cn}\left(u+\frac{2\alpha K+2\beta iK'}{n}\right)$$

der allgemeine Ausdruck der Wurzeln der obigen Gleichung. Verbindet man nun die Werthe $\alpha=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \ldots.\pm\frac{n-1}{2}$ mit $\beta=0,\ \pm1,\ \pm3,\ \ldots.\ \pm\frac{n-1}{2}$, so erhält man nn Verbindungen, und die ihnen entsprechenden Werthe von $\mathrm{cn}\,u'$ sind sämmtlich von einander verschieden. Da nun auch $2m+1=nn$ der Grad der obigen Gleichung ist, so sind die genannten Werthe von $\mathrm{cn}\,u'$ gerade die Wurzeln der obigen Gleichung; die negative Summe dieser Wurzeln ist der Coefficient der Potenz y^{2m} in der obigen Gleichung, und also $=-\frac{\lambda}{n}.\frac{\overset{m}{D'}}{\overset{m}{B}}$. Da nun aber $\frac{\overset{m}{D'}}{\overset{m}{B}}=n^2$ nach §. 158. ist, so ist

$$1.\quad n\,\mathrm{cn}(nu)=(-1)^{\frac{n-1}{2}}.S\left[(-1)^{\alpha+\beta}\mathrm{cn}\left(u+\frac{2\alpha K+2\beta iK'}{n}\right)\right]$$

und es kann diese Formel auch also dargestellt werden:

2. $(-1)^{\frac{n-1}{2}} . n \operatorname{cn}(nu) = \operatorname{cn} u + S' \{(-1)^{\alpha+\beta} \operatorname{cn}(u + \overset{1}{\varrho}(\alpha, \beta)) + \operatorname{cn}(u - \overset{1}{\varrho}(\alpha, \beta))\}$.

Auf gleiche Weise erhält man die Formel

$$3. \quad n \operatorname{dn}(nu) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} . S \left[(-1)^{\beta} \operatorname{dn}\left(u + \frac{2\alpha K + 2\beta i K'}{n}\right)\right],$$

in welcher, wie in der Formel (1.), die Werthe $\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ $\ldots \pm \frac{n-1}{2}$ mit den Werthen $\beta = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots . \pm \frac{n-1}{2}$ zu verbinden sind. Es läfst sich diese Formel übrigens auch also darstellen:

4. $(-1)^{\frac{n-1}{2}} . n . \operatorname{dn}(nu) = \operatorname{dn} u + S' \{(-1)^{\beta} [\operatorname{dn}(u + \overset{1}{\varrho}(\alpha, \beta)) + \operatorname{dn}(u - \overset{1}{\varrho}(\alpha, \beta))]\}$.

Multiplicirt man die letzte Gleichung mit ∂u und integrirt jedes Glied, so erhält man

5. $(-1)^{\frac{n-1}{2}} . \operatorname{am}(nu) = \operatorname{am} u + S' (-1)^{\beta} [\operatorname{am}(u + \overset{1}{\varrho}(\alpha, \beta)) + \operatorname{am}(u - \overset{1}{\varrho}(\alpha, \beta))]$.

Vertauscht man in dieser Gleichung α mit β und zugleich den Modul k mit k', also auch K mit K', und multiplicirt die Gleichung mit i, so verwandelt sie sich in

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} . \mathfrak{L} \operatorname{am}(nui)$$
$$= \mathfrak{L} \operatorname{am}(ui) + S' (-1)^{\alpha} [\mathfrak{L} \operatorname{am}(ui + \overset{1}{\varrho}(\alpha, \beta)) + \mathfrak{L} \operatorname{am}(ui - \overset{1}{\varrho}(\alpha, \beta))],$$

oder, wenn man $\frac{u}{i}$ statt u setzt, in

$$6. \quad (-1)^{\frac{n-1}{2}} . \mathfrak{L} \operatorname{am}(nu)$$
$$= \mathfrak{L} \operatorname{am} u + S' (-1)^{\alpha} [\mathfrak{L} \operatorname{am}(u + \overset{1}{\varrho}(\alpha, \beta)) + \mathfrak{L} \operatorname{am}(u - \overset{1}{\varrho}(\alpha, \beta))].$$

§. 160.

Zweite Darstellung von $\operatorname{sn}(nu)$, $\operatorname{cn}(nu)$ und $\operatorname{dn}(nu)$ für ein ungerades n, in der Form von Producten.

In §. 154. sind die Wurzeln der Gleichung

$$x^{2m+1} + \frac{\overset{m-1}{A}}{\overset{m}{D}} x^{2m-1}, \ldots + \frac{x}{\overset{m}{D}} - n \operatorname{sn}(nu) \left(x^{2m} + \frac{\overset{m-1}{D}}{\overset{m}{D}} x^{2m-2}, \ldots + \frac{1}{\overset{m}{D}}\right) = 0$$

gefunden worden, in welcher $m = \frac{nn-1}{2}$ und n eine ungerade Zahl ist. Das von x unabhängige Glied in dieser Gleichung ist $-\frac{n \operatorname{sn}(nu)}{\overset{m}{D}}$; oder,

da $\overset{m}{D} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}.nk^m$ ist, so ist dieses Glied $= -(-1)^{\frac{n-1}{2}}.\frac{\mathrm{sn}(nu)}{k^m}$. Dasselbe Glied ist aber auch das negative Product aller Wurzeln der Gleichung; daher haben wir

$$\mathrm{sn}(nu) = (-1)^{\frac{n-1}{n}}.k^{\frac{nn-1}{2}}.\mathrm{P}\left[(-1)^\alpha \,\mathrm{sn}\left(u+\frac{2\alpha K+2\beta i K'}{n}\right)\right],$$

wenn in dem allgemeinen Factor des Productes die Werthe $\alpha = 0, \pm 1, \pm 3, \ldots . \pm\left(\frac{n-1}{2}\right)$ mit den Werthen $2\beta = 0, \pm 1, \pm 3, \ldots . \pm\left(\frac{n-1}{2}\right)$ verbunden werden. Das Product aller aus $(-1)^\alpha$ durch Specialisirung entstehenden Factoren ist $= +1$; daher ist

$$1.\quad \mathrm{sn}(nu) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}.k^{\frac{nn-1}{2}}.\mathrm{P}\left[\mathrm{sn}\left(u+\frac{2\alpha K+2\beta i K'}{n}\right)\right].$$

In §. 154. sind auch die Wurzeln der Gleichung

$$y^{2m+1} + \frac{\overset{m-1}{B}}{\overset{m}{B}} y^{2m-1} \ldots . + \frac{y}{\overset{m}{B}} - \frac{\lambda}{n}\left(\frac{\overset{m}{D'}}{\overset{m}{B}} y^{2m} \ldots . + \frac{1}{\overset{m}{B}}\right)$$

gefunden worden. Das von x unabhängige Glied in dieser Gleichung ist $-\frac{\lambda}{n}.\frac{1}{\overset{m}{B}}$, welches sich, da $\lambda = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \mathrm{cn}(nu)$ und $\frac{1}{\overset{m}{B}} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}.n\left(\frac{k'}{k}\right)^m$ ist, auf $-\left(\frac{k'}{k}\right)^m \mathrm{cn}(nu)$ reducirt. Daher ist

$$2.\quad \mathrm{cn}(nu) = \left(\frac{k}{k'}\right)^{\frac{nn-1}{2}}.\mathrm{P}\left[\mathrm{cn}\left(u+\frac{2\alpha K+2\beta i K'}{n}\right)\right].$$

Eben so findet sich

$$3.\quad \mathrm{dn}(nu) = \left(\frac{1}{k'}\right)^{\frac{nn-1}{2}}.\mathrm{P}\left[\mathrm{dn}\left(u+\frac{2\alpha K+2\beta i K'}{n}\right)\right],$$

und in diesen Formeln sind für α und β dieselben Werthe zu setzen, wie in der vorigen Formel (1.).

Da $\frac{nn-1}{2}$ immer durch 4 theilbar ist, weil $\frac{nn-1}{2} = 2(r+1)r$ ist, wenn $n = 2r+1$ gesetzt wird, so kann man die letzte Formel auch dadurch aus der vorigen herleiten, dafs man ku für u und $\frac{1}{k}$ statt des Moduls k setzt, wodurch sich $\left(\frac{k}{k'}\right)^{\frac{nn-1}{2}}$ in $\left(\frac{1}{ik'}\right)^{\frac{nn-1}{2}} = \left(\frac{1}{k'}\right)^{\frac{nn-1}{2}}$ verwandelt.

Es können die so eben hergeleiteten Formeln auch also dargestellt werden:

$$4.\quad \mathrm{sn}(nu) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}.k^{\frac{nn-1}{2}}.\mathrm{sn}\,u.\mathrm{P}'\left[\mathrm{sn}(u+\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)).\mathrm{sn}(u-\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta))\right],$$

$$5.\quad \mathrm{cn}(nu) = \left(\frac{k}{k'}\right)^{\frac{nn-1}{2}}.\mathrm{cn}\,u.\mathrm{P}'[\mathrm{cn}(u+\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)).\mathrm{cn}(u-\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta))],$$

$$6.\quad \mathrm{dn}(nu) = \left(\frac{1}{k'}\right)^{\frac{nn-1}{2}}.\mathrm{dn}\,u.\mathrm{P}'[\mathrm{dn}(u+\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)).\mathrm{dn}(u-\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta))],$$

wenn sich P' zugleich auf die vorigen Vorschriften in Betreff der Specialisirung des Regulators $\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)$ beziehet.

§. 161.

Ausdrücke von $\mathrm{el}(nu)$ für ein gerades und ungerades n.

Nach §. 153. ist $n^2.\mathrm{dn}^2(nu) = S'[\mathrm{dn}^2(u+\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta))+\mathrm{dn}^2(u-\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta))]$ für ein gerades n. Multiplicirt man diese Gleichung mit ∂u und integrirt, so erhält man für ein *gerades n:*

$$1.\quad n.\mathrm{el}(nu) = S'[\mathrm{el}(u+\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta))+\mathrm{el}(u-\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta))]$$

und eine Constante ist nicht hinzuzufügen, weil beide Seiten der Gleichung für $u=0$ verschwinden. Entwickelt man das allgemeine Glied dieses vielgliedrigen Ausdrucks, in Anwendung der Formel

$$\mathrm{el}(u+a)+\mathrm{el}(u-a) = 2\,\mathrm{el}\,u - \frac{2k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u.\mathrm{sn}^2 a}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u}\ (\S.\ 65.),$$

so erhält man, da die Menge der also gefundenen Ausdrücke $=\frac{nn}{2}$ ist, für ein *gerades* n auch die Formel

$$2.\quad n.\mathrm{el}(nu) = n^2.\mathrm{el}\,u - 2k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u.S'\left[\frac{\mathrm{sn}^2\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta).\mathrm{sn}^2 u}\right].$$

Es kann übrigens die Formel (1.) auch also entwickelt werden, daſs jedes Glied des Ausdrucks in einer reellen Form erscheint.

Ist n eine *ungerade* Zahl, so folgt aus der Gleichung

$$n^2\,\mathrm{dn}^2(nu) = \mathrm{dn}^2 u + S'[\mathrm{dn}^2(u+\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta))+\mathrm{dn}^2(u-\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta))]$$

auf ähnliche Art die Formel

$$3.\quad n.\mathrm{el}(nu) = \mathrm{el}\,u + S'[\mathrm{el}(u+\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta))+\mathrm{el}(u-\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta))].$$

Die Anzahl der einzelnen Doppelglieder, welche aus dem allgemeinen Gliede hinter S' hergeleitet werden, ist $=\frac{n^2-1}{2}$ und durch die Entwicklung dieser Glieder erhält man

$$4.\quad n.\mathrm{el}(nu) = n^2.\mathrm{el}\,u - 2k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u.S'\left[\frac{\mathrm{sn}^2\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)\,\mathrm{sn}^2 u}\right].$$

§. 162.

Ausdrücke für $\text{lm}(nu)$, wenn n eine gerade oder eine ungerade ganze Zahl ist.

Multiplicirt man die Gleichung (1.) §. 161. mit ∂u und integrirt, so entsteht

$$\text{lm}(nu) = S'[\text{lm}(u+\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)) + \text{lm}(u-\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta))] + \text{const.}$$

Setzt man, um die Constante zu finden, $u=0$ und erwägt, daſs $\text{lm}(-a)=\text{lm}(+a)$ ist, so verwandelt sich die Formel für ein *gerades* n in

$$1.\quad \text{lm}(nu) = S'[\text{lm}(u+\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)) + \text{lm}(u-\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)) - 2, S'[\text{lm}\,\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)].$$

Da $\text{lm}(u+a)+\text{lm}(u-a) = 2\,\text{lm}\,u + 2\,\text{lm}\,a + \log(1-k^2\,\text{sn}^2 a\,\text{sn}^2 u)$ nach §. 73. ist und diese Formel $\frac{nn}{2}$ mal angewandt werden muſs, so erhält man auch für ein *gerades* n:

$$2.\quad \text{lm}(nu) = n^2.\,\text{lm}\,u + \log P'[1-k^2\,\text{sn}^2\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta).\text{sn}^2 u].$$

Mit dieser Formel vergleichen wir die in §. 150. für $\text{sn}(nu)$ gefundene Formel. Setzen wir darin zunächst $u+iK$ statt u, wodurch $\text{sn}(nu)$ nicht verändert wird, da n eine gerade Zahl, ist, so verwandelt sich $n\,\text{sn}\,u\,\text{cn}\,u\,\text{dn}\,u$ in $\frac{n}{k\,\text{sn}\,u}.\frac{-i\,\text{dn}\,u}{k\,\text{sn}\,u}.\frac{-i\,\text{cn}\,u}{\text{sn}\,u} = -\frac{n\,\text{dn}\,u\,\text{cn}\,u}{k^2\,\text{sn}^3 u}$; ferner verwandelt sich der Zähler $P'\left(1-\frac{\text{sn}^2 u}{\text{sn}^2\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)$, welcher $\frac{nn}{2}-2$ Factoren hat, in

$$P'\left(1-\frac{1}{k^2\,\text{sn}^2\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)\,\text{sn}^2 u}\right) = \frac{P'[1-k^2\,\text{sn}^2\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)\,\text{sn}^2 u]}{k^{nn-4}.\,\text{sn}^{nn-4}u\;P'[\text{sn}^2\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)]},$$

und der Nenner $P'\left(1-\frac{\text{sn}^2 u}{\text{sn}^2\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right)$ verwandelt sich in

$$\frac{P'[1-k^2\,\text{sn}^2\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)\,\text{sn}^2 u]}{k^{nn}.\,\text{sn}^{nn}u.\,P'[\text{sn}^2\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)]};$$

also erhält man

$$\text{sn}(nu) = -nk^2\,\text{sn}\,u\,\text{cn}\,u\,\text{dn}\,u.\frac{P'[1-k^2\,\text{sn}^2\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)\,\text{sn}^2 u]}{P'[1-k^2\,\text{sn}^2\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)\,\text{sn}^2 u]}.\frac{P'[\text{sn}^2\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)]}{P'[\text{sn}^2\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)]}.$$

Da ferner $\overset{m-2}{A} = P'[\text{sn}^2\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)]^{-1}$ und $D = P'[\text{sn}^2\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)]^{-1}$, also $\frac{P'[\text{sn}^2\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)]}{P'[\text{sn}^2\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)]} = \frac{\overset{m-2}{A}}{\overset{m}{D}} = -\frac{1}{k^2}$ ist, so verwandelt sich die Formel in

$$\text{sn}(nu) = n\,\text{sn}\,u\,\text{cn}\,u\,\text{dn}\,u.\frac{P'[1-k^2\,\text{sn}^2\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta).\text{sn}^2 u]}{P'[1-k^2\,\text{sn}^2\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta).\text{sn}^2 u]}.$$

Der Nenner dieser Formel ist nach §. 157. gleich $1 + \overset{1}{D}\,\mathrm{sn}^2 u + \overset{2}{D}\,\mathrm{sn}^4 u \ldots \ldots + \overset{m}{D}\,\mathrm{sn}^{nn} u$ für ein gerades n; daher kann die Formel (2.) auch also dargestellt werden:

$$3. \quad \mathrm{lm}(nu) = n^2.\,\mathrm{lm}\,u + \log(1 + \overset{1}{D}\,\mathrm{sn}^2 u + \overset{2}{D}\,\mathrm{sn}^4 u \ldots . + \overset{m}{D}\,\mathrm{sn}^{2m} u),$$

wo $m = \frac{nn}{2}$ und n eine gerade Zahl ist.

Ist n eine *ungerade* Zahl, und multiplicirt man die Formel (3.) §. 160. mit ∂u, so erhält man durch Integriren,

$$4. \quad \mathrm{lm}(nu) = \mathrm{lm}\,u + S'[\mathrm{lm}(u + \overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)) + \mathrm{lm}(u - \overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta))] - 2\,\mathrm{lm}[\varrho(\alpha,\beta)],$$

und diese Formel verwandelt sich leicht in

$$5. \quad \mathrm{lm}(nu) = n^2.\,\mathrm{lm}\,u + \log \mathrm{P}'[1 - k^2\,\mathrm{sn}^2 \overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)\,\mathrm{sn}^2 u].$$

Da für ein ungerades n, $k\,\mathrm{sn}\left(\frac{2\alpha \mp 2\beta' i K'}{n}\right) = \frac{1}{\mathrm{sn}\left(\frac{2\alpha \pm (2\beta) i K'}{n}\right)}$ ist, wenn $(2\beta+1) + 2\beta' = n$ gesetzt wird, so kann die vorige Formel auch also dargestellt werden:

$$\mathrm{lm}(nu) = n^2\,\mathrm{lm}\,u + \log \mathrm{P}'\left(1 - \frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right);$$

und da das hier vorkommende, durch P' bezeichnete Product gerade der Nenner des Ausdrucks von $\mathrm{sn}(nu)$ in Formel (7.) oder in Formel (10.) §. 157. ist, so ist

$$6. \quad \mathrm{lm}(nu) = n^2.\,\mathrm{lm}\,u + \log(1 + \overset{1}{D}\,\mathrm{sn}^2 u + \overset{2}{D}\,\mathrm{sn}^4 u \ldots . + \overset{m}{D}\,\mathrm{sn}^{2m} u),$$

wenn in dieser Formel $m = \frac{nn-1}{2}$ und n eine ungerade Zahl ist. Diese Formel hat also mit derjenigen (3.) für ein gerades n, eine große Uebereinstimmung.

§. 163.

Ausdrücke für die Modular-Integrale mit dem Argumente nu und dem Parameter na, durch andere mit dem Argumente u und dem Parameter a.

Ist zuerst n eine gerade Zahl, so ist, der Formel (1.) in §. 162. gemäß, der Unterschied

$$\frac{\mathrm{lm}(nu+na) - \mathrm{lm}(nu-na)}{2} =$$

$$S'\left[\frac{\mathrm{lm}(u+a+\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta))}{2} - \frac{\mathrm{lm}(u-a+\overset{4}{\varrho}(\alpha\,\beta))}{2} + \frac{\mathrm{lm}(u+a-\overset{4}{\varrho}(\alpha\,\beta))}{2} - \frac{\mathrm{lm}(u-a-\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta))}{2}\right].$$

Ferner ist nach §. 116. $\frac{\text{lm}(nu+na)-\text{lm}(nu-na)}{2} = nu.\text{el}(na)-\mathfrak{S}(nu,na)$; sodann

$$\frac{\text{lm}(u+a\pm\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta))}{2}-\frac{\text{lm}(u-a\pm\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta))}{2} = (u\pm\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta))\,\text{el}\,a-\mathfrak{S}(u\pm\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta),a).$$

Werden diese Werthe substituirt, so verwandelt sich die vorige Gleichung in

$$nu.\text{el}(na)-\mathfrak{S}(nu,na) =$$

$$\text{el}\,a[S'(u+\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta))+S'(u-\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta))]-S'[\mathfrak{S}(u+\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta),a)+\mathfrak{S}(u-\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta),a)].$$

Der Factor von $\text{el}\,a$ in dieser Gleichung ist $=\frac{nn}{2}.2u = nnu$, indem jede Summe S', $\frac{nn}{2}$ Summanden hat; daher entsteht die Gleichung

$$1.\quad \mathfrak{S}(nu,na)$$

$$= nu.\text{el}(na)-nnu.\text{el}\,a+S'[\mathfrak{S}(u+\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta),a)+\mathfrak{S}(u-\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta),a)].$$

Substituirt man aber

$$\frac{\text{lm}(a\pm\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)+u)}{2}-\frac{\text{lm}(-a\mp\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)+u)}{2}$$

$$= u.\text{el}(a\pm\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta))-\mathfrak{S}(u,a\pm\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)),$$

so erhält man

$$nu.\text{el}(na)-\mathfrak{S}(nu,na) =$$

$$u.S'[\text{el}(a+\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta))+\text{el}(a-\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta))]-S'[\mathfrak{S}(u,a+\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta))+\mathfrak{S}(u,a-\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta))].$$

Aufserdem ist, der Formel (1.) §. 161. gemäfs,

$$nu.\text{el}(na) = u.S'[\text{el}(a+\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta))+\text{el}(a-\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta))],$$

und wird hiervon die vorige Gleichung subtrahirt, so entsteht:

$$2.\quad \mathfrak{S}(nu,na) = S'[\mathfrak{S}(u,a+\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta))+\mathfrak{S}(u,a-\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta))].$$

In Anwendung der Gleichung (4.) oder (5.) §. 138. auf (1.) oder (2.) erhält man noch:

$$\mathfrak{S}(nu,na) = n^2.\mathfrak{S}(u,a)-2uk^2\,\text{sn}\,a\,\text{cn}\,a\,\text{dn}\,a.S'\frac{\text{sn}^2\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}{1-k^2\,\text{sn}^2\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)\,\text{sn}^2 a}$$

$$+\log P'\left[\sqrt{\frac{1-k^2\,\text{sn}\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)\,\text{sn}^2(u-a)}{1-k^2\,\text{sn}\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)\,\text{sn}^2(u+a)}}\right],$$

und da $k\,\text{sn}\left(\frac{2\alpha\pm(2\beta+1)iK'}{n}\right) = \frac{1}{\text{sn}\left(\frac{2\alpha\pm(2\beta'+1)iK'}{n}\right)}$ ist, wenn

$(2\beta+1)+(2\beta'+1) = n$ gesetzt wird, so kann die Gleichung noch etwas

einfacher also dargestellt werden:

$$3.\quad \mathfrak{S}(nu, na)$$

$$= n^2.\mathfrak{S}(u,a) + u.S'\left[\frac{2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{sn}^2 a - \mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right] - \log \mathrm{P}'\left[\sqrt{\frac{\mathrm{sn}^2(u+a) - \mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}{\mathrm{sn}^2(u-a) - \mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}}\right].$$

Ist aber n eine *ungerade* Zahl, so ist, der Gleichung (4.) des §. 162. gemäfs,

$$\frac{\mathrm{lm}(nu+na) - \mathrm{lm}(nu-na)}{2} = \frac{\mathrm{lm}(u+a) - \mathrm{lm}(u-a)}{2} +$$

$$S'\left[\frac{\mathrm{lm}(u+a+\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta))}{2} - \frac{\mathrm{lm}(u-a+\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta))}{2} + \frac{\mathrm{lm}(u+a-\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta))}{2} - \frac{\mathrm{lm}(u-a-\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta))}{2}\right].$$

Macht man hierin dieselben Substitutionen wie vorhin, so erhält man

$$nu.\mathrm{el}(na) - \mathfrak{S}(nu,na) = u.\mathrm{el}\,a - \mathfrak{S}(u,a) +$$

$$\mathrm{el}\,a[S'(u+\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)) + S'(u-\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta))] - S'[\mathfrak{S}(u+\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta),a) + \mathfrak{S}(u-\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta),a)].$$

Es ist aber $S'(u+\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)) + S'(u-\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)) = (nn-1)u$, da jede Summe aus $\frac{nn-1}{2}$ Theilen besteht. Daher erhält man

$$4.\quad \mathfrak{S}(nu,na) =$$

$$nu.\mathrm{el}(na) - n^2u.\mathrm{el}\,a + \mathfrak{S}(u,a) + S'[\mathfrak{S}(u+\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta),a) + \mathfrak{S}(u-\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta),a)].$$

Auf eine ähnliche Weise erhält man noch

$$nu.\mathrm{el}(na) - \mathfrak{S}(nu,na)$$

$$= u.\mathrm{el}\,a - \mathfrak{S}(u,a) + u.S'[\mathrm{el}(a+\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)) + \mathrm{el}(a-\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta))]$$

$$- S'[\mathfrak{S}(u,a+\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)) + \mathfrak{S}(u,a-\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta))].$$

Multiplicirt man aber die Gleichung (3.) des §. 161. mit u und subtrahirt davon die vorige Gleichung, so entsteht

$$5.\quad \mathfrak{S}(nu,na) = \mathfrak{S}(u,a) + S'[\mathfrak{S}(u,a+\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)) + \mathfrak{S}(u,a-\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta))].$$

Wendet man wieder die Formel

$$\mathfrak{S}(u,a+b) + \mathfrak{S}(u,a-b)$$

$$= 2\mathfrak{S}(u,a) - \frac{2uk^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}^2 b}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b} - \log\sqrt{\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 b\,\mathrm{sn}^2(u+a)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 b\,\mathrm{sn}^2(u-a)}} \text{ des §. 138.}$$

und dieselbe $\frac{nn-1}{2}$ mal an, so erhält man

$$\mathfrak{S}(nu,na) = n^2.\mathfrak{S}(u,a) - 2uk^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a.S'\frac{\mathrm{sn}^2\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)\,\mathrm{sn}^2 a}$$

$$- \log\mathrm{P}'\left[\sqrt{\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}\,\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)\,\mathrm{sn}^2(u+a)}{1-k^2\,\mathrm{sn}\,\overset{1}{\varrho}(\alpha,\beta)\,\mathrm{sn}^2(u-a)}}\right].$$

Und da für ein ungerades n, $k\,\mathrm{sn}\left(\frac{2\alpha\pm2\beta iK'}{n}\right)=\frac{1}{\mathrm{sn}\left(\frac{2\alpha\mp(2\beta'+1)iK'}{n}\right)}$ ist, wenn $(2\beta+1)+2\beta'=n$ gesetzt wird, so erhält man, noch etwas einfacher:

$$6.\quad \mathfrak{S}(nu,na)$$

$$=n^2.\mathfrak{S}(u,a)+u.S'\left[\frac{2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{sn}^2 a-\mathrm{sn}^2 \overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right]-\log P'\left[\frac{\mathrm{sn}^2(u+a)-\mathrm{sn}^2\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}{\mathrm{sn}^2(u-a)-\mathrm{sn}^2\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)}\right].$$

Diese Formel, in welcher n eine ungerade Zahl ist, ist der Formel (3.) für ein gerades n wieder sehr ähnlich; nur dafs jetzt der Regulator $\overset{4}{\varrho}(\alpha,\beta)$, dem §. 157. gemäfs, anders specialisirt werden mufs.

§. 164.

Differenzial-Gleichungen zur Bestimmung des Zählers und Nenners des Ausdrucks von $\mathrm{sn}(nu)$ für ein ungerades n.

Setzt man $x=\sqrt{k}.\mathrm{sn}\,u$ und $X=\sqrt{k}.\mathrm{sn}(nu)$, so verwandelt sich, wenn n eine ungerade Zahl ist, x in $\frac{1}{x}$ und gleichzeitig X in $\frac{1}{X}$, wenn man $u+iK'$ statt u setzt. Nimmt man wieder $m=\frac{nn-1}{2}$, setzt

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}.X=\frac{\overset{0}{c}x+\overset{1}{c}x^3+\overset{2}{c}x^5\ldots\ldots+\overset{m}{c}x^{2m+1}}{\overset{0}{a}+\overset{1}{a}x^2+\overset{2}{a}x^4\ldots\ldots+\overset{m}{a}x^m},$$

und verwandelt gleichzeitig x in $\frac{1}{x}$ und X in $\frac{1}{X}$, so erhält man

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}.X=\frac{\overset{m}{a}x+\overset{m-1}{a}x^3\ldots\ldots+\overset{0}{a}x^{2m+1}}{\overset{m}{c}+\overset{m-1}{c}x^2\ldots\ldots+\overset{0}{c}x^{2m}};$$

und dieser Ausdruck wird derselbe mit dem vorigen, wenn man $\overset{m}{c}=\overset{0}{a}$, $\overset{m-1}{c}=\overset{1}{a}$ u. s. w. setzt. Dann ist aber

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}.X=\frac{\overset{m}{a}x+\overset{m-1}{a}x^3+\overset{m-2}{a}x^5\ldots\ldots+\overset{0}{a}x^{2m+1}}{\overset{0}{a}+\overset{1}{a}x^3+\overset{2}{a}x^4\ldots\ldots+\overset{m}{a}x^{2m}}.$$

Da nun nach §. 157. (Formel 10.)

$$X=\frac{x\sqrt{k}\,(\mathrm{sn}\,u+\overset{1}{A}\,\mathrm{sn}^3u+\overset{2}{A}\,\mathrm{sn}^5u\ldots\ldots+\overset{m}{A}\,\mathrm{sn}^{2m+1})}{1+\overset{1}{D}\,\mathrm{sn}^2u+\overset{2}{D}\,\mathrm{sn}^4u\ldots\ldots+\overset{m}{D}\,\mathrm{sn}^{2m}u}$$

ist, oder auch

$$X = \frac{n\left(x+\frac{\overset{1}{A}}{k}x^3+\frac{\overset{2}{A}}{k^2}x^5\dots+\frac{\overset{m}{A}}{k^m}x^{2m+1}\right)}{1+\frac{\overset{1}{D}}{k}x^2+\frac{\overset{2}{D}}{k^2}x^4\dots+\frac{\overset{m}{D}}{k^m}x^{2m}},$$

so hat man unter anderen:

$$\frac{\overset{m}{a}}{\overset{0}{a}} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}.n;\quad (-1)^{\frac{n-1}{2}} = \frac{n\overset{m}{A}}{k^m} \quad\text{und}\quad \frac{\overset{m}{a}}{\overset{0}{a}} = \frac{\overset{m}{D}}{k^m}.$$

Der mittleren Gleichung gemäſs ist $\overset{m}{A} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}.\frac{k^m}{n}$, wie in §. 152., und die beiden Werthe von $\frac{\overset{m}{a}}{\overset{0}{a}}$ stimmen überein, wenn man $\overset{m}{D} = n^2.A$ nimmt; wie in §. 152.

Der Coefficient $\overset{0}{a}$ kann noch willkürlich gewählt und $=1$ gesetzt werden. Dann ist

$$1.\quad X = (-1)^{\frac{n-1}{2}}.\frac{\overset{m}{a}x+\overset{m-1}{a}x^3+\overset{m-2}{a}x^5\dots+x^{2m+1}}{1+\overset{1}{a}x^2+\overset{2}{a}x^4\dots+\overset{m}{a}x^{2m}}.$$

Setzen wir also

$$U = \overset{m}{a}x+\overset{m-1}{a}x^3+\overset{m-2}{a}x^5\dots+x^{2m+1},$$
$$V = 1+\overset{1}{a}x^2+\overset{2}{a}x^4\dots+\overset{m}{a}x^{2m},$$

so ist $X = (-1)^{\frac{n-1}{2}}.\frac{U}{V}$. Setzen wir $\frac{1}{x}$ statt x, so verwandelt sich

$$U \text{ in } \frac{\overset{m}{a}}{x}+\frac{\overset{m-1}{a}}{x^3}\dots+\frac{1}{x^{2m+1}} = \frac{V}{x^{2m+1}} \quad\text{und}$$
$$V \text{ in } 1+\frac{\overset{1}{a}}{x}\dots+\frac{\overset{m}{a}}{x^{2m}} = \frac{U}{x^{2m+1}}.$$

Aus der Gleichung $x = \sqrt{k}.\text{sn}\,u$ folgt $\partial x = \sqrt{k}.\text{cn}\,u.\text{dn}\,u.\partial u$ $= \sqrt{k}.\sqrt{\left[\left(1-\frac{x^2}{k}\right)(1-kx^2)\right]}.\partial u$, also $\partial u = \frac{\partial x}{\sqrt{k}\sqrt{(1-2\alpha x^2+x^4)}}$, wenn $\alpha = \frac{k+k^{-1}}{2}$ gesetzt wird.

Der Nenner $1+\overset{1}{a}x^2+\overset{2}{a}x^4\dots+\overset{m}{a}x^{2m} = V$ ist einerlei mit $1+\overset{1}{D}\,\text{sn}^2u+\overset{2}{D}\,\text{sn}^4u\dots+\overset{m}{D}\,\text{sn}^{2m}u$ und also nach Formel (3.) §. 162.

$$\text{lm}(nu)-n^2\,\text{lm}\,u = \log V.$$

Differenziiren wir diese Gleichung zweimal nach einander, so erhalten wir

$$n^2(\mathrm{dn}^2(nu)-\mathrm{dn}^2u)=\frac{\partial\left(\frac{\partial\log V}{\partial u}\right)}{\partial u},\text{ oder }n^2k^2(\mathrm{sn}^2u-\mathrm{sn}^2(na))=\frac{\partial\left(\frac{\partial\log V}{\partial u}\right)}{\partial u},$$

also

$$2.\quad n^2k(x^2-X^2)=\frac{\partial\left(\frac{\partial\log V}{\partial u}\right)}{\partial u}=n^2k\left(x^2-\frac{U^2}{V^2}\right).$$

Setzt man in dieser Gleichung $u+iK'$ statt u, so bleibt ∂u ungeändert, aber $\log V$ verwandelt sich in $\log U-(2m+1)\log x$; daher verwandelt sich die Gleichung (2.) in

$$n^2k\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{X^2}\right)=\frac{\partial\left(\frac{\partial\log U}{\partial u}\right)}{\partial u}-(2m+1).\frac{\partial\left(\frac{\partial\log x}{\partial u}\right)}{\partial u},\text{ oder}$$

$$3.\quad n^2k\left(\frac{1}{x^2}-\frac{V^2}{U^2}\right)=\frac{\partial\left(\frac{\partial\log U}{\partial u}\right)}{\partial u}-(2m+1).\frac{\partial\left(\frac{\partial\log x}{\partial u}\right)}{\partial u}.$$

Entwickeln wir nun noch die in diesen Gleichungen vorkommenden Differenzial-Verhältnisse.

Es ist $\partial\log V=\frac{\partial V}{V}$, also $\frac{\partial\log V}{\partial u}=\frac{\partial V}{V.\partial u}=\sqrt{k}\,\frac{\partial V}{\partial x}.\frac{\sqrt{(1-2\alpha x^2+x^4)}}{V}$,

also

$$\partial\left(\frac{\partial\log V}{\partial u}\right)=$$

$$\sqrt{k}.\left\{\frac{\partial^2V}{\partial x}.\frac{\sqrt{(1-2\alpha x^2+x^4)}}{V}+\frac{\partial V}{\partial x V^2}\left(\frac{V(-2\alpha x+2x^3)\partial x}{\sqrt{(1-2\alpha x^2+x^4)}}-\sqrt{(1-2\alpha x^2+x^4)}\partial V\right)\right\}$$

oder

$$\frac{1}{k}.\frac{\partial\left(\frac{\partial\log V}{\partial u}\right)}{\partial u}=$$

$$\frac{\partial^2V}{\partial x^2}.\frac{1-2\alpha x^2+x^4}{V}+\frac{\partial V}{\partial x}.\frac{(-2\alpha x+2x^3)}{V}-\frac{\partial^2V^2}{\partial x^2}.\frac{1-2\alpha x^2+x^4}{V^2}.$$

Wird dieser Werth in der Gleichung (2.) substituirt, so verwandelt sie sich in

$$\frac{\partial^2V}{\partial x^2}.\frac{1-2\alpha x^2+x^4}{V}+\frac{\partial V}{\partial x}.\frac{(-2\alpha x+2x^3)}{V}-\frac{\partial V^2}{\partial x^2}.\frac{1-2\alpha x^2+x^4}{V^2}=n^2\left(x^2-\frac{U^2}{V^2}\right)$$

oder auch in

$$4.\quad\left(V.\frac{\partial^2V}{\partial x^2}-\frac{\partial V}{\partial x}.\frac{\partial V}{\partial x}\right)(1-2\alpha x^2+x^4)+2V.\frac{\partial V}{\partial x}(-\alpha x+x^3)=n^2(V^2x^2-U^2).$$

Ferner ist $\frac{\partial\log x}{\partial u}=\frac{\partial x}{x.\partial u}=\frac{\sqrt{k}.\sqrt{(1-2\alpha x^2+x^4)}}{x}$; also ist

$$\partial\left(\frac{\partial\log x}{\partial u}\right)=\frac{\sqrt{k}}{x^2}.\left[\frac{x(-2\alpha x+2x^3)\partial x}{\sqrt{(1-2\alpha x^2+x^4)}}-\sqrt{(1-2\alpha x^2+x^4)}\partial x\right]\text{ und}$$

$$\frac{1}{k}.\frac{\partial\left(\frac{\partial\log x}{\partial u}\right)}{\partial u}=\frac{1}{x^2}(2x^2(-\alpha+x^2)-(1-2\alpha x^2+x^4))=x^2-\frac{1}{x^2}$$

und wie vorher findet man

$$\frac{1}{k}\cdot\frac{\partial\left(\frac{\partial \log U}{\partial u}\right)}{\partial u}=\frac{\left(U\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-\frac{\partial U}{\partial x}.\frac{\partial U}{\partial x}\right)}{U^2}(1-2\alpha x^2+x^4)+\frac{2U.\frac{\partial U}{\partial x}(-\alpha x+x^3)}{U^2}.$$

Werden diese Werthe in der Gleichung (3.) substituirt, und beachtet man, daſs $2m+1=n^2$ ist, so hat man

$$\frac{n^2}{x^2}-\frac{n^2.V^2}{U^2}=\left(U.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-\frac{\partial U}{\partial x}.\frac{\partial U}{\partial x}\right)\frac{(1-2\alpha x^2+x^4)}{U^2}-n^2x^2+\frac{n^2}{x^2}+2U.\frac{\partial U}{\partial x}.\frac{(-\alpha x+x^3)}{U^2},$$

oder

$$5.\quad \left(U.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-\frac{\partial U}{\partial x}.\frac{\partial U}{\partial x}\right)(1-2\alpha x^2+x^4)+2U.\frac{\partial U}{\partial x}(-\alpha x+x^3)=n^2(U^2x^2-V^2).$$

Vertauscht man in dieser Gleichung U mit V, so erhält man eine Gleichung, welche mit der Gleichung (4.) ganz dieselbe ist; wie es im Voraus zu erwarten war.

Aus der Gleichung $X=\sqrt{k}.\mathrm{sn}(nu)$ folgt $\partial X=n.\partial u\sqrt{k}.\mathrm{cn}(nu)\,\mathrm{dn}(nu)$,

oder $\frac{\partial X}{\partial x}=n.\frac{\sqrt{\left[\left(1-\frac{X^2}{k}\right)(1-kX^2)\right]}}{\sqrt{\left[\left(1-\frac{x^2}{k}\right)(1-kx^2)\right]}}$, und da $X=(-1)^{\frac{n-1}{2}}.\frac{U}{V}$, also

$\partial X=(-1)^{\frac{n-1}{2}}.\frac{V\partial U-U\partial V}{V^2}$ ist, so erhält man

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}.\frac{V\partial U-U\partial V}{\partial x}=n.\frac{\sqrt{\left[\left(V^2-\frac{U^2}{k}\right)(V^2-kU^2)\right]}}{\sqrt{(1-2\alpha x^2+x^4)}}\ \text{oder}$$

$$4.\quad (-1)^{\frac{n-1}{2}}.\left(V.\frac{\partial U}{\partial x}-U.\frac{\partial V}{\partial x}\right)=n.\sqrt{\frac{V^4-2\alpha U^2V^2+U^4}{1-2\alpha x^2+x^4}}.$$

Man kann aus den nun entwickelten Gleichungen einmal V und dann U eliminiren und erhält dadurch eine Differenzial-Gleichung zur Bestimmung von U und eine zur Bestimmung von V; indessen ist die combinirte Anwendung der Gleichungen (4.) und (5.) zweckmäſsiger, wenn es sich darum handelt, die Coefficienten $\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a}, \ldots \overset{m}{a}$ in den Ausdrücken V und W zu berechnen. Es hält nicht schwer, die dazu dienenden Recursionsformeln aus den Gleichungen (4.) und (5.) herzuleiten, indem man für U und V die arithmetischen Formen selbst substituirt. Da die Ausdrücke der unbekannten Coefficienten aber im Fortgange sehr zusammengesetzt werden und die Anwendung der zu findenden Resultate selten oder gar nicht nöthig ist, so wird es hinreichend sein, hier den Weg gezeigt zu haben, auf welchem die allgemeinen Ausdrücke von $\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a}$ etc. gefunden werden können.

Vierzehnter Abschnitt.

§. 165.

Die Modular-Functionen, dargestellt als Producte unendlich vieler Factoren.

Setzt man in der Formel (7.) §. 157. $\frac{u}{n}$ statt u, so kann sie, wenn man auf das Schema der Specialisirung der beiden in ihr vorkommenden Regulatoren $\overset{1}{\varrho}(\alpha, \beta)$ und $\overset{4}{\varrho}(\alpha, \beta)$ sieht, als ein Product von Producten dargestellt werden. Wir können setzen

$$\operatorname{sn}(u) = n \operatorname{sn}\left(\frac{u}{n}\right) \cdot \frac{\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{C} \cdot \mathfrak{D}}{\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{F} \cdot \mathfrak{G} \cdot \mathfrak{H}},$$

wenn die gewählten Zeichen die folgenden Bedeutungen haben

$$\mathfrak{A} = \mathrm{P}\left(1 - \frac{\operatorname{sn}^2\left(\frac{u}{n}\right)}{\operatorname{sn}^2\left(\frac{2\alpha K}{n}\right)}\right) \quad \text{für } 2\alpha = +2, +4, +6, \ldots + (n-1),$$

$$\mathfrak{B} = \mathrm{P}\left(1 - \frac{\operatorname{sn}^2\left(\frac{u}{n}\right)}{\operatorname{sn}^2\left(\frac{2\beta i K'}{n}\right)}\right) \quad \text{für } 2\beta = +2, +4, +6, \ldots + (n-1),$$

$$\mathfrak{C} = \mathrm{P}\left(1 - \frac{\operatorname{sn}^2\left(\frac{u}{n}\right)}{\operatorname{sn}^2\left(\frac{2\alpha K + 2\beta i K'}{n}\right)}\right) \quad \text{für die Verbindungen der vorigen Werthe von } 2\alpha \text{ und } 2\beta;$$

$$\mathfrak{D} = \mathrm{P}\left(1 - \frac{\operatorname{sn}^2\left(\frac{u}{n}\right)}{\operatorname{sn}^2\left(\frac{2\alpha K - 2\beta i K'}{n}\right)}\right) \quad \text{für dieselben Verbindungen der Werthe von } 2\alpha \text{ und } 2\beta;$$

$$\mathfrak{E} = \mathrm{P}\left(1 - \frac{\operatorname{sn}^2\left(\frac{u}{n}\right)}{\operatorname{sn}^2\left(\frac{2\alpha}{n} \cdot K + i K'\right)}\right) \quad \text{für } 2\alpha = 2, 4, 6, \ldots (n-1);$$

$$\mathfrak{F} = \mathrm{P}\left(1 - \frac{\operatorname{sn}^2\left(\frac{u}{n}\right)}{\operatorname{sn}^2\left(\frac{(2\beta+1) i K'}{n}\right)}\right) \quad \text{für } 2\beta + 1 = 1, 3, 5, \ldots (n-2);$$

$$\mathfrak{G} = \mathrm{P}\left(1 - \frac{\mathrm{sn}^2\left(\frac{u}{n}\right)}{\mathrm{sn}^2\left(\frac{2\alpha K + (2\beta+1)iK'}{n}\right)}\right)$$ für die vorigen Werthe von 2α und $2\beta+1$;

$$\mathfrak{H} = \mathrm{P}\left(1 - \frac{\mathrm{sn}^2\left(\frac{u}{n}\right)}{\mathrm{sn}^2\left(\frac{2\alpha K - (2\beta+1)iK'}{n}\right)}\right)$$ für dieselben Werthe von 2α und $2\beta+1$.

Die Zahl der Factoren jedes der acht angegebenen Producte vergröfsert sich gleichzeitig mit n und wird unendlich, wenn n unendlich genommen wird. Nehmen wir aber n unendlich, so erhalten die vorigen Formeln sehr merkwürdige Gestalten; sie werden einfacher, obgleich die Menge der Factoren unendlich grofs ist. Um die Grenzen zu finden, erinnern wir uns, dafs die Reihe für $\mathrm{sn}\,u$ die Gestalt

$$\mathrm{sn}\,u = u + au^3 + bu^5 + \text{etc.}$$

hat. Daher ist

$$n\,\mathrm{sn}\left(\frac{u}{n}\right) = u + \frac{au^3}{n^3} + \frac{bu^5}{n^4} \cdots$$

Wird also n unendlich genommen, so wird $n\,\mathrm{sn}\left(\frac{u}{n}\right) = u$. Ferner wird

$$\frac{\mathrm{sn}\,\frac{u}{n}}{\mathrm{sn}\,\frac{mv}{n}} = \frac{u + \frac{au^3}{n^2} + \frac{bu^5}{n^4} \cdots}{mv + \frac{am^3v^3}{n^2} + \frac{bm^5v^5}{u^4} \cdots};$$

Daher wird für ein unendliches n das Verhältnifs $\frac{\mathrm{sn}\,\frac{u}{n}}{\mathrm{sn}\,\frac{mv}{n}} = \frac{u}{mv}$. Hiernach verwandelt sich das erste Product in

$\mathfrak{A} = \mathrm{P}\left(1 - \frac{u^2}{(2\alpha K)^2}\right)$. Ferner ist $\mathfrak{B} = \mathrm{P}\left(1 + \frac{u^2}{(2\beta K')^2}\right)$,

$\mathfrak{C} = \mathrm{P}\left(1 - \frac{u^2}{(2\alpha K + 2\beta iK')^2}\right)$ und $\mathfrak{D} = \mathrm{P}\left(1 - \frac{u^2}{(2\alpha K - 2\beta iK')^2}\right)$,

und die kleinsten für α und β zu nehmenden Werthe sind nun $\alpha = 1$ und $\beta = 1$. Uebrigens wachsen die positiven ganzen Zahlen α und β ohne Ende. Da $\mathrm{sn}\left(\frac{2\alpha K}{n} + iK'\right) = \frac{1}{k\,\mathrm{sn}\left(\frac{2\alpha K}{n}\right)}$ ist, so wird das Verhältnifs

$$\frac{\mathrm{sn}\left(\frac{u}{n}\right)}{\mathrm{sn}\left(\frac{2\alpha K}{n} + iK'\right)} = k\,\mathrm{sn}\left(\frac{2\alpha K}{n}\right)\mathrm{sn}\left(\frac{u}{n}\right) = 0, \text{ und also } \mathfrak{E} = 1.$$

Ferner wird $\mathfrak{F} = \mathrm{P}\left(1+\frac{u^2}{(2\beta+1)^2 K'^2}\right)$; $\mathfrak{G} = \mathrm{P}\left(1-\frac{u^2}{(2\alpha K+(2\beta+1)iK')^2}\right)$ und $\mathfrak{H} = \mathrm{P}\left(1-\frac{u^2}{(2\alpha K-(2\beta+1)iK')^2}\right)$.

Setzt man auch in den Formeln (8.) und (9.) §. 157. jetzt $\frac{u}{n}$ für n, so erhält man

$$\operatorname{cn} u = \operatorname{cn}\left(\frac{u}{n}\right) \cdot \frac{\mathfrak{J}.\mathfrak{K}.\mathfrak{L}.\mathfrak{M}}{\mathfrak{E}.\mathfrak{F}.\mathfrak{G}.\mathfrak{H}} \quad \text{und} \quad \operatorname{dn} u = \operatorname{dn}\left(\frac{u}{n}\right) \cdot \frac{\mathfrak{N}.\mathfrak{O}.\mathfrak{P}.\mathfrak{Q}}{\mathfrak{E}.\mathfrak{F}.\mathfrak{G}.\mathfrak{H}},$$

wenn man der Kürze wegen setzt:

$$\mathfrak{J} = \mathrm{P}\left(1-\frac{\operatorname{sn}^2\left(\frac{u}{n}\right)}{\operatorname{sn}^2\left(\frac{(2\alpha+1)K}{n}\right)}\right) \text{ für } 2\alpha+1 = 1, 3, 5, \ldots (n-2);$$

$$\mathfrak{K} = \mathrm{P}\left(1-\frac{\operatorname{sn}^2\left(\frac{u}{n}\right)}{\operatorname{sn}^2\left(K+\frac{2\beta iK'}{n}\right)}\right) \text{ für } 2\beta = 2, 4, 6, \ldots (n-1);$$

$$\mathfrak{L} = \mathrm{P}\left(1-\frac{\operatorname{sn}^2\left(\frac{u}{n}\right)}{\operatorname{sn}^2\left(\frac{(2\alpha+1)K+2\beta iK'}{n}\right)}\right) \text{ für die vorigen Werthe von } 2\alpha+1 \text{ und } 2\beta;$$

$$\mathfrak{M} = \mathrm{P}\left(1-\frac{\operatorname{sn}^2\left(\frac{u}{n}\right)}{\operatorname{sn}^2\left(\frac{(2\alpha+1)K-2\beta iK'}{n}\right)}\right) \text{ für dieselben Werthe von } 2\alpha+1 \text{ und } 2\beta;$$

$$\mathfrak{N} = \mathrm{P}\left(1-\frac{\operatorname{sn}^2\left(\frac{u}{n}\right)}{\operatorname{sn}^2\left(\frac{(2\alpha+1)K}{n}+iK'\right)}\right) \text{ für } 2\alpha+1 = 1, 3, 5, \ldots (n-2);$$

$$\mathfrak{O} = \mathrm{P}\left(1-\frac{\operatorname{sn}^2\left(\frac{u}{n}\right)}{\operatorname{sn}^2\left(K+\frac{(2\beta+1)iK'}{n}\right)}\right) \text{ für } 2\beta+1 = 1, 3, 5, \ldots (n-2);$$

$$\mathfrak{P} = \mathrm{P}\left(\frac{\operatorname{sn}^2\left(\frac{u}{n}\right)}{\operatorname{sn}^2\left(\frac{(2\alpha+1)K+(2\beta+1)iK'}{n}\right)}\right) \text{ für die vorigen Werthe von } 2\alpha+1 \text{ und } 2\beta+1;$$

$$\mathfrak{Q} = \mathrm{P}\left(\frac{\operatorname{sn}^2\left(\frac{u}{n}\right)}{\operatorname{sn}^2\left(\frac{(2\alpha+1)K-(2\beta+1)iK'}{n}\right)}\right) \text{ für dieselben Werthe von } 2\alpha+1 \text{ und } 2\beta+1.$$

Setzen wir auch in diesen Formeln n unendlich grofs, so wird

$$\mathfrak{J} = \mathrm{P}\left(1-\frac{u^2}{((2\alpha+1)K)^2}\right),$$

Ferner ist $\operatorname{sn}\left(K+\frac{2\beta iK'}{n}\right) = \frac{\operatorname{cn}\left(\frac{2\beta iK'}{n}\right)}{\operatorname{dn}\left(\frac{2\beta iK'}{n}\right)}$; also

$$\frac{\operatorname{sn}\left(\frac{u}{n}\right)}{\operatorname{sn}\left(K+\frac{2\beta iK'}{n}\right)} = \frac{\operatorname{dn}\left(\frac{2\beta iK'}{n}\right)}{\operatorname{cn}\left(\frac{2\beta iK'}{n}\right)}.\operatorname{sn}\left(\frac{u}{n}\right) = 0 \text{ für ein unendliches } n:$$

folglich wird $\mathfrak{K}=1$. Das Product $\mathfrak{L}$ wird

$$\mathfrak{L} = \mathrm{P}\left(1-\frac{u^2}{((2\alpha+1)K+2\beta iK')^2}\right) \text{ und } \mathfrak{M} = \mathrm{P}\left(1-\frac{u^2}{((2\alpha+1)K-2\beta iK')^2}\right);$$

weiter wird $\mathfrak{N}=1$, $\mathfrak{O}=1$, $\mathfrak{P} = \mathrm{P}\left(1-\frac{u^2}{((2\alpha+1)K+(2\beta+1)iK')^2}\right)$ und

$$\mathfrak{Q} = \mathrm{P}\left(1-\frac{u^2}{((2\alpha+1)K-(2\beta+1)iK')^2}\right).$$

In allen diesen Formeln sind α und β positive ganze Zahlen, welche, von den kleinsten Werthen an, ohne Ende wachsen; nur darf nicht $2\alpha=0$ und $2\beta=0$ sein, wo 2α als Factor von K und 2β als Factor von iK' vorkommt.

§. 166.

Ausdruck der cyklischen Modular-Functionen des Argumentes u durch hyperbolische Potenzial-Functionen des Arcus $\eta' u$, in der Form von Producten unendlich vieler Factoren.

Aehnliche Ausdrücke durch gewöhnliche cyklische Functionen des Arcus ηu.

Die im vorigen §. gefundenen unendlichen Producte gestatten noch eine namhafte Zusammenziehung, durch welche ihre Anwendbarkeit sehr vergrößert wird. Dazu dienen die in §. 61. und §. 62. des ersten Theiles gefundenen Formeln

$$\sin\left(\frac{v\pi}{2}\right) = \frac{v\pi}{2}.\underset{1}{\mathrm{P}}\left(1-\frac{v^2}{(2\alpha)^2}\right); \qquad \mathfrak{Sin}\left(\frac{v\pi}{2}\right) = \frac{v\pi}{2}.\underset{1}{\mathrm{P}}\left(1+\frac{v^2}{(2\alpha)^2}\right);$$

$$\cos\left(\frac{v\pi}{2}\right) = \underset{1}{\mathrm{P}}\left(1-\frac{v^2}{(2\alpha-1)^2}\right) \text{ und } \mathfrak{Cos}\left(\frac{v\pi}{2}\right) = \underset{1}{\mathrm{P}}\left(\frac{v^2}{(2\alpha-1)^2}\right),$$

in welchen das den unendlichen Producten vorgesetzte $\underset{1}{\mathrm{P}}$ andeutet, dafs $\alpha=1$ der kleinste für α zu nehmende Werth sei. Durch Anwendung dieser Formeln findet man für einige unendliche Producte des §. 165. sogleich die folgenden einfacheren Ausdrücke:

$$\mathfrak{A} = \underset{1}{\mathrm{P}}\left\{1 - \frac{u^2}{(2\alpha K)^2}\right\} = \underset{1}{\mathrm{P}}\left\{1 - \frac{\left(\frac{u}{K}\right)}{(2\alpha)^2}\right\} = \frac{2K}{\pi u}.\sin\left(\frac{\pi u}{2K}\right);$$

$$\mathfrak{B} = \underset{1}{\mathrm{P}}\left\{1 + \frac{\left(\frac{u}{K'}\right)}{(2\beta)^2}\right\} = \frac{2K'}{\pi u}.\mathfrak{Sin}\left(\frac{\pi u}{2K'}\right);$$

$$\mathfrak{F} = \underset{1}{\mathrm{P}}\left\{1 + \frac{\left(\frac{u}{K'}\right)^2}{(2\alpha-1)^2}\right\} = \mathfrak{Cos}\left(\frac{\pi u}{2K'}\right);$$

$$\mathfrak{J} = \underset{1}{\mathrm{P}}\left\{1 - \frac{\left(\frac{u}{K}\right)^2}{(2\alpha-1)^2}\right\} = \cos\left(\frac{\pi u}{2K}\right).$$

In den vier noch übrigen Producten

$$\mathfrak{C}.\mathfrak{D} = \underset{1}{\mathrm{P}}\left\{\left(1 - \frac{u^2}{(2\alpha K + 2\beta i K')^2}\right)\left(1 - \frac{u^2}{(2\alpha K - 2\beta i K')^2}\right)\right\},$$

$$\mathfrak{G}.\mathfrak{H} = \underset{1}{\mathrm{P}}\left\{\left(1 - \frac{u^2}{(2\alpha K + (2\beta-1)iK')^2}\right)\left(1 - \left(\frac{u^2}{(2\alpha K - (2\beta-1)iK')^2}\right)\right\},$$

$$\mathfrak{L}.\mathfrak{M} = \underset{1}{\mathrm{P}}\left\{\left(1 - \frac{u^2}{((2\alpha-1)K + 2\beta i K')^2}\right)\left(1 - \frac{u^2}{((2\alpha-1)K - 2\beta i K')^2}\right)\right\},$$

$$\mathfrak{P}.\mathfrak{Q} = \underset{1}{\mathrm{P}}\left\{\left(1 - \frac{u^2}{((2\alpha-1)K + (2\beta-1)iK')^2}\right)\left(1 - \frac{2}{((2\alpha-1)K - (2\beta-1)iK')^2}\right)\right\}$$

können die allgemeinen Factoren nicht nur in einer reellen Form dargestellt werden, sondern es können auch diese Producte zugleich so umgeformt werden, dafs die obigen Formeln, durch welche $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{J}$ einfacher dargestellt wurden, auch auf diese vier Producte angewandt werden können. Es ist überhaupt $\left(1 - \frac{u^2}{(a+bi)^2}\right)\left(1 - \frac{u^2}{(a-bi)^2}\right)$

$$= \left(1 - \frac{u}{a+bi}\right)\left(1 + \frac{u}{a+bi}\right)\left(1 - \frac{u}{a-bi}\right)\left(1 - \frac{a}{a-bi}\right)$$

$$= \frac{(a+bi-u)(a+bi+u)(a-bi-u)(a-bi+u)}{(a^2+b^2)^2} = \frac{((a+u)^2+b^2)(a-u)^2+b^2))}{(a^2+b^2)^2},$$

und also

$$\left(1 - \frac{u^2}{(a+bi)^2}\right)\left(1 - \frac{u}{(a-bi)^2}\right) = \frac{\left(1 + \left(\frac{a+u}{b}\right)^2\right)\left(1 + \left(\frac{a-u}{b}\right)^2\right)}{\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2}.$$

Hiernach können die allgemeinen Factoren der vorigen vier unendlichen Producte auch also dargestellt werden:

$$\mathfrak{C}.\mathfrak{D} = \frac{\underset{1}{\mathrm{P}}\left\{\left(1 + \left(\frac{2\alpha K + u}{2\beta K'}\right)^2\right)\left(1 + \left(\frac{2\alpha K - u}{2\beta K'}\right)^2\right)\right\}}{\underset{1}{\mathrm{P}}\left(1 + \left(\frac{2\alpha K}{2\beta K'}\right)^2\right)^2},$$

$$\mathfrak{G}.\mathfrak{H} = \frac{\underset{1}{\mathrm{P}}\left\{\left(1+\left(\frac{2\alpha K+u}{(2\beta-1)K'}\right)^2\right)\left(1+\left(\frac{2\alpha K-u}{(2\beta-1)K'}\right)^2\right)\right\}}{\underset{1}{\mathrm{P}}\left(1+\left(\frac{2\alpha K}{(2\beta-1)K'}\right)^2\right)},$$

$$\mathfrak{L}.\mathfrak{M} = \frac{\underset{1}{\mathrm{P}}\left\{\left(1+\left(\frac{(2\alpha-1)K+u}{2\beta K'}\right)^2\right)\left(1+\left(\frac{(2\alpha-1)K-u}{2\beta K'}\right)^2\right)\right\}}{\underset{1}{\mathrm{P}}\left(1+\left(\frac{(2\alpha-1)K}{2\beta K'}\right)^2\right)^2},$$

$$\mathfrak{P}.\mathfrak{Q} = \frac{\underset{1}{\mathrm{P}}\left\{\left(1+\left(\frac{(2\alpha-1)K+u}{(2\beta-1)K'}\right)^2\right)\left(1+\left(\frac{(2\alpha-1)K-u}{(2\beta-1)K'}\right)^2\right)\right\}}{\underset{1}{\mathrm{P}}\left(1+\left(\frac{(2\alpha-1)K}{(2\beta-1)K'}\right)^2\right)^2}.$$

Setzen wir nun, wie in §. 10., wieder $\eta' = \frac{\pi}{2K'}$, (wir werden uns im Nachfolgenden immer dieser Bezeichnung bedienen), und sehen wir vorläufig α als unveränderlich, hingegen β als veränderlich an, so ist

$$\underset{1}{\mathrm{P}}\left\{1+\left(\frac{2\alpha K\pm u}{2\beta K'}\right)^2\right\} = \frac{\mathfrak{Sin}(2\alpha\eta' K\pm\eta' u)}{2\alpha\eta' K\pm\eta' u};$$

also

$$\frac{\underset{1}{\mathrm{P}}\left\{\left(1+\left(\frac{2\alpha K+u}{2\beta K'}\right)^2\right)\left(1+\left(\frac{2\alpha K-u}{2\beta K'}\right)^2\right)\right\}}{\underset{1}{\mathrm{P}}\left(1+\left(\frac{2\alpha K}{2\beta K'}\right)^2\right)^2}$$

$$= \frac{(2\alpha\eta' K}{(2\alpha\eta' K)^2-(\eta' u)^2}\cdot\frac{\mathfrak{Sin}(2\alpha\eta' K+\eta' u)\,\mathfrak{Sin}(2\alpha\eta' K-\eta' u)}{\mathfrak{Sin}^2(2\alpha\eta' K)},$$

und da $\mathfrak{Sin}(a+b)\,\mathfrak{Sin}(a-b) = \mathfrak{Sin}^2 a - \mathfrak{Sin}^2 b$ nach §. 13. des ersten Theiles ist, so erhalten wir den Ausdruck

$$\mathfrak{C}.\mathfrak{D} = \frac{\underset{1}{\mathrm{P}}\left(1-\frac{\mathfrak{Sin}^2\eta' u}{\mathfrak{Sin}^2(2\alpha\eta' K)}\right)}{\underset{1}{\mathrm{P}}\left(1-\left(\frac{u}{2\alpha K}\right)^2\right)} = \frac{1}{\mathfrak{A}}.\underset{1}{\mathrm{P}}\left(1-\frac{\mathfrak{Sin}^2\eta' u}{\mathfrak{Sin}^2 2\alpha\eta' K}\right).$$

Ganz eben so findet man

$$\mathfrak{L}.\mathfrak{M} = \frac{\underset{1}{\mathrm{P}}\left(1-\frac{\mathfrak{Sin}^2\eta' u}{\mathfrak{Sin}^2(2\alpha-1)\eta' K}\right)}{\underset{1}{\mathrm{P}}\left(1-\left(\frac{u}{(2\alpha-1)K}\right)^2\right)} = \frac{1}{\mathfrak{J}}.\underset{1}{\mathrm{P}}\left(1-\frac{\mathfrak{Sin}^2\eta' u}{\mathfrak{Sin}^2(2\alpha-1)\eta' K}\right).$$

Ferner ist, wenn wieder α als unveränderlich angesehen wird,

$$\underset{1}{\mathrm{P}}\left(1+\left(\frac{2\alpha K\pm u}{(2\beta-1)K'}\right)^2\right) = \mathfrak{Cos}(2\alpha\eta' K\pm\eta' u);$$

daher ist $\mathfrak{G}.\mathfrak{H} = \underset{1}{\mathrm{P}}\frac{\mathfrak{Cos}(2\alpha\eta' K+\eta' u).\,\mathfrak{Cos}(2\alpha\eta' K-\eta' u)}{\mathfrak{Cos}^2(2\alpha\eta' K)}$, und da $\mathfrak{Cos}(a+b).\mathfrak{Cos}(a-b) = \mathfrak{Cos}^2 a\,\mathfrak{Cos}^2 b - \mathfrak{Sin}^2 a\,\mathfrak{Sin}^2 b = \mathfrak{Cos}^2 a + \mathfrak{Sin}^2 b$ ist,

so kann die vorige Formel auch also dargestellt werden:

$$\mathfrak{G}.\mathfrak{H} = \underset{1}{\mathrm{P}}\left\{1 + \frac{\mathfrak{Sin}^2 \eta' u}{\mathfrak{Cos}^2 2\alpha\eta' K}\right\}.$$

Ganz eben so findet man das Product

$$\mathfrak{P}.\mathfrak{Q} = \underset{1}{\mathrm{P}}\left\{1 + \frac{\mathfrak{Sin}^2 \eta' u}{\mathfrak{Cos}^2 (2\alpha - 1)\eta' K}\right\}.$$

Werden die gefundenen Ausdrücke in den Ausdrücken $\mathrm{sn}\, u = \frac{u.\mathfrak{A}.\mathfrak{B}.\mathfrak{C}.\mathfrak{D}}{\mathfrak{F}.\mathfrak{G}.\mathfrak{H}}$, $\mathrm{cn}\, u = \frac{\mathfrak{J}.\mathfrak{L}.\mathfrak{M}}{\mathfrak{F}.\mathfrak{G}.\mathfrak{H}}$ und $\mathrm{dn}\, u = \frac{\mathfrak{P}.\mathfrak{Q}}{\mathfrak{F}.\mathfrak{G}.\mathfrak{H}}$ substituirt, so hat man die folgenden Formeln:

$$1. \quad \mathrm{sn}\, u = \frac{1}{\eta}\, \mathfrak{Tang}\, \eta' u . \underset{1}{\mathrm{P}} \left\{ \frac{1 - \frac{\mathfrak{Sin}^2 \eta' u}{\mathfrak{Sin}^2 2\alpha\eta' K}}{1 + \frac{\mathfrak{Sin}^2 \eta' u}{\mathfrak{Cos}^2 2\alpha\eta' K}} \right\},$$

$$2. \quad \mathrm{cn}\, u = \frac{1}{\mathfrak{Cos}\, \eta' u} . \underset{1}{\mathrm{P}} \left\{ \frac{1 - \frac{\mathfrak{Sin}^2 \eta u}{\mathfrak{Sin}^2 (2\alpha - 1)\eta' K}}{1 + \frac{\mathfrak{Sin}^2 \eta' u}{\mathfrak{Cos}^2 2\alpha\eta' K}} \right\},$$

$$3. \quad \mathrm{dn}\, u = \frac{1}{\mathfrak{Cos}\, \eta' u} . \underset{1}{\mathrm{P}} \left\{ \frac{1 + \frac{\mathfrak{Sin}^2 \eta' u}{\mathfrak{Cos}^2 (2\alpha - 1)\eta' K}}{1 + \frac{\mathfrak{Sin}^2 \eta' u}{\mathfrak{Cos}^2 2\alpha\eta' K}} \right\},$$

$$4. \quad \mathrm{tn}\, u = \frac{1}{\eta'}\, \mathfrak{Sin}\, \eta' u . \underset{1}{\mathrm{P}} \left\{ \frac{1 - \frac{\mathfrak{Sin}^2 \eta' u}{\mathfrak{Sin}^2 2\alpha\eta' K}}{1 - \frac{\mathfrak{Sin}^2 \eta' u}{\mathfrak{Sin}^2 (2\alpha - 1)\eta' K}} \right\};$$

nach welchen man für jeden beliebigen Werth des Argumentes u die Werthe der vier cyklischen Modular-Functionen dieses Argumentes berechnen kann, sobald nur die den Moduln k und k' zugehörigen Modular-Quadranten K und K' bekannt sind. Diese Quadranten können aber auf mehr als eine Weise nach den früher entwickelten Formeln berechnet werden. Die Formeln setzen den Gebrauch der Tafeln der gewöhnlichen hyperbolischen Functionen voraus, und convergiren immer. Die Convergenz ist desto rascher, je gröſser $\eta' K = \frac{\pi K}{2K'}$, d. h. *je gröſser der Modul k ist.* Wir fügen, da $\mathrm{snc}\, u = \frac{\mathrm{cn}\, u}{\mathrm{dn}\, u}$ ist, zu diesen Formeln noch die folgende:

$$5. \quad \mathrm{snc}\, u = \underset{1}{\mathrm{P}} \left\{ \frac{1 - \frac{\mathfrak{Sin}^2 \eta' u}{\mathfrak{Sin}^2 (2\alpha - 1)\eta' K}}{1 + \frac{\mathfrak{Sin}^2 \eta' u}{\mathfrak{Cos}^2 (2\alpha - 1)\eta' K}} \right\}.$$

Zusatz. Vertauscht man in den vorigen Formeln den Modul k mit k', so verwandelt sich dadurch $\eta' = \frac{\pi}{2K'}$ in $\eta = \frac{\pi}{2K}$. Setzt man außerdem ui statt u, so verwandeln sich die vorigen fünf Formeln in

$$6. \quad \mathrm{sn}\, u = \frac{1}{\eta} \sin \eta u . \underset{1}{\mathrm{P}} \left\{ \frac{1 + \frac{\sin^2 \eta u}{\mathfrak{Sin}^2 2\alpha \eta K'}}{1 + \frac{\sin^2 \eta u}{\mathfrak{Sin}^2 (2\alpha - 1) \eta K'}} \right\},$$

$$7. \quad \mathrm{cn}\, u = \cos \eta u . \underset{1}{\mathrm{P}} \left\{ \frac{1 - \frac{\sin^2 \eta u}{\mathfrak{Cos}^2 2\alpha \eta K'}}{1 + \frac{\sin^2 \eta u}{\mathfrak{Sin}^2 (2\alpha - 1) \eta K'}} \right\},$$

$$8. \quad \mathrm{dn}\, u = \underset{1}{\mathrm{P}} \left\{ \frac{1 - \frac{\sin^2 \eta u}{\mathfrak{Cos}^2 (2\alpha - 1) \eta K'}}{1 + \frac{\sin^2 \eta u}{\mathfrak{Sin}^2 (2\alpha - 1) \eta K'}} \right\},$$

$$9. \quad \mathrm{tn}\, u = \frac{1}{\eta} \mathrm{tang}\, \eta u . \underset{1}{\mathrm{P}} \left\{ \frac{1 + \frac{\sin^2 \eta u}{\mathfrak{Sin}^2 2\alpha \eta K'}}{1 - \frac{\sin^2 \eta u}{\mathfrak{Cos}^2 2\alpha \eta K'}} \right\},$$

$$10. \quad \mathrm{snc}\, u = \cos \eta u . \underset{1}{\mathrm{P}} \left\{ \frac{1 - \frac{\sin^2 \eta u}{\mathfrak{Cos}^2 2\alpha \eta K'}}{1 - \frac{\sin^2 \eta u}{\mathfrak{Cos}^2 (2\alpha - 1) \eta K'}} \right\}.$$

In diesen Formeln kommen theils cyklische Functionen des Arcus ηu, theils hyperbolische Functionen des vervielfachten Arcus $\eta K' = \frac{\pi K'}{2K}$ vor, und die Convergenz der Formeln ist um desto größer, je größer das Verhältniß $\frac{K'}{K}$, d. h. *je kleiner der Modul k* ist. In allen diesen Formeln sind für α die mit Eins anfangenden Zahlen der natürlichen Zahlenreihe zu setzen.

§. 167.

Aenderungen von η' und der hyperbolischen Functionen von $n\eta' K$, wenn der Modul k mit $\frac{1}{k}$ vertauscht wird; und Aenderungen von η und der hyperbolischen Functionen von $n\eta K'$, wenn der Modul k mit $\frac{ik}{k'}$ vertauscht wird.

Setzt man $\frac{1}{k}$ statt des Moduls k, so verwandelt sich nach Zusatz 1. zu §. 31. der Quadrant K in $k(K - iK')$ und K' in kK, also $\frac{K}{K'}$ in $\frac{K}{K'} - i$. Da nun $\eta' = \frac{\pi}{2K'}$ ist, so verwandelt sich

$$\eta' \text{ in } \frac{\eta'}{k}.$$

Wird daher gleichzeitig ku für u gesetzt, so bleibt $\eta' u$ ungeändert. Setzt man ferner $p = e^{-\frac{\pi K}{2K'}} = e^{-\eta' K}$, so verwandelt sich p in $e^{-\eta' K + \frac{1}{2}\pi i} = p . e^{\frac{1}{2}\pi i}$, und da $e^{\frac{1}{2}\pi i} = \cos\frac{1}{2}\pi + i \sin\frac{1}{2}\pi = i$ ist, so verwandelt sich, wenn $\frac{1}{k}$ statt des Moduls k gesetzt wird,

$$p \text{ in } pi \quad \text{und} \quad p^{-1} \text{ in } -p^{-1}i, \quad \text{also}$$
$$p^2 \text{ in } -p^2 \quad \text{und} \quad p^{-2} \text{ in } -p^{-2}.$$

Es ist

$$p^n = e^{-n\eta' K} = \mathfrak{Cos}(n\eta' K) - \mathfrak{Sin}(n\eta' K) \quad \text{und}$$
$$p^{-n} = e^{n\eta' K} = \mathfrak{Cos}(n\eta' K) + \mathfrak{Sin}(n\eta' K) = \frac{1}{p^n}:$$

also ist

$$\mathfrak{Cos}(n\eta' K) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{p^n} + p^n\right) = \frac{1+p^{2n}}{2p^n} \quad \text{und}$$
$$\mathfrak{Sin}(n\eta' K) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{p^n} - p^n\right) = \frac{1-p^{2n}}{2p^n}.$$

Da sich nun p^{2n} in $(-1)^n p^{2n}$, also p^{4n} in p^{4n} verwandelt, so verwandelt sich

$$\mathfrak{Cos}(2n\eta' K) \text{ in } \frac{1+p^{4n}}{(-1)^n 2p^{2n}} \quad \text{und } \mathfrak{Sin}(2n\eta' K) \text{ in } \frac{1-p^{4n}}{(-1)^n 2p^{2n}},$$

oder auch

$$\mathfrak{Cos}(2n\eta' K) \text{ in } (-1)^n . \mathfrak{Cos}(2n\eta' K) \text{ und } \mathfrak{Sin}(2n\eta' K) \text{ in } (-1)^n . \mathfrak{Sin}(2n\eta' K).$$

Da sich p^{2n+1} in $(-1)^n p^{2n+1} i$, also p^{4n+2} in $-p^{4n+2}$ verwandelt, so verwandelt sich

$$\mathfrak{Cos}((2n+1)\eta' K) \text{ in } \frac{1-p^{4n+2}}{(-1)^n 2p^{2n+1}. i} \text{ und } \mathfrak{Sin}((2n+1)\eta' K) \text{ in } \frac{1+p^{4n+2}}{(-1)^n 2p^{2n+1}. i}:$$

also verwandelt sich

$$\mathfrak{Cos}((2n+1)\eta' K) \quad \text{in} \quad \frac{\mathfrak{Sin}((2n+1)\eta' K)}{i^{2n+1}} \quad \text{und}$$
$$\mathfrak{Sin}((2n+1)\eta' K) \quad \text{in} \quad \frac{\mathfrak{Cos}((2n+1)\eta' K)}{i^{2n+1}}.$$

Fassen wir die gefundenen Resultate zusammen, so haben wir den folgenden Lehrsatz:

Setzt man $\frac{1}{k}$ statt des Moduls k, und ku statt u, so verwandelt sich η' in $\frac{\eta'}{k}$ und $\eta' u$ bleibt ungeändert. Ferner verwandelt sich

$$1. \begin{cases} p \text{ in } pi, \text{ also } p^2 \text{ in } -p^2. \\ \mathfrak{Cos}(2n\eta'K) \text{ verwandelt sich in } (-1)^n.\,\mathfrak{Cos}(2n\eta'K); \\ \mathfrak{Sin}(2n\eta'K) \text{ verwandelt sich in } (-1)^n.\,\mathfrak{Sin}(2n\eta'K); \\ \mathfrak{Cos}((2n-1)\eta'K) \text{ verwandelt sich in } (-1)^n.i.\,\mathfrak{Sin}((2n-1)\eta'K) \text{ und} \\ \mathfrak{Sin}((2n-1)\eta'K) \text{ verwandelt sich in } (-1)^n.i.\,\mathfrak{Cos}((2n-1)\eta'K). \end{cases}$$

Setzen wir $q = e^{-\eta K'}$, so können wir aus dem Zusatze 2. §. 31., oder auch aus dem vorigen Satze, durch eine bloſse Vertauschung des Moduls mit dem conjugirten, den folgenden Lehrsatz herleiten:

Setzt man $\frac{ik}{k'}$ statt des Moduls k, und $k'u$ statt u, so bleibt ηu ungeändert und es verwandelt sich η in $\frac{\eta}{k'}$. Ferner verwandelt sich

$$2. \begin{cases} q \text{ in } qi, \text{ also } q^2 \text{ in } -q^2. \\ \mathfrak{Cos}(2n\eta K') \text{ in } (-1)^n.\,\mathfrak{Cos}(2n\eta K'); \\ \mathfrak{Sin}(2n\eta K') \text{ in } (-1)^n.\,\mathfrak{Sin}(2n\eta K'); \\ \mathfrak{Cos}((2n-1)\eta K') \text{ in } (-1)^n i.\,\mathfrak{Sin}((2n-1)\eta K') \text{ und} \\ \mathfrak{Sin}((2n-1)\eta K') \text{ in } (-1)^n i.\,\mathfrak{Cos}((2n-1)\eta K'). \end{cases}$$

Zusatz. Ist $k > \sin\frac{1}{4}\pi$, also $K > K'$, so ist $\eta' K > \frac{1}{2}\pi$: also ist $\eta' K > 1\frac{1}{2}$ oder $p^2 < \frac{1}{e^3}$. Eben so ist $q < \frac{1}{e^3}$, wenn $k < \sin\frac{1}{4}\pi$ ist. Da $\log\frac{1}{p} = \frac{1}{2}\pi.\frac{K}{K'}$ und $\log\frac{1}{q} = \frac{1}{2}\pi.\frac{K}{K'}$ ist, so ist

$$\log\frac{1}{p}.\log\frac{1}{q} = (\tfrac{1}{2}\pi)^2, \quad \text{oder} \quad \log\left(\frac{1}{p^2}\right).\log\left(\frac{1}{q^2}\right) = \pi^2;$$

und dieser Gleichung gemäſs läſst sich p aus q oder q aus p berechnen, selbst ohne den Modul zu kennen. Sind p und q gleich, so findet man $p^2 = q^2 = \frac{1}{23{,}24\ldots}$. Die kleinste der Zahlen p^2 und q^2 ist also immer $< \frac{1}{23}$.

Die Zahl p ist desto kleiner, je gröſser der Modul k ist, und q ist desto kleiner, je kleiner der Modul k ist; beide Zahlen hängen nur vom Modul ab und sind immer ächte Brüche. Wir werden im Nachfolgenden die Zeichen p und q immer in den Bedeutungen $p = e^{-\eta' K}$ und $q = e^{-\eta' K}$ beibehalten.

§. 168.

Aenderungen von p und q, wenn statt des Moduls k der kleinere $\lambda = \frac{1-k'}{1+k'}$ gesetzt wird.

Wird statt des Moduls k der kleinere Modul $\lambda = \frac{1-k'}{1+k'}$ gesetzt, so verwandelt sich nach §. 54. der Quadrant K' in $L' = (1+k')K'$, also η'

in $\frac{\eta'}{1+k'}$. Setzt man also gleichzeitig $v=\frac{(1+k')u}{2}$ für u, so verwandelt sich $\eta' u$ in $\frac{\eta' u}{2}$.

Da nun $\frac{L}{L'}=\frac{1}{2}\cdot\frac{K}{K'}$ ist, so ist $\frac{1}{2}\pi\cdot\frac{L}{L'}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\pi\cdot\frac{K}{K'}$, daher verwandelt sich p in $p^{\frac{1}{2}}$, wenn $\frac{1-k'}{1+k'}$ statt des Moduls k gesetzt wird; also auch p^n in $p^{\frac{1}{2}n}$, folglich $\mathfrak{Cos}(n\eta' K)$ in $\mathfrak{Cos}\left(\frac{n\eta' K}{2}\right)$ und $\mathfrak{Sin}(n\eta' K)$ in $\mathfrak{Sin}\left(\frac{n\eta' K}{2}\right)$.

Wird wieder statt des Moduls k der kleinere $\lambda=\frac{1-k'}{1+k'}$ gesetzt, so verwandelt sich K in $\frac{1+k'}{2}.K$, also η in $\frac{2}{1+k'}.\eta$. Wird gleichzeitig $v=\frac{1+k'}{2}.u$ statt u gesetzt, so bleibt ηu ungeändert. Da ferner $\frac{L'}{L}=2.\frac{K'}{K}$, also auch $\frac{1}{2}\pi.\frac{L'}{L}=2.\frac{1}{2}\pi.\frac{K'}{K}$ ist, so verwandelt sich q in q^2, wenn $\lambda=\frac{1-k'}{1+k'}$ statt k gesetzt wird.

Hiernach verwandelt sich also $\mathfrak{Cos}(n\eta K')$ in $\mathfrak{Cos}(2n\eta K')$ und $\mathfrak{Sin}(n\eta K')$ in $\mathfrak{Sin}(2n\eta K')$.

Die so eben entwickelten Sätze dienen, in Verbindung mit den im §. 51. bis §. 54. entwickelten Formeln, theils zur Herleitung einer Menge neuer Formeln, theils auch zur Prüfung der bereits hergeleiteten. Zu denselben Zwecken dienen auch die in §. 166. hergeleiteten Formeln.

§. 169.

Ausdruck der cyklischen Modular-Functionen durch reelle Exponential-Gröfsen.

Setzt man in den Formeln (1.) bis (4.) §. 166. der Kürze wegen $x=e^{\eta' u}$ und, wie vorhin, $p=e^{-\eta' K}$, so ist $\mathfrak{Sin}\,\eta' u=\frac{x-x^{-1}}{2}$, also $\mathfrak{Sin}^2\eta' u=\frac{x^2-2+x^{-2}}{4}$ und $\mathfrak{Sin}\,\eta' K=\frac{1-p^2}{2p}$, also $\mathfrak{Sin}^2\eta K=\frac{1-2p^2+p^4}{4p^2}$. Hiernach ist

$$1-\frac{\mathfrak{Sin}^2\eta' u}{\mathfrak{Sin}^2\eta' K}=1-\frac{x^2-2+x^{-2}}{1-2p^2+p^4}.p^2=\frac{1-2p^2+p^4-p^2x^2+2p^2-p^2x^{-2}}{(1-p^2)^2},$$

oder $1=\frac{\mathfrak{Sin}^2\eta' u}{\mathfrak{Sin}^2\eta' K}=\frac{(1-p^2x^2)(1-p^2x^{-2})}{(1-p^2)^2}$. Eben so findet man

$$1+\frac{\mathfrak{Sin}^2\eta' u}{\mathfrak{Cos}^2\eta' K}=\frac{(1+p^2x^2)(1+p^2x^{-2})}{(1+p^2)^2}.$$

Setzen wir nun zur Abkürzung

$$
1. \quad \begin{cases}
\mathfrak{A} = (1-p^4x^2)(1-p^8x^2)(1-p^{12}x^2)\ldots. \\
\mathfrak{B} = (1-p^2x^2)(1-p^6x^2)(1-p^{10}x^2)\ldots. \\
\mathfrak{C} = (1+p^2x^2)(1+p^6x^2)(1+p^{10}x^2)\ldots. \\
\mathfrak{D} = (1+p^4x^2)(1+p^8x^2)(1+p^{12}x^2)\ldots. \\
\mathfrak{A}' = (1-p^4x^{-2})(1-p^8x^{-2})(1-p^{12}x^{-2})\ldots. \\
\mathfrak{B}' = (1-p^2x^{-2})(1-p^6x^{-2})(1-p^{10}x^{-2})\ldots. \\
\mathfrak{C}' = (1+p^2x^{-2})(1+p^6x^{-2})(1+p^{10}x^{-2})\ldots. \\
\mathfrak{D}' = (1+p^4x^{-2})(1+p^8x^{-2})(1+p^{12}x^{-2})\ldots.
\end{cases}
$$

und ferner

$$
2. \quad \begin{cases}
a = (1-p^4)(1-p^8)(1-p^{12})(1-p^{16})\ldots. \\
b = (1-p^2)(1-p^6)(1-p^{10})(1-p^{14})\ldots. \\
c = (1+p^2)(1+p^6)(1+p^{10})(1+p^{14})\ldots. \\
p = (1+p^4)(1+p^8)(1+p^{12})(1+p^{16})\ldots.
\end{cases}
$$

so erhalten wir für die cyklischen Modular-Functionen des Argumentes u die folgenden Ausdrücke:

$$
3. \quad \begin{cases}
\operatorname{sn} u = \frac{1}{\eta'} \cdot \frac{d^2}{a^2} \cdot \frac{x^2-1}{x^2+1} \cdot \frac{\mathfrak{A}.\mathfrak{A}'}{\mathfrak{D}.\mathfrak{D}'}, \\
\operatorname{cn} u = \frac{d^2}{b^2} \cdot \frac{2x}{x^2+1} \cdot \frac{\mathfrak{B}.\mathfrak{B}'}{\mathfrak{D}.\mathfrak{D}'}, \\
\operatorname{dn} u = \frac{d^2}{c^2} \cdot \frac{2x}{x^2+1} \cdot \frac{\mathfrak{C}.\mathfrak{C}'}{\mathfrak{D}.\mathfrak{D}'}, \\
\operatorname{snc} u = \frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{\mathfrak{B}.\mathfrak{B}'}{\mathfrak{C}.\mathfrak{C}'}, \\
\operatorname{tn} u = \frac{1}{\eta^1} \cdot \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x^2-1}{2x} \cdot \frac{\mathfrak{A}.\mathfrak{A}'}{\mathfrak{B}.\mathfrak{B}'},
\end{cases}
$$

und es handelt sich nun nur noch darum, die einfacheren Bedeutungen der durch a, b, c, d bezeichneten Producte und ihrer Verhältnisse zu einander zu finden. Eine Relation unter drei von diesen vier Gröfsen findet sich leicht. Es ist

$$
a.b = (1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)(1-p^8)(1-p^{10})\ldots.
$$
$$
c.d = (1+p^2)(1+p^4)(1+p^6)(1+p^8)(1+p^{10})\ldots.
$$

Daher ist $ab.cd = (1-p^4)(1-p^8)(1-p^{12})(1-p^{16})\ldots.$, oder $ab.cd = a$, und also

$$
4. \quad bcd = 1.
$$

Setzen wir $u+iK'$ statt u, also $\eta' u + \frac{1}{2}\pi i$ statt $\eta' u$, so verwandelt sich $x = e^{\eta' u}$ in $x.e^{\frac{1}{2}\pi i}$ also x in xi; also verwandelt sich dann $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{A}$; ferner $\mathfrak{A}'$ in $\mathfrak{D}'$ und $\mathfrak{D}'$ in $\mathfrak{A}'$; aufserdem verwandelt sich $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ in $\mathfrak{C}'$ und $\mathfrak{C}'$ in $\mathfrak{B}'$. Der Ausdruck

$$\operatorname{sn} u = \frac{1}{\eta'} \cdot \frac{d^2}{a^2} \cdot \frac{x^2-1}{x^2+1} \cdot \frac{\mathfrak{A}.\mathfrak{A}'}{\mathfrak{D}.\mathfrak{D}'}$$

verwandelt sich also, da $\operatorname{sn}(u+iK') = \frac{1}{k \operatorname{sn} u}$ ist, in

$$\frac{1}{k \operatorname{sn} u} = \frac{1}{\eta'} \cdot \frac{d^2}{a^2} \cdot \frac{x^2+1}{x^2-1} \cdot \frac{\mathfrak{D}.\mathfrak{D}'}{\mathfrak{A}.\mathfrak{A}'};$$

und wird diese Gleichung mit der vorigen multiplicirt, so erhält man $\left(\frac{1}{\eta'} \cdot \frac{d^2}{a^2}\right)^2 = \frac{1}{k}$, also

$$5. \quad \frac{1}{\eta'} \cdot \frac{d^2}{a^2} = \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Die Gleichung $\operatorname{snc} u = \frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{\mathfrak{B}.\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}.\mathfrak{C}}$ verwandelt sich, da $\operatorname{snc}(u+iK') = \frac{1}{k \operatorname{snc} u}$ ist, in $\frac{1}{k \operatorname{snc} u} = \frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{\mathfrak{C}.\mathfrak{C}'}{\mathfrak{B}.\mathfrak{B}'}$, und die Multiplication beider giebt also $\left(\frac{c^2}{b^2}\right)^2 = \frac{1}{k}$ oder

$$6. \quad \frac{c^2}{b^2} = \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Die übrigen Verhältnisse, wovon aber nur noch eines fehlt, um *a, b, c, d* einzeln bestimmen zu können, lassen sich nicht dadurch finden, daſs man $u+iK'$ statt u setzt; man muſs vielmehr $K-u$ statt u setzen; also $\eta' K - \eta' u$ statt $\eta' u$. Dadurch verwandelt sich x in $e^{\eta' K} . e^{-\eta' u}$, also x in $\frac{1}{px} = \frac{x^{-1}}{p}$ oder x^2 in $\frac{x^{-2}}{p^2}$ und x^{-2} in $p^2 x^2$.

Macht man hiervon Gebrauch, so verwandelt sich $\mathfrak{A}$ in $(1-p^2 x^{-2})(1-p^6 x^{-2})(1-p^{10} x^{-2})\ldots$, oder $\mathfrak{A}$ verwandelt sich in $\mathfrak{B}'$; ferner $\mathfrak{A}'$ in $(1-p^6 x^2)(1-p^{10} x^2)(1-p^{14} x^2)\ldots$ oder $\mathfrak{A}'$ in $\frac{\mathfrak{B}}{1-p^2 x^2}$, also $\mathfrak{A}.\mathfrak{A}'$ in $\frac{\mathfrak{B}.\mathfrak{B}'}{1-p^2 x^2}$. Da sich nun auch $\frac{x^2-1}{2x} = \frac{x-x^{-1}}{2}$ verwandelt in $\frac{\frac{1}{px} - px}{2} = \frac{1-p^2 x^2}{2px}$, so verwandelt sich

$$\frac{x^2-1}{2x} \mathfrak{A}.\mathfrak{A}' \text{ in } \frac{\mathfrak{B}.\mathfrak{B}'}{2px}.$$

Es verwandelt sich ferner $\mathfrak{B}$ in $(1-x^{-2})(1-p^4 x^{-2})(1-p^8 x^{-2})\ldots$ oder $\mathfrak{B}$ in $\frac{x^2-1}{x^2}.\mathfrak{A}'$, und $\mathfrak{B}'$ in $(1-p^4 x^2)(1-p^8 x^2)(1-p^{12} x^2)\ldots$ oder $\mathfrak{B}'$ in $\mathfrak{A}$: also verwandelt sich $\mathfrak{B}.\mathfrak{B}'$ in $\frac{x^2-1}{x^2} \mathfrak{A}.\mathfrak{A}'$ und

$$\frac{\mathfrak{B}.\mathfrak{B}'}{2} \text{ in } \frac{x^2-1}{2x} \cdot \frac{\mathfrak{A}.\mathfrak{A}'}{x}.$$

Es verwandelt sich $\mathfrak{C}$ in $(1+x^{-2})(1+p^4x^{-2})(1+p^8x^{-2})(1+p^{12}x^{-2})\ldots\ldots$ oder $\mathfrak{C}$ in $\frac{x^2+1}{x^2}.\mathfrak{D}'$ und $\mathfrak{C}'$ in $(1+p^4x^2)(1+p^8x^2)(1+p^{12}x^2)\ldots\ldots$ oder $\mathfrak{C}'$ in $\mathfrak{D}$, also auch

$$\frac{\mathfrak{C}.\mathfrak{C}'}{2} \text{ in } \frac{x^2+1}{2x}.\frac{\mathfrak{D}.\mathfrak{D}'}{x}.$$

Endlich ändert sich $\mathfrak{D}$ in $(1+p^2x^{-2})(1+p^6x^{-1})(1+p^{10}x^{-2})\ldots\ldots$ oder $\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{C}'$; ferner $\mathfrak{D}'$ in $(1+p^6x^2)(1+p^{10}x^2)(1+p^{14}x^2)\ldots\ldots$ oder $\mathfrak{D}'$ in $\frac{\mathfrak{C}}{1+p^2x^2}$. Da sich nun $\frac{x^2+1}{2x}=\frac{x+x^{-1}}{2}$ verwandelt in $\frac{\frac{1}{px}+px}{2}=\frac{1+p^2x^2}{2px}$, so verwandelt sich

$$\frac{x^2+1}{2x}.\mathfrak{D}.\mathfrak{D}' \text{ in } \frac{\mathfrak{C}.\mathfrak{C}}{2px}.$$

Nun hält es nicht schwer, auch die übrigen Verhältnisse zu finden. Setzt man in der Gleichung $\operatorname{tn} u=\frac{1}{\eta'}.\frac{b^2}{a^2}.\frac{x^2-1}{2x}.\frac{\mathfrak{A}.\mathfrak{A}'}{\mathfrak{B}.\mathfrak{B}'}$, $K-u$ statt u, so verwandelt sie sich in

$$\operatorname{tnc} u=\frac{1}{\eta}.\frac{b^2}{a^2}.\frac{\mathfrak{B}.\mathfrak{B}'}{2px}.\frac{x^2}{(x^2-1)\mathfrak{A}.\mathfrak{A}'} \text{ oder } 4p\operatorname{tnc} u=\frac{1}{\eta'}.\frac{b^2}{a^2}.\frac{2x}{x^2-1}.\frac{\mathfrak{B}.\mathfrak{B}'}{\mathfrak{A}.\mathfrak{A}'},$$

und da $\operatorname{tn} u.\operatorname{tnc} u=\frac{1}{k}$ ist, so ist $\frac{4p}{k'}=\left(\frac{1}{\eta'}.\frac{b^2}{a^2}\right)^2$ oder

$$7.\quad \frac{1}{\eta}.\frac{b^2}{a^2}=2\sqrt{\frac{p}{k'}}.$$

Da ferner $\operatorname{dn} u=\frac{d^2}{c^2}.\frac{2x}{x^2+1}.\frac{\mathfrak{C}.\mathfrak{C}'}{\mathfrak{D}.\mathfrak{D}'}$ ist, so erhält man

$$\operatorname{dnc} u=\frac{d^2}{c^2}.\frac{x^2+1}{x^2}.\mathfrak{D}.\mathfrak{D}'.\frac{2px}{\mathfrak{C}.\mathfrak{C}'} \text{ oder } \frac{\operatorname{dnc} cu}{4p}=\frac{d^2}{c^2}.\frac{x^2+1}{2x}.\frac{\mathfrak{D}.\mathfrak{D}'}{\mathfrak{C}.\mathfrak{C}'},$$

und da $\operatorname{dn} u \operatorname{dnc} u=k'$ ist, so ist $\frac{k'}{4p}=\left(\frac{d^2}{c^2}\right)^2$ oder

$$8.\quad \frac{d^2}{c^2}=\frac{\sqrt{k'}}{2\sqrt{p}}.$$

Dividirt man (5.) durch (4.), so erhält man

$$9.\quad \frac{d^2}{b^2}=\frac{\sqrt{\frac{k'}{k}}}{2\sqrt{p}}.$$

Werden diese Verhältnisse in den Formeln (3.) substituirt, so erhält man

$$
10.\quad \begin{cases}
\operatorname{sn} u = \dfrac{1}{\sqrt{k}} \cdot \dfrac{x - x^{-1}}{x + x^{-1}} \cdot \dfrac{\mathfrak{A}.\mathfrak{A}'}{\mathfrak{D}.\mathfrak{D}'}, \\[2ex]
\operatorname{cn} u = \dfrac{\sqrt{\frac{k'}{k}}}{2\sqrt{p}} \cdot \dfrac{2}{x + x^{-1}} \cdot \dfrac{\mathfrak{B}.\mathfrak{B}'}{\mathfrak{D}.\mathfrak{D}'}, \\[2ex]
\operatorname{dn} u = \dfrac{\sqrt{k'}}{2\sqrt{p}} \cdot \dfrac{2}{w + x^{-1}} \cdot \dfrac{\mathfrak{C}.\mathfrak{C}'}{\mathfrak{D}.\mathfrak{D}'}, \\[2ex]
\operatorname{snc} u = \dfrac{1}{\sqrt{k}} \cdot \dfrac{\mathfrak{B}.\mathfrak{B}'}{\mathfrak{C}.\mathfrak{C}'}, \\[2ex]
\operatorname{tn} u = \dfrac{2\sqrt{p}}{\sqrt{k'}} \cdot \dfrac{x - x^{-1}}{2} \cdot \dfrac{\mathfrak{A}.\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}.\mathfrak{B}'}.
\end{cases}
$$

Die Formeln, woraus diese Ausdrücke hergeleitet worden sind, können auch wie folgt dargestellt werden. Verwandelt man u in $K-u$, oder x in $\frac{1}{px}$, so verwandelt sich

$$
11.\quad \begin{cases}
\dfrac{x - x^{-1}}{2}.\mathfrak{A}.\mathfrak{A}'.2\sqrt{p} \quad \text{in} \quad \dfrac{\mathfrak{B}.\mathfrak{B}'}{x\sqrt{p}}, \\[2ex]
\mathfrak{B}.\mathfrak{B}' \quad \text{in} \quad \dfrac{\frac{x - x^{-1}}{2}.\mathfrak{A}.\mathfrak{A}'.2\sqrt{p}}{x\sqrt{p}}, \\[2ex]
\mathfrak{C}.\mathfrak{C}' \quad \text{in} \quad \dfrac{\frac{x + x^{-1}}{2}.\mathfrak{D}.\mathfrak{D}'.2\sqrt{p}}{x\sqrt{p}}, \\[2ex]
\dfrac{x + x^{-1}}{2}.\mathfrak{D}.\mathfrak{D}'.2\sqrt{p} \quad \text{in} \quad \dfrac{\mathfrak{C}.\mathfrak{C}'}{x\sqrt{p}}.
\end{cases}
$$

Die beiden Functionen $\frac{x - x^{-1}}{2}.\mathfrak{A}.\mathfrak{A}'.2\sqrt{p}$ und $\mathfrak{B}.\mathfrak{B}'$ sind daher von der Art, daſs, wenn in der einen von ihnen $K-u$ statt u gesetzt wird, das Resultat gleich der durch $x\sqrt{p}$ dividirten anderen Function ist. Dieselbe Bewandtniſs hat es mit den beiden Functionen $\frac{x + x^{-1}}{2}.\mathfrak{D}.\mathfrak{D}'.2\sqrt{p}$ und $\mathfrak{C}\mathfrak{C}'$.

Zusatz 1. Multiplicirt man die Gleichungen (7.) und (8.), so erhält man $\frac{1}{\eta}\cdot\frac{b^2 d^2}{a^2 c^2} = 1$, also

$$
12.\quad K' = \tfrac{1}{2}\pi.\left(\frac{ac}{bd}\right)^2 = \tfrac{1}{2}\pi\left(\frac{(1+p^2)(1-p^4)(1+p^6)(1-p^8)\ldots.}{(1-p^2)(1+p^4)(1-p^6)(1+p^8)\ldots.}\right)^2.
$$

Nimmt man p willkürlich an, so kann hiernach aus ihm jedesmal K' gefunden werden, und da $\frac{1}{p} = e^{\pi K/K'}$, also $\frac{\pi K}{2.K'} = \log\frac{1}{p}$ ist, so findet sich dann K nach der Formel $K = \frac{2K}{\pi}\log\frac{1}{p}$, oder also:

$$
15.\quad K = \left(\frac{1+p^2}{1-p^2}\cdot\frac{1-p^4}{1+p^4}\cdot\frac{1+p^6}{1-p^6}\cdot\frac{1-p^8}{1+p^8}\ldots.\right)^2.\log\frac{1}{p}.
$$

Den Modul k giebt die Formel $k = \left(\frac{b}{c}\right)^4$ oder

$$14.\quad k = \left(\frac{1-p^2}{1+p^2}\cdot\frac{1-p^6}{1+p^6}\cdot\frac{1-p^{10}}{1+p^{10}}\cdot\frac{1-p^{14}}{1+p^{14}}\cdots\right)^4.$$

Setzt man hierin p für p^2, so verwandelt sich nach §. 168. der Modul k in $\frac{1-k'}{1+k'}$; daher ist $\sqrt{\frac{1-k'}{1+k'}} = \left(\frac{1-p}{1+p}\cdot\frac{1-p^3}{1+p^3}\cdot\frac{1-p^5}{1+p^5}\cdot\frac{1-p^7}{1+p^7}\cdots\right)^2$, und also

$$\log\sqrt{\frac{1+k'}{1-k'}} = 4\log\sqrt{\left(\frac{1+p}{1-p}\cdot\frac{1+p^3}{1-p^3}\cdot\frac{1+p^5}{1-p^5}\cdot\frac{1+p^7}{1-p^7}\cdots\right)}.$$

Setzt man hierin pi statt p, so verwandelt sich k in $\frac{1}{k}$, also k' in $\frac{ik'}{k}$, und es ist also

$$\frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{1+\frac{ik'}{k}}{1-\frac{ik'}{k}}} = 4.\frac{1}{i}\log\sqrt{\left(\frac{1+pi}{1-pi}\cdot\frac{1-p^3 i}{1+p^3 i}\cdot\frac{1+p^5 i}{1-p^5 i}\cdot\frac{1-p^7 i}{1+p^7 i}\cdots\right)}.$$

Wird also $k = \sin\theta$, $k' = \cos\theta$ und $\frac{k'}{k} = \operatorname{tang}(\frac{1}{2}\pi - \theta)$ gesetzt, so hat man

$$15.\quad \mathfrak{L}(\tfrac{1}{2}\pi-\theta)$$
$$= 4\mathfrak{L}\arcsin(p) + 4\mathfrak{L}\arcsin(p^3) + 4\mathfrak{L}\arcsin(p^5) + 4\mathfrak{L}\arcsin(p^7) + \ldots \text{ etc.},$$

$$16.\quad \tfrac{1}{2}\pi-\theta$$
$$= 4\operatorname{arc\,tang}(p) - 4\operatorname{arc\,tang}(p^3) + 4\operatorname{arc\,tang}(p^5) - 4\operatorname{arc\,tang}(p^7) + \ldots \text{ etc.}$$

Wird p mit q vertauscht, so vertauscht sich K mit K', k mit k', und $\frac{1}{2}\pi - \theta$ mit θ. Wird außerdem $v = \frac{1}{2}\pi.\frac{K'}{K}$, also $q = e^{-v}$ gesetzt, so hat man

$$K = \tfrac{1}{2}\pi.\left(\frac{\mathfrak{Tang}\,2v.\mathfrak{Tang}\,4v.\mathfrak{Tang}\,6v.\mathfrak{Tang}\,8v\ldots}{\mathfrak{Tang}\,v.\mathfrak{Tang}\,3v.\mathfrak{Tang}\,5v.\mathfrak{Tang}\,7v\ldots}\right)^2,$$

$$K = v.\left(\frac{\mathfrak{Tang}\,2v.\mathfrak{Tang}\,4v.\mathfrak{Tang}\,6v.\mathfrak{Tang}\,8v\ldots}{\mathfrak{Tang}\,v.\mathfrak{Tang}\,3v.\mathfrak{Tang}\,5v.\mathfrak{Tang}\,7v\ldots}\right)^2,$$

$$k' = (\mathfrak{Tang}\,v.\mathfrak{Tang}\,3v.\mathfrak{Tang}\,5v.\mathfrak{Tang}\,7v.\mathfrak{Tang}\,9v\ldots)^4,$$

$$\mathfrak{L}\theta = 4\mathfrak{L}\arcsin(e^{-v}) + 4\mathfrak{L}\arcsin(e^{-3v}) + 4\mathfrak{L}\arcsin(e^{-5v}) + 4\mathfrak{L}\arcsin(e^{-7v}) + \ldots,$$

$$\theta = 4\operatorname{arc\,tang}(e^{-v}) - 4\operatorname{arc\,tang}(e^{-3v}) + 4\operatorname{arc\,tang}(e^{-5v}) - \operatorname{arc\,tang}(e^{-7v}) - \ldots,$$

Zusatz 2. Verbindet man mit der Gleichung $bcd = 1$, oder $b^2c^2d^2 = 1$, die Gleichung $\frac{c^2}{b^2} = \frac{1}{\sqrt{k}}$, so erhält man $c^4.d^2 = \frac{1}{\sqrt{k}}$, und da $\frac{c^2}{d^2} = \frac{2\sqrt{p}}{\sqrt{k'}}$ ist, so ist

$$17.\quad c^6 = \frac{2\sqrt{p}}{\sqrt{(kk')}} = \{(1+p^2)(1+p^6)(1+p^{10})(1+p^{14})\ldots\}^6.$$

Wird die Gleichung $\frac{b^6}{c^6} = k\sqrt{k}$ mit der vorigen multiplicirt, so entsteht

$$18. \quad b^6 = \frac{2k\sqrt{p}}{\sqrt{k'}} = \{(1-p^2)(1-p^6)(1-p^{10})(1-p^{14})\} \ldots\}^6.$$

Multiplicirt man die Gleichung $\frac{d^6}{c^6} = \frac{k'\sqrt{k'}}{8p\sqrt{p}}$ mit (17.), so entsteht

$$19. \quad d^6 = \frac{k'}{4p\sqrt{k}} = \{(1+p^4)(1+p^8)(1+p^{12})(1+p^{16}) \ldots\}^6.$$

Multiplicirt man die Gleichung $\frac{\eta'^3 . a^6}{d^6} = k\sqrt{k}$ mit (19.), so erhält man endlich

$$20. \quad a^6 = \frac{kk'}{4\eta'^3 . p} = \{(1-p^4)(1-p^8)(1-p^{12})(1-p^{16}) \ldots\}^6.$$

§. 170.

Zurückführung der Modular-Functionen auf vier hyperbolische Hülfs-Functionen, und Ausdruck dieser durch trinomische Factoren.

Die fünfte, zweite und vierte von den Formeln (10.) §. 169. lassen sich also darstellen:

$$\mathfrak{Sn}'u = \frac{2\sqrt{p}}{\sqrt{k'}} . \frac{x - x^{-1}}{2} . \frac{\mathfrak{A}.\mathfrak{A}'}{\mathfrak{B}.\mathfrak{B}'},$$

$$\mathfrak{Cn}'u = \frac{2\sqrt{p}}{\sqrt{\frac{k'}{k}}} . \frac{x + x^{-1}}{2} . \frac{\mathfrak{D}.\mathfrak{D}'}{\mathfrak{B}.\mathfrak{B}'},$$

$$\mathfrak{Dn}'u = \sqrt{k} . \frac{\mathfrak{C}.\mathfrak{C}'}{\mathfrak{B}.\mathfrak{B}'},$$

da $\mathfrak{Sn}'u = \operatorname{tn} u$, $\mathfrak{Cn}'u = \frac{1}{\operatorname{cn} u}$ und $\mathfrak{Dn}'u = \frac{1}{\operatorname{snc} u}$ ist. Nehmen wir nun, aus Rücksicht auf die Gleichungen (11.) §. 169., vier Hülfs-Functionen an, nämlich:

$$1. \quad \begin{cases} \frac{\mathfrak{Al}'u}{g'} = 2\sqrt{p} . \frac{x - x^{-1}}{2} . \mathfrak{A}.\mathfrak{A}', \\ \frac{\mathfrak{Bl}'u}{g'} = 2\sqrt{p} . \frac{x + x^{-1}}{2} . \mathfrak{D}.\mathfrak{D}', \\ \frac{\mathfrak{Gl}'u}{g'} = \mathfrak{C}.\mathfrak{C}', \\ \frac{\mathfrak{Hl}'u}{g'} = \mathfrak{B}.\mathfrak{B}', \end{cases}$$

die wir, wenn der Modul mit dem conjugirten vertauscht wird, durch $\frac{\mathfrak{Al}u}{g}$, $\frac{\mathfrak{Bl}u}{g}$, $\frac{\mathfrak{Gl}u}{g}$ und $\frac{\mathfrak{Hl}u}{g}$ bezeichnen, so haben wir die Formeln

$$2.\quad \begin{cases} \mathfrak{Sn}'u = \frac{1}{\sqrt{k'}}.\frac{\mathfrak{Al}'u}{\mathfrak{Hl}'u} \text{ also } \mathfrak{Sn}u = \frac{1}{\sqrt{k}}.\frac{\mathfrak{Al}u}{\mathfrak{Hl}u}, \\ \mathfrak{Cn}'u = \sqrt{\frac{k}{k'}}.\frac{\mathfrak{Bl}'u}{\mathfrak{Hl}'u} \quad - \quad \mathfrak{Cn}u = \sqrt{\frac{k'}{k}}.\frac{\mathfrak{Bl}u}{\mathfrak{Hl}u}, \\ \mathfrak{Dn}'u = \sqrt{k}.\frac{\mathfrak{Gl}'u}{\mathfrak{Hl}'u} \quad - \quad \mathfrak{Dn}u = \sqrt{k'}.\frac{\mathfrak{Gl}u}{\mathfrak{Hl}u}, \\ \mathfrak{Tn}'u = \frac{1}{\sqrt{k}}.\frac{\mathfrak{Al}'u}{\mathfrak{Bl}'u} \quad - \quad \mathfrak{Tn}u = \frac{1}{\sqrt{k'}}.\frac{\mathfrak{Al}u}{\mathfrak{Bl}u}, \end{cases}$$

wodurch die hyperbolischen Functionen auf vier hyperbolische Hülfs-Functionen zurückgeführt sind. Die Werthe der constanten, höchstens von den Moduln k und k' abhängigen Divisoren g und g' werden bald näher bestimmt werden. Wir nennen $\mathfrak{Al}u$ die erste, $\mathfrak{Bl}u$ die zweite, $\mathfrak{Gl}u$ die dritte und $\mathfrak{Hl}u$ die vierte hyperbolische Hülfs-Function.

Den Gleichungen (11.) §. 169. gemäfs ist nun, da $\frac{1}{\sqrt{p.x}} = e^{\eta'(\frac{1}{2}K-u)}$ ist,

$$3.\quad \begin{cases} \mathfrak{Al}'(K-u) = e^{\eta'(\frac{1}{2}K-u)}.\mathfrak{Hl}'u, \\ \mathfrak{Hl}'(K-u) = e^{\eta'(\frac{1}{2}K-u)}.\mathfrak{Al}'u, \\ \mathfrak{Bl}'(K-u) = e^{\eta'(\frac{1}{2}K-u)}.\mathfrak{Gl}'u, \\ \mathfrak{Gl}'(K-u) = e^{\eta'(\frac{1}{2}K-u)}.\mathfrak{Bl}'u; \end{cases}$$

wodurch ein einfaches Gesetz der Reciprocität ausgedrückt wird. Vertauscht man den Modul mit dem conjugirten, so sind diese Formeln

$$\begin{aligned} \mathfrak{Al}(K'-u) &= e^{\eta(\frac{1}{2}K'-u)}.\mathfrak{Hl}\,u, \\ \mathfrak{Hl}(K'-u) &= e^{\eta(\frac{1}{2}K'-u)}.\mathfrak{Al}\,u, \\ \mathfrak{Bl}(K'-u) &= e^{\eta(\frac{1}{2}K'-u)}.\mathfrak{Gl}\,u, \\ \mathfrak{Gl}(K'-u) &= e^{\eta(\frac{1}{2}K'-u)}.\mathfrak{Bl}\,u. \end{aligned}$$

Da $(1-p^4x^2)(1-p^4x^{-2}) = 1-2p^4\left(\frac{x^2+x^{-2}}{2}\right)+p^8 = 1-2p^4\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'u+p^8$ ist, so erhält man durch die wirkliche Multiplication der Factoren von $\mathfrak{A}$ mit denen von $\mathfrak{A}'$, den Ausdruck

$$4.\quad \frac{\mathfrak{Al}'u}{g'} = 2\sqrt{p}\,.\,\mathfrak{Sin}\,\eta'u\,.\,(1-2p^4\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'u+p^8)(1-2p^8\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'u+p^{16}) \times (1-2p^{12}\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'u+p^{24})\ldots.$$

Eben so findet man die Ausdrücke

$$5.\quad \frac{\mathfrak{Bl}'u}{g'} = 2\sqrt{p}\,.\,\mathfrak{Cos}\,\eta'u\,.\,(1+2p^4\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'u+p^8)(1+2p^8\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'u+p^{16}) \times (1+2p^{12}\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'u+p^{24})\ldots,$$

$$6.\quad \frac{\mathfrak{Gl}'u}{g'} = (1+2p^2\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'u+p^4)(1+2p^6\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'u+p^{12}) \times (1+2p^{10}\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'u+p^{20})\ldots,$$

$$7.\quad \frac{\mathfrak{Hl}'u}{g'} = (1-2p^2\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'u+p^4)(1-2p^6\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'u+p^{12}) \times (1-2p^{10}\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'u+p^{20})\ldots.$$

Die Constante g, welche wir weiter unten bestimmen werden, hängt eben so von dem Modul k ab, wie g' von dem Modul k'.

Für die cyklischen Modular-Functionen erhalten wir aus (2.) die Ausdrücke

$$8.\quad \begin{cases} \mathrm{sn}\,u = \dfrac{1}{\sqrt{k}}\cdot\dfrac{\mathfrak{Al}'u}{\mathfrak{Bl}'u}, & \mathrm{snc}\,u = \dfrac{1}{\sqrt{k}}\cdot\dfrac{\mathfrak{Hl}'u}{\mathfrak{Gl}'u}, \\ \mathrm{cn}\,u = \sqrt{\dfrac{k'}{k}}\cdot\dfrac{\mathfrak{Hl}'u}{\mathfrak{Bl}'u}, & \mathrm{snc}\,u = \sqrt{\dfrac{k'}{k}}\cdot\dfrac{\mathfrak{Al}'u}{\mathfrak{Gl}'u}, \\ \mathrm{dn}\,u = \sqrt{k'}\cdot\dfrac{\mathfrak{Gl}'u}{\mathfrak{Bl}'u}, & \mathrm{dnc}\,u = \sqrt{k'}\cdot\dfrac{\mathfrak{Bl}'u}{\mathfrak{Gl}'u}, \\ \mathrm{tn}\,u = \dfrac{1}{\sqrt{k'}}\cdot\dfrac{\mathfrak{Al}'u}{\mathfrak{Hl}'u}, & \mathrm{tnc}\,u = \dfrac{1}{\sqrt{k'}}\cdot\dfrac{\mathfrak{Hl}'u}{\mathfrak{Al}'u}. \end{cases}$$

Zusatz. Setzt man in den Ausdrücken (4.) bis (7.) $u+iK'$ statt u, also $\eta'u+\frac{1}{2}\pi i$ statt $\eta'u$, so verwandelt sich, nach §. 16. des ersten Theiles, $\mathfrak{Sin}\,\eta'u$ in $i\,\mathfrak{Cos}\,\eta'u$ und $\mathfrak{Cos}\,\eta'u$ in $i\,\mathfrak{Sin}\,\eta'u$; ferner $\mathfrak{Cos}\,2\eta'u$ in $-\mathfrak{Cos}\,2\eta'u$: daher erhält man

$$9.\quad \begin{cases} \mathfrak{Al}'(u+iK') = i\,.\,\mathfrak{Bl}'u, & \text{also auch}\quad \mathfrak{Al}(u+iK) = i\,.\,\mathfrak{Bl}u, \\ \mathfrak{Bl}'(u+iK') = i\,.\,\mathfrak{Al}'u, & \quad -\quad -\quad \mathfrak{Bl}(u+iK) = i\,.\,\mathfrak{Al}u, \end{cases}$$

und

$$10.\quad \begin{cases} \mathfrak{Gl}'(u+iK') = \mathfrak{Hl}'u, & \text{also auch}\quad \mathfrak{Gl}(u+iK) = \mathfrak{Hl}u, \\ \mathfrak{Hl}'(u+iK') = \mathfrak{Gl}'u, & \quad -\quad -\quad \mathfrak{Hl}(u+iK) = \mathfrak{Gl}u. \end{cases}$$

Hiernach verhalten sich also die Functionen $\mathfrak{Al}'u$ und $\mathfrak{Bl}'u$ ungefähr so, wie die hyperbolischen Sinus und Cosinus. Die Functionen $\mathfrak{Gl}'u$ und $\mathfrak{Hl}'u$ stehen in einem ähnlichen Zusammenhange mit einander.

§. 171.

Zurückführung der Modular-Functionen auf vier cyklische Hülfs-Functionen, und Ausdruck dieser durch trinomische Factoren.

Die gesuchten Formeln, wodurch die cyklischen Modular-Functionen auf vier cyklische Hülfs-Functionen zurückgeführt werden, erhält man schon dadurch, dafs man in den Formeln (2.) §. 170. ui statt u setzt. Ein Blick auf die Formeln (4.) bis (7.) §. 170. zeigt schon, dafs nur die Function $\mathfrak{Al}u$ imaginär wird, wenn ui statt u gesetzt wird; die drei Functionen $\mathfrak{Bl}u$, $\mathfrak{Gl}u$ und $\mathfrak{Hl}u$ aber bleiben reell. Setzt man

$$1.\quad \begin{cases} \mathfrak{Al}(ui) = i\,.\,\mathrm{Al}\,u, & \text{also}\quad \mathrm{Al}(ui) = i\,.\,\mathfrak{Al}u, \\ \mathfrak{Bl}(ui) = \mathrm{Bl}\,u, & \text{also}\quad \mathrm{Bl}(ui) = \mathfrak{Bl}u, \\ \mathfrak{Gl}(ui) = \mathrm{Gl}\,u, & \text{also}\quad \mathrm{Gl}(ui) = \mathfrak{Gl}u, \\ \mathfrak{Hl}(ui) = \mathrm{Hl}\,u, & \text{also}\quad \mathrm{Hl}(ui) = \mathfrak{Hl}u, \end{cases}$$

so erhalten wir für die vier cyklischen Hülfs-Functionen, wenn wir in den Formeln (4.) bis (7.) §. 170. die beiden conjugirten Modul mit einander vertauschen, und ui für u setzen, die Ausdrücke

$$2.\quad \frac{\mathrm{Al}\,u}{g} = 2\sqrt{q}\cdot\sin\eta u.(1-2q^4\cos 2\eta u+q^8)(1-2q^8\cos 2\eta u+q^{16}) \times(1-2q^{12}\cos 2\eta u+q^{24})\ldots,$$

$$3.\quad \frac{\mathrm{Bl}\,u}{g} = 2\sqrt{q}\cdot\cos\eta u.(1+2q^4\cos 2\eta u+q^8)(1+2q^8\cos 2\eta u+q^{16}) \times(1+2q^{12}\cos 2\eta u+q^{24})\ldots,$$

$$4.\quad \frac{\mathrm{Gl}\,u}{g} = (1+2q^2\cos 2\eta u+q^4)(1+2q^6\cos 2\eta u+q^{12})(1+2q^{10}\cos 2\eta u+q^{20})\ldots,$$

$$5.\quad \frac{\mathrm{Hl}\,u}{g} = (1-2q^2\cos 2\eta u+q^4)(1-2q^6\cos 2\eta u+q^{12})(1-2q^{10}\cos 2\eta u+q^{20})\ldots$$

und die Ausdrücke der Modular-Functionen selbst sind nun

$$6.\quad \begin{cases} \mathrm{sn}\,u = \frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{\mathrm{Al}\,u}{\mathrm{Hl}\,u}, & \mathrm{snc}\,u = \frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{\mathrm{Bl}\,u}{\mathrm{Gl}\,u}, \\ \mathrm{cn}\,u = \sqrt{\frac{k'}{k}}\cdot\frac{\mathrm{Bl}\,u}{\mathrm{Hl}\,u}, & \mathrm{cnc}\,u = \sqrt{\frac{k'}{k}}\cdot\frac{\mathrm{Hl}\,u}{\mathrm{Gl}\,u}, \\ \mathrm{dn}\,u = \sqrt{k'}\cdot\frac{\mathrm{Gl}\,u}{\mathrm{Hl}\,u}, & \mathrm{dnc}\,u = \sqrt{k'}\cdot\frac{\mathrm{Hl}\,u}{\mathrm{Gl}\,u}, \\ \mathrm{tn}\,u = \frac{1}{\sqrt{k'}}\cdot\frac{\mathrm{Al}\,u}{\mathrm{Bl}\,u}, & \mathrm{tnc}\,u = \frac{1}{\sqrt{k'}}\cdot\frac{\mathrm{Bl}\,u}{\mathrm{Al}\,u}. \end{cases}$$

Setzt man in den Formeln (2.) $K-u$ statt u, also $\frac{1}{2}\pi-\eta u$ für ηu, so erhält man

$$7.\quad \begin{cases} \mathrm{Al}(K-u) = \mathrm{Alc}\,u = \mathrm{Bl}\,u, & \text{also}\quad \mathrm{Al}(K+u) = \mathrm{Al}(K-u), \\ \mathrm{Bl}(K-u) = \mathrm{Blc}\,u = \mathrm{Al}\,u, & \text{-}\quad \mathrm{Bl}(K+u) = -\mathrm{Bl}(K-u), \\ \mathrm{Gl}(K-u) = \mathrm{Glc}\,u = \mathrm{Hl}\,u, & \text{-}\quad \mathrm{Gl}(K+u) = \mathrm{Gl}(K-u), \\ \mathrm{Hl}(K-u) = \mathrm{Hlc}\,u = \mathrm{Gl}\,u, & \text{-}\quad \mathrm{Hl}(K+u) = \mathrm{Hl}(K-u). \end{cases}$$

Die Functionen $\mathrm{Al}\,u$ und $\mathfrak{Al}\,u$ werden negativ, wenn $-u$ statt u gesetzt wird: alle übrige hyperbolische und cyklische Hülfs-Functionen des Argumentes u ändern sich gar nicht, wenn man $-u$ statt u setzt.

Zusatz. Da $\mathrm{sn}^2 u+\mathrm{cn}^2 u=1$ und $\mathrm{snc}^2 u+\mathrm{cnc}^2 u=1$ ist, so findet man die Relationen

$$8.\quad \mathrm{Al}^2 u+k'.\mathrm{Bl}^2 u = k.\mathrm{Hl}^2 u,\quad \text{also}\quad k.\mathfrak{Bl}'^2 u = k'.\mathfrak{Hl}'^2 u+\mathfrak{Al}'^2 u,$$

$$9.\quad \mathrm{Bl}^2 u+k'.\mathrm{Al}^2 u = k.\mathrm{Gl}^2 u,\quad \text{-}\quad \mathfrak{Bl}'^2 u = k'.\mathfrak{Gl}'^2 u+k.\mathfrak{Al}'^2 u.$$

Auf ähnliche Weise erhält man noch

$$10.\quad k'.\mathrm{Gl}^2 u+k.\mathrm{Al}^2 u = \mathrm{Hl}^2 u,\quad \text{also}\quad k.\mathfrak{Gl}'^2 u = \mathfrak{Hl}'^2 u+k'.\mathfrak{Al}'^2 u,$$

$$11.\quad k'.\mathrm{Hl}^2 u+k.\mathrm{Bl}^2 u = \mathrm{Gl}^2 u,\quad \text{-}\quad k.\mathfrak{Hl}'^2 u+k'.\mathfrak{Bl}'^2 u = \mathfrak{Gl}'^2 u.$$

Hiernach lassen sich also aus zwei cyklischen Hülfs-Functionen jedesmal

die beiden anderen herleiten, und dasselbe gilt von den hyperbolischen Hülfs-Functionen.

§. 172.

Bestimmungen der beiden Constanten g und g' und einiger particulärer Werthe der acht Hülfs-Functionen.

Setzt man in den Formeln (4.) bis (7.) §. 170. das Argument $u=0$, so erhält man

$$\mathfrak{Al}'o = 0,$$
$$\mathfrak{Bl}'o = 2g'\sqrt{p}.d = 2g'\sqrt{p}.\sqrt[3]{\left(\frac{k'}{4p\sqrt{k}}\right)} = g'\sqrt[3]{\left(\frac{2\sqrt{p}.k'}{\sqrt{k}}\right)},$$
$$\mathfrak{Gl}'o = g'.c^2 = g'.\sqrt[3]{\left(\frac{2k\sqrt{p}}{\sqrt{kk'}}\right)},$$
$$\mathfrak{Hl}'o = g'.b^2 = g'.\sqrt[3]{\left(\frac{2k\sqrt{p}}{\sqrt{k'}}\right)}.$$

Eben so findet man

$$\mathrm{Al}\,o = 0,$$
$$\mathrm{Bl}\,o = 2g\sqrt{q}.\sqrt[3]{\left(\frac{k}{4q\sqrt{k'}}\right)} = g\sqrt[3]{\left(\frac{2\sqrt{q}.k}{\sqrt{k'}}\right)},$$
$$\mathrm{Gl}\,o = g.\sqrt[3]{\left(\frac{2\sqrt{q}}{\sqrt{(kk')}}\right)},$$
$$\mathrm{Hl}\,o = g.\sqrt[3]{\left(\frac{2k'\sqrt{q}}{\sqrt{k}}\right)}.$$

Den Formeln (6.) des §. 171. gemäfs erhält man, wenn $u=0$ gesetzt wird (oder $u=K$), die Gleichungen

$$\mathrm{Bl}\,o = \sqrt{k}.\mathrm{Gl}\,o,$$
$$\mathrm{Bl}\,o.\sqrt{k'} = \sqrt{k}.\mathrm{Hl}\,o,$$
$$\mathrm{Gl}\,o.\sqrt{k'} = \mathrm{Hl}\,o.$$

Daher ist überhaupt

$$\mathrm{Gl}\,o = \frac{\mathrm{Hl}\,o}{\sqrt{k'}} = \frac{\mathrm{Bl}\,o}{\sqrt{k}}.$$

Aufserdem ist $\frac{\mathfrak{Bl}'o}{\mathrm{Hl}\,o} = \frac{\mathfrak{Hl}'o}{\mathrm{Bl}\,o} = \frac{\mathfrak{Gl}'o}{\mathrm{Gl}\,o} = \frac{g'\sqrt[6]{p}}{g\sqrt[6]{q}}$. Diesen Gleichungen leisten wir auf die einfachste Weise Genüge, wenn wir die beiden Constanten g und g' so bestimmen, dafs

$$\mathrm{Gl}\,o = 1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{Gl}'o = 1$$

wird. Hieraus folgt

$$1. \quad g'\sqrt[6]{p} = g.\sqrt[6]{q},$$

$$2.\quad \begin{cases} g' = \sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt{kk'}}{2\sqrt{p}}\right)} = \left\{\frac{1}{(1+p^2)(1+p^6)(1+p^{10})(1+p^{14})\ldots}\right\}^2, \\ g = \sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt{kk'}}{2\sqrt{q}}\right)} = \left\{\frac{1}{(1+q^2)(1+q^6)(1+q^{10})(1+q^{14})\ldots}\right\}^2. \end{cases}$$

Aufserdem haben wir noch die particulären Bestimmungen

$$3.\quad \begin{cases} \mathrm{Al}\,o = \mathrm{Bl}\,K = 0 & \text{und}\quad \mathfrak{Al}'o = 1, \\ \mathrm{Bl}\,o = \mathrm{Al}\,K = \sqrt{k} & -\quad \mathfrak{Bl}'o = \sqrt{k'}, \\ \mathrm{Gl}\,o = \mathrm{Hl}\,K = 1 & -\quad \mathfrak{Gl}'o = 1, \\ \mathrm{Hl}\,o = \mathrm{Gl}\,K = \sqrt{k'} & -\quad \mathfrak{Hl}'o = \sqrt{k}. \end{cases}$$

Setzt man noch in den Formeln (3.) §. 170. das Argument $u=0$, so erhält man

$$4.\quad \begin{cases} \mathfrak{Al}'K = \sqrt{k}.e^{\frac{1}{4}\eta'K}, & \mathfrak{Gl}'K = \sqrt{k'}.e^{\frac{1}{4}\eta'K}, \\ \mathfrak{Bl}'K = e^{\frac{1}{4}\eta'K}, & \mathfrak{Hl}'K = 0. \end{cases}$$

§. 173.

Die cyklischen Hülfs-Functionen der Argumente von der Form $u+mK+niK'$.

Setzt man in den Formeln (7.) §. 171. jetzt $-u$ statt u, so werden sie

$$1.\quad \begin{cases} \mathrm{Al}(u+K) = \mathrm{Bl}\,u, & \mathrm{Gl}(u+K) = \mathrm{Hl}\,u, \\ \mathrm{Bl}(u+K) = -\mathrm{Al}\,u, & \mathrm{Hl}(u+K) = \mathrm{Gl}\,u. \end{cases}$$

Setzt man in den vorigen Formeln $u+K$ statt K, so verwandeln sie sich in

$$\mathrm{Al}(u+2K) = -\mathrm{Al}\,u,\ \mathrm{Bl}(u+2K) = -\mathrm{Bl}\,u,\ \mathrm{Gl}(u+2K) = \mathrm{Gl}\,u \text{ und } \mathrm{Hl}(u+2K) = \mathrm{Hl}\,u.$$

Hieraus folgen sofort die allgemeineren Formeln

$$2.\quad \begin{cases} \mathrm{Al}(u+2mK) = (-1)^m.\mathrm{Al}\,u, & \mathrm{Al}(u+(2m+1)K) = (-1)^m.\mathrm{Bl}\,u, \\ \mathrm{Bl}(u+2mK) = (-1)^m.\mathrm{Bl}\,u, & \mathrm{Bl}(u+(2m+1)K) = (-1)^{m+1}.\mathrm{Al}\,u, \\ \mathrm{Gl}(u+2mK) = \mathrm{Gl}\,u, & \mathrm{Gl}(u+(2m+1)K) = \mathrm{Hl}\,u, \\ \mathrm{Hl}(u+2mK) = \mathrm{Hl}\,u, & \mathrm{Hl}(u+(2m+1)K) = \mathrm{Gl}\,u. \end{cases}$$

Nach §. 170. ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{Al}(u+K') &= e^{\eta(\frac{1}{4}K'+u)}.\mathfrak{Hl}\,u, \\ \mathfrak{Hl}(u+K') &= -e^{\eta(\frac{1}{4}K'+u)}.\mathfrak{Al}\,u, \\ \mathfrak{Bl}(u+K') &= e^{\eta(\frac{1}{4}K'+u)}.\mathfrak{Gl}\,u, \\ \mathfrak{Gl}(u+K') &= e^{\eta(\frac{1}{4}K'+u)}.\mathfrak{Bl}\,u. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen können auch also dargestellt werden:

$$\begin{aligned} \mathrm{Al}(ui+iK') &= i.e^{\eta(\frac{1}{4}K'+u)}.\mathrm{Hl}(ui), \\ \mathrm{Hl}(ui+iK') &= i.e^{\eta(\frac{1}{4}K'+u)}.\mathrm{Al}(ui), \\ \mathrm{Bl}(ui+iK') &= e^{\eta(\frac{1}{4}K'+u)}.\mathrm{Gl}(ui), \\ \mathrm{Gl}(ui+iK') &= e^{\eta(\frac{1}{4}K'+u)}.\mathrm{Bl}(ui); \end{aligned}$$

und setzt man u statt ui, also $-ui$ statt u, so verwandeln sie sich sofort in die folgenden:

$$3.\quad \begin{cases} \mathrm{Al}(u+iK') = i.e^{\eta(\frac{1}{2}K'-ui)}.\,\mathrm{Hl}\,u, \\ \mathrm{Bl}(u+iK') = e^{\eta(\frac{1}{2}K'-ui)}.\,\mathrm{Gl}\,u, \\ \mathrm{Gl}(u+iK') = e^{\eta(\frac{1}{2}K'-ui)}.\,\mathrm{Bl}\,u, \\ \mathrm{Hl}(u+iK') = i.e^{\eta(\frac{1}{2}K'-ui)}.\,\mathrm{Al}\,u, \end{cases}$$

Da $(K'+u)^2-u^2 = 2uK'+K'^2 = 2K'(u+\frac{1}{2}K')$ und also $\frac{\pi}{4KK'}(K'+u)^2-\frac{\pi u^2}{4KK'} = \eta(\frac{1}{2}K'+\mathrm{u})$ ist, so können die früheren Formeln, indem man zur Abkürzung $\lambda = \frac{\pi}{4KK'}$ setzt, auch also dargestellt werden:

$$\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{l}(u+K')}{e^{\lambda(K'+u)^2}} = \frac{\mathfrak{H}\mathfrak{l}\,u}{e^{\lambda u^2}},\qquad \frac{\mathfrak{G}\mathfrak{l}(u+K')}{e^{\lambda(u+K')^2}} = \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{l}\,u}{e^{\lambda u^2}},$$

$$\frac{\mathfrak{B}\mathfrak{l}(u+K')}{e^{\lambda(u+K')^2}} = \frac{\mathfrak{G}\mathfrak{l}\,u}{e^{\lambda u^2}},\qquad \frac{\mathfrak{H}\mathfrak{l}(u+K')}{e^{\lambda(u+K')^2}} = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{l}\,u}{e^{\lambda u^2}}.$$

Setzt man also wiederholt $u+K'$ statt u, so entsteht

$$\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{l}(u+2nK')}{e^{\lambda(u+2nK')^2}} = (-1)^n.\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{l}\,u}{e^{\lambda u^2}} \quad\text{und}\quad \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{l}(u+2nK'+K')}{e^{\lambda(u+2nK'+K')^2}} = (-1)^n.\frac{\mathfrak{H}\mathfrak{l}\,u}{e^{\lambda u^2}},$$

$$\frac{\mathfrak{B}\mathfrak{l}(u+2nK')}{e^{\lambda(u+2nK')^2}} = \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{l}\,u}{e^{\lambda u^2}} \quad\text{und}\quad \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{l}(u+2nK'+K')}{e^{\lambda(u+2nK'+K')^2}} = \frac{\mathfrak{G}\mathfrak{l}\,u}{e^{\lambda u^2}},$$

$$\frac{\mathfrak{G}\mathfrak{l}(u+2nK')}{e^{\lambda(u+2nK')^2}} = \frac{\mathfrak{G}\mathfrak{l}\,u}{e^{\lambda u^2}} \quad\text{und}\quad \frac{\mathfrak{G}\mathfrak{l}(u+2nK'+K')}{e^{\lambda(u+2nK'+K')^2}} = \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{l}\,u}{e^{\lambda u^2}},$$

$$\frac{\mathfrak{H}\mathfrak{l}(u+2nK')}{e^{\lambda(u+2nK')^2}} = (-1)^n.\frac{\mathfrak{H}\mathfrak{l}\,u}{e^{\lambda u^2}} \quad\text{und}\quad \frac{\mathfrak{H}\mathfrak{l}(u+2nK'+K')}{e^{\lambda(u+2nK'+K')^2}} = (-1)^{n+1}.\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{l}\,u}{e^{\lambda u^2}},$$

und hieraus erhält man auf ähnliche Art, wie die obigen Formeln (3.) hergeleitet wurden, die nachstehenden allgemeineren Formeln:

$$4.\quad \begin{cases} \mathrm{Al}(u+2niK').e^{\frac{\pi(u+2niK')^2}{4KK'}} = (-1)^n\,\mathrm{Al}\,u.e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}}, \\ \mathrm{Bl}(u+2niK').e^{\frac{\pi(u+2niE')^2}{4KK'}} = \mathrm{Bl}\,u.e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}}, \\ \mathrm{Gl}(u+2niK').e^{\frac{\pi(u+2niK')^2}{4KK'}} = \mathrm{Gl}\,u.e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}}, \\ \mathrm{Hl}(u+2niK').e^{\frac{\pi(u+2niK')^2}{4KK'}} = (-1)^n.\mathrm{Hl}\,u.e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}}, \end{cases}$$

und noch die folgenden:

$$5.\quad \begin{cases} \mathrm{Al}(u+(2n+1)iK').e^{\frac{\pi(u+(2n+1)iK')^2}{4KK'}} = i^{2n+1}.\mathrm{Hl}\,u.e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}}, \\ \mathrm{Bl}(u+(2n+1)iK').e^{\frac{\pi(u+(2n+1)iK')^2}{4KK'}} = \mathrm{Gl}\,u.e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}}, \\ \mathrm{Gl}(u+(2n+1)iK').e^{\frac{\pi(u+(2n+n)iK')^2}{4KK'}} = \mathrm{Bl}\,u.e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}}, \\ \mathrm{Hl}(u+(2n+1)iK').e^{\frac{\pi(u+(2n+1)iK')^2}{4KK'}} = i^{2n+1}.\mathrm{Al}\,u.e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}}. \end{cases}$$

Durch eine leichte Zusammensetzung der Formeln (2.), (4.) und (5.) erhält man die Ausdrücke der cyklischen Hülfs-Functionen eines Arguments von der Form $u+mK'+niK'$ durch Functionen des Argumentes u.

§. 174.

Reihen für die natürlichen Logarithmen der hyperbolischen und cyklischen Hülfs-Functionen des Argumentes u.

Nach §. 53. des ersten Theiles ist

$$\log(1+2p\,\mathfrak{Cos}\,\varphi+p^2)$$
$$=2p\,\mathfrak{Cos}\,\varphi-\frac{2p^2}{2}\mathfrak{Cos}\,2\varphi+\frac{2p^3}{3}\mathfrak{Cos}\,3\varphi-\frac{2p^4}{4}\mathfrak{Cos}\,4\varphi+-\text{etc. und}$$
$$\log(1-2p\,\mathfrak{Cos}\,\varphi+p^2)$$
$$=-2p\,\mathfrak{Cos}\,\varphi-\frac{2p^2}{2}\mathfrak{Cos}\,2\varphi-\frac{2p^3}{3}\mathfrak{Cos}\,3\varphi-\frac{2p^4}{4}\mathfrak{Cos}\,4\varphi--\text{etc.}$$

Entwickelt man hiernach die natürlichen Logarithmen der Factoren des für $\mathfrak{Al}'u$ in §. 170. angegebenen Productes, so erhält man

$$\log\mathfrak{Al}'u=\log(2g'\sqrt{p}.\mathfrak{Sin}\,\eta'u)$$
$$-2p^4\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'u-\frac{2p^8}{2}\mathfrak{Cos}\,4\eta'u-\frac{2p^{12}}{3}\mathfrak{Cos}\,6\eta'u-\frac{2p^{16}}{4}\mathfrak{Cos}\,8\eta'u-\ldots.$$
$$-2p^8\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'u-\frac{2p^{16}}{2}\mathfrak{Cos}\,4\eta'u-\frac{2p^{24}}{3}\mathfrak{Cos}\,6\eta'u-\frac{2p^{32}}{4}\mathfrak{Cos}\,8\eta'u-\ldots.$$
$$-2p^{12}\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'u-\frac{2p^{24}}{2}\mathfrak{Cos}\,4\eta'u-\frac{2p^{36}}{3}\mathfrak{Cos}\,6\eta'u-\frac{2p^{48}}{4}\mathfrak{Cos}\,8\eta'u-\ldots.$$
$$-\text{etc.}$$

Die einzelnen Verticalreihen lassen sich summiren. Es ist

$$p^4+p^8+p^{12}+p^{16}\ldots.=\frac{p^4}{1-p^4},$$

und summirt man hiernach wirklich, so entsteht die Reihe

$$1.\quad \log\mathfrak{Al}'u=\log(2g'.\sqrt{p}.\mathfrak{Sin}\,\eta'u)$$
$$-\frac{2p4}{1-p^4}\mathfrak{Cos}\,2\eta'u-\frac{\frac{2}{2}p^8}{1-p^8}\mathfrak{Cos}\,4\eta'u-\frac{\frac{2}{3}p^{12}}{1-p^{12}}\mathfrak{Cos}\,6\eta'u-\frac{\frac{2}{4}p^{16}}{1-p^{16}}\mathfrak{Cos}\,8\eta'u.$$

Ganz eben so findet man die Reihen

$$2.\quad \log\mathfrak{Bl}'u=\log(2g'.\sqrt{p}.\mathfrak{Cos}\,\eta'u)$$
$$-\frac{2p^4}{1-p^4}\mathfrak{Cos}\,2\eta'u-\frac{\frac{2}{2}p^8}{1-p^8}\mathfrak{Cos}\,4\eta'u-\frac{\frac{2}{3}p^{12}}{1-p^{12}}\mathfrak{Cos}\,6\eta'u-\frac{\frac{2}{4}p^{16}}{1-p^{16}}\mathfrak{Cos}\,8\eta'u+\ldots.$$
$$3.\quad \log\mathfrak{Cl}'u=\log g'$$
$$+\frac{2p^2}{1-p^4}\mathfrak{Cos}\,2\eta'u-\frac{\frac{2}{2}p^4}{1-p^8}\mathfrak{Cos}\,4\eta'u+\frac{\frac{2}{3}p^6}{1-p^{12}}\mathfrak{Cos}\,6\eta'u-\frac{\frac{2}{4}p^8}{1-p^{16}}\mathfrak{Cos}\,8\eta'u+\ldots.$$
$$4.\quad \log\mathfrak{Hl}'u=\log g'$$
$$-\frac{2p^2}{1-p^4}\mathfrak{Cos}\,2\eta'u-\frac{\frac{2}{2}p^4}{1-p^8}\mathfrak{Cos}\,4\eta'u-\frac{\frac{2}{3}p^6}{1-p^{12}}\mathfrak{Cos}\,6\eta'u-\frac{\frac{2}{4}p^8}{1-p^{16}}\mathfrak{Cos}\,8\eta'+\ldots.$$

in welchen $g'=\sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt{(kk')}}{2.\sqrt{p}}\right)}$, also $\log g'=\log\sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt{(kk')}}{2}\right)}+\frac{\eta'K}{6}$ ist.

Diese Reihen haben einen hohen Grad der Convergenz, wenn der Modul k wenig von Eins verschieden und das Argument $u<\frac{1}{2}K$ oder doch nicht $>\frac{1}{2}K$ ist; sie lassen sich auch wie folgt darstellen:

$$5.\quad\begin{cases}
\log\mathfrak{Al}'u = \log(2g'\sqrt{p}\,\mathfrak{Sin}\,\eta'u) \\
-p^2\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,2\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta'K}-\frac{p^4}{2}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,4\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,4\eta'K}-\frac{p^6}{3}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,6\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta'K}-\frac{p^8}{4}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,8\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,8\eta'K}-\dots, \\
\log\mathfrak{Bl}'u = \log(2g'\sqrt{p}\,\mathfrak{Cos}\,\eta'u) \\
+p^2\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,2\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta'K}-\frac{p^4}{2}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,4\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,4\eta'K}+\frac{p^6}{3}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,6\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta'K}-\frac{p^8}{4}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,8\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,8\eta'K}+-\dots, \\
\log\mathfrak{Gl}'u = \\
\log g'+\frac{\mathfrak{Cos}\,2\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta'K}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,4\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,4\eta'K}+\frac{1}{3}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,6\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta'K}-\frac{1}{4}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,8\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,8\eta'K}+-\dots, \\
\log\mathfrak{Hl}'u = \\
\log g'-\frac{\mathfrak{Cos}\,2\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta'K}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,4\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,4\eta'K}-\frac{1}{3}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,6\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta'K}-\frac{1}{4}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,8\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,8\eta'K}--\dots
\end{cases}$$

Ist das Argument $u>K$, so kann man Gebrauch machen von den Formeln:

$$\begin{aligned}
\log\mathfrak{Al}'u &= \log\mathfrak{Hl}'(K-u)+\eta'(u-\tfrac{1}{2}K),\\
\log\mathfrak{Bl}'u &= \log\mathfrak{Gl}'(K-u)+\eta'(u-\tfrac{1}{2}K),\\
\log\mathfrak{Gl}'u &= \log\mathfrak{Bl}'(K-u)+\eta'(u-\tfrac{1}{2}K),\\
\log\mathfrak{Hl}'u &= \log\mathfrak{Al}'(K-u)+\eta'(u-\tfrac{1}{2}K),
\end{aligned}$$

welche sich unmittelbar aus den Gleichungen (3.) §. 170. ergeben und also die Functionen des Argumentes u auf Functionen des Argumentes $K-u$, welches $<K$ ist, zurückführen.

Vertauscht man in den Formeln (5.) die beiden conjugirten Moduln k und k' mit einander, zugleich ui für u setzend, so erhält man für die cyklischen Hülfs-Functionen, oder eigentlich für ihre natürlichen Logarithmen die Reihen:

$$6.\quad\begin{cases}
\log\mathrm{Al}\,u = \log(2g.\sqrt{q}.\sin\eta u) \\
-q^2\cdot\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta K'}-\frac{q^4}{2}\cdot\frac{\cos 4\eta u}{\mathfrak{Sin}\,4\eta K'}-\frac{q^6}{3}\cdot\frac{\cos 6\eta u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta K'}-\frac{q^8}{4}\cdot\frac{\cos 8\eta u}{\mathfrak{Sin}\,8\eta K'}-\dots, \\
\log\mathrm{Bl}\,u = \log(2g.\sqrt{q}.\cos\eta u) \\
+q^2\cdot\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta K'}-\frac{q^4}{2}\cdot\frac{\cos 4\eta u}{\mathfrak{Sin}\,4\eta K'}+\frac{q^6}{3}\cdot\frac{\cos 6\eta u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta K'}-\frac{q^8}{4}\cdot\frac{\cos 8\eta u}{\mathfrak{Sin}\,8\eta K'}+-\dots, \\
\log\mathrm{Gl}\,u = \\
\log g+\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta K'}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos 4\eta u}{\mathfrak{Sin}\,4\eta K'}+\frac{1}{3}\cdot\frac{\cos 6\eta u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta K'}-\frac{1}{4}\cdot\frac{\cos 8\eta u}{\mathfrak{Sin}\,8\eta K'}+-\dots, \\
\log\mathrm{Hl}\,u = \\
\log g-\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta K'}-\frac{1}{4}\cdot\frac{\cos 4\eta u}{\mathfrak{Sin}\,4\eta K'}-\frac{1}{3}\cdot\frac{\cos 6\eta u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta K'}-\frac{1}{4}\cdot\frac{\cos 8\eta u}{\mathfrak{Sin}\,8\eta K'}--\dots,
\end{cases}$$

welche desto rascher convergiren, je kleiner der Modul k ist, das Argument u mag $< \frac{1}{2}K$ oder $> \frac{1}{2}K$ sein. Es ist $g = \sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt{(kk')}}{2.\sqrt{q}}\right)}$, also $\log g = \log \sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt{(kk')}}{2}\right)} + \frac{\eta K'}{6}$.

Zusatz. Ist in den Reihen (5.) der Modul zu klein, oder in den Reihen (6.) der Modul zu grofs, so wird man die einen Hülfs-Functionen auf die anderen zurückführen.

Die dazu dienenden merkwürdigen Formeln

$$\log \mathfrak{Al}'u = \log \mathrm{Al}\,u + \frac{\pi u^2}{4KK'}, \qquad \log \mathfrak{Gl}'u = \log \mathrm{Gl}\,u + \frac{\pi u^2}{4KK'},$$

$$\log \mathfrak{Bl}'u = \log \mathrm{Hl}\,u + \frac{\pi u^2}{4KK'}, \qquad \log \mathfrak{Hl}'u = \log \mathrm{Bl}\,u + \frac{\pi u^2}{4KK'}$$

können aber erst weiter unten in gehöriger Weise hergeleitet werden.

§. 175.

Reihen für die Logarithmen der Modular-Functionen, welche nach den Cosinus der Vielfachen von ηu und $\eta' u$ fortschreiten.

Den Formeln (8.) §. 170. gemäfs erhält man für die natürlichen Logarithmen der cyklischen Modular-Functionen des Argumentes u und seines Complementes $K-u$ die folgenden Reihen, welche aus den Reihen (1.) bis (5.) §. 174. blofs durch die Subtraction gefunden werden:

$$1.\quad \log \mathrm{sn}\, u$$
$$= \log\left(\frac{\mathfrak{Tang}\,\eta' u}{\sqrt{k}}\right) - \frac{2p^2}{1}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,2\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta' K} - \frac{2p^6}{3}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,6\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta' K} - \frac{2p^{10}}{5}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,10\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,10\eta' K} - \cdots,$$

$$2.\quad \log \mathrm{snc}\, u$$
$$= \log\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) - \frac{2\mathfrak{Cos}\,2\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta' K} - \frac{2}{3}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,6\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta' K} - \frac{2}{5}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,10\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,10\eta' K} - \frac{2}{7}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,14\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,14\eta' K} - \cdots,$$

$$3.\quad \log \mathrm{cn}\, u = \log\left(\frac{\sqrt{\frac{k'}{k}}}{2\sqrt{p}\,.\,\mathfrak{Cos}\,\eta u}\right)$$
$$-p\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,2\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,\eta' K} - \frac{p^2}{2}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,4\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta' K} - \frac{p^3}{3}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,6\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,3\eta' K} - \frac{p^4}{4}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,8\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta' K} - \cdots,$$

$$4.\quad \log \mathrm{cnc}\, u = \log\left(2\sqrt{\left(p\,.\,\frac{k'}{k}\right)}\,\mathfrak{Sin}\,\eta' u\right)$$
$$-p\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,2\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,\eta' K} + \frac{p^2}{2}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,4\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta' K} - \frac{p^3}{3}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,6\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,3\eta' K} + \frac{p^4}{4}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,8\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta' K} - + \cdots,$$

$$5.\quad \log \mathrm{dn}\, u = \log\left(\frac{\sqrt{k'}}{2\sqrt{p}\,.\,\mathfrak{Cos}\,\eta' u}\right)$$
$$+p\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,2\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,\eta' K} - \frac{p^2}{2}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,4\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta' K} + \frac{p^3}{3}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,6\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta' K} - \frac{p^4}{4}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,8\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta' K} + - \cdots,$$

$$6.\quad \log \operatorname{dnc} u = \log(2\sqrt{(pk')}\,\mathfrak{Cos}\,\eta' u)$$
$$-p.\frac{\mathfrak{Cos}2\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,\eta' K}+\frac{p^2}{2}.\frac{\mathfrak{Cos}4\eta' u}{\mathfrak{Cos}2\eta' K}-\frac{p^3}{3}.\frac{\mathfrak{Cos}6\eta' u}{\mathfrak{Cos}3\eta' K}+\frac{p^4}{4}.\frac{\mathfrak{Cos}8\eta' u}{\mathfrak{Cos}4\eta' K}-\ldots,$$

$$7.\quad \log \operatorname{tn} u = \log\left(\frac{2\sqrt{p}\,.\,\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\sqrt{k'}}\right)+p.\frac{\mathfrak{Cos}2\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,\eta' K}+\frac{p^2}{2}.\frac{\mathfrak{Cos}4\eta' u}{\mathfrak{Cos}2\eta' K}+\frac{p^3}{3}.\frac{\mathfrak{Cos}6\eta' u}{\mathfrak{Cos}3\eta' K}+\ldots,$$

$$8.\quad \log \operatorname{tnc} u = \log\left(\frac{1}{2\sqrt{(pk')}\,\mathfrak{Sin}\eta' u}\right)-p.\frac{\mathfrak{Cos}2\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,\eta' K}-\frac{p^2}{2}.\frac{\mathfrak{Cos}4\eta' u}{\mathfrak{Cos}2\eta' K}-\frac{p^3}{3}.\frac{\mathfrak{Cos}6\eta' u}{\mathfrak{Cos}3\eta' K}+\ldots$$

Diese Reihen convergiren desto rascher, je weniger der Modul von Eins verschieden ist. Reihen, welche desto rascher convergiren, je weniger der Modul von Null verschieden ist, werden aus den Reihen (6.) §. 174. hergeleitet, nämlich

$$9.\quad \log \operatorname{sn} u$$
$$=\log\left(2\sqrt{\frac{q}{k}}.\sin\eta u\right)+q.\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\eta K'}+\frac{q^2}{2}.\frac{\cos 4\eta u}{\mathfrak{Cos}2\eta K'}+\frac{q^3}{3}.\frac{\cos 6\eta u}{\mathfrak{Cos}3\eta K'}+\frac{q^4}{4}.\frac{\cos 8\eta u}{\mathfrak{Cos}8\eta K'}+\ldots,$$

$$10.\quad \log \operatorname{snc} u$$
$$=\log\left(2\sqrt{\frac{q}{k}}.\cos\eta u\right)-q.\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\eta K'}+\frac{q^2}{2}.\frac{\cos 4\eta u}{\mathfrak{Cos}2\eta K'}-\frac{q^3}{3}.\frac{\cos 6\eta u}{\mathfrak{Cos}3\eta K'}+\frac{q^4}{4}.\frac{\cos 8\eta u}{\mathfrak{Cos}4\eta K'}-+\ldots,$$

$$11.\quad \log \operatorname{cn} u =$$
$$\log\left(2\sqrt{\left(\frac{qk'}{k}\right)}.\cos\eta u\right)+q.\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Sin}\eta K'}+\frac{q^2}{2}.\frac{\cos 4\eta u}{\mathfrak{Cos}2\eta K'}+\frac{q^3}{3}.\frac{\cos 6\eta u}{\mathfrak{Sin}3\eta K'}+\frac{q^4}{4}.\frac{\cos 8\eta u}{\mathfrak{Cos}4\eta K'}+\ldots,$$

$$12.\quad \log \operatorname{cnc} u =$$
$$\log\left(2\sqrt{\left(\frac{qk'}{k}\right)}.\sin\eta u\right)-q.\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Sin}\eta K'}+\frac{q^2}{2}.\frac{\cos 4\eta u}{\mathfrak{Cos}2\eta K'}-\frac{q^3}{3}.\frac{\cos 6\eta u}{\mathfrak{Sin}3\eta K'}+\frac{q^4}{4}.\frac{\cos 8\eta u}{\mathfrak{Cos}4\eta K'}-+\ldots,$$

$$13.\quad \log \operatorname{dn} u$$
$$=\log\sqrt{k'}+\frac{2}{1}.\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Sin}2\eta K'}+\frac{2}{3}.\frac{\cos 6\eta u}{\mathfrak{Sin}6\eta K'}+\frac{2}{5}.\frac{\cos 10\eta u}{\mathfrak{Sin}10\eta K'}+\frac{2}{7}.\frac{\cos 14\eta u}{\mathfrak{Sin}14\eta K'}+\ldots,$$

$$14.\quad \log \operatorname{dnc} u$$
$$=\log\sqrt{k'}-\frac{2}{1}.\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Sin}2\eta K'}-\frac{2}{3}.\frac{\cos 6\eta u}{\mathfrak{Sin}6\eta K'}-\frac{2}{5}.\frac{\cos 10\eta u}{\mathfrak{Sin}10\eta K'}-\frac{2}{7}.\frac{\cos 14\eta u}{\mathfrak{Sin}14\gamma K'}-\ldots,$$

$$15.\quad \log \operatorname{tn} = \log\left(\frac{\operatorname{tang}\eta u}{\sqrt{k'}}\right)-\frac{2q^2}{1}.\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Sin}2\eta K'}-\frac{2q^6}{3}.\frac{\cos 6\eta u}{\mathfrak{Sin}6\eta K'}-\frac{2q^{10}}{5}.\frac{\cos 10\eta u}{\mathfrak{Sin}10\eta K'}-\ldots,$$

$$16.\quad \log \operatorname{tnc} = \log\left(\frac{\cot\eta u}{\sqrt{k'}}\right)+\frac{2q^2}{1}.\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Sin}2\eta K'}+\frac{2q^6}{3}.\frac{\cos 6\eta u}{\mathfrak{Sin}6\eta K'}+\frac{2q^{10}}{5}.\frac{\cos 10\eta u}{\mathfrak{Sin}10\eta K'}+\ldots,$$

Aus den letzten Formeln erhält man, indem $u=0$ oder $u=K$ genommen und $\frac{1}{2}\pi.\frac{K'}{K}=v$ gesetzt wird, noch die folgenden particulären Resultate:

$$17.\quad \log\frac{1}{k'} = \frac{4}{\mathfrak{Sin}\,2v}+\frac{4}{3\,\mathfrak{Sin}\,6v}+\frac{4}{5\,\mathfrak{Sin}\,10v}+\frac{4}{7\,\mathfrak{Sin}\,14v}+\ldots$$

$$18.\quad \log\frac{k}{k'} = \log 4 - v + \frac{2e^{-v}}{\mathfrak{Sin}\,v}+\frac{2e^{-2v}}{2\,\mathfrak{Cos}\,2v}+\frac{2e^{-3v}}{3\,\mathfrak{Sin}\,3v}+\frac{2e^{-4v}}{4\,\mathfrak{Cos}\,4v}+\ldots$$

$$19.\quad \log\frac{1}{k} = v - \log 4 + \frac{2e^{-v}}{\mathfrak{Cos}\,v} + \frac{2e^{-2v}}{2\,\mathfrak{Cos}\,2v} + \frac{2e^{-3v}}{3\,\mathfrak{Cos}\,3v} + \frac{2e^{-4v}}{4\,\mathfrak{Cos}\,4v} + \ldots,$$

$$20.\quad \log K = \log(\tfrac{1}{2}\pi) + \frac{2e^{-v}}{\mathfrak{Cos}\,v} + \frac{2e^{-3v}}{3\,\mathfrak{Cos}\,3v} + \frac{2e^{-5v}}{5\,\mathfrak{Cos}\,5v} + \frac{2e^{-7v}}{7\,\mathfrak{Cos}\,7v} + \ldots,$$

$$21.\quad \log K' = \log v + \frac{2e^{-v}}{\mathfrak{Cos}\,v} + \frac{2e^{-3v}}{3\,\mathfrak{Cos}\,3v} + \frac{2e^{-5v}}{5\,\mathfrak{Cos}\,5v} + \frac{2e^{-7v}}{7\,\mathfrak{Cos}\,7v} + \ldots.$$

Die letzten fünf Reihen convergiren immer rasch, da der Annahme gemäſs $v > \frac{1}{2}\pi$ ist.

Setzt man in der Formel (17.) statt des Moduls k den nächst gröſseren, dem §. 168. gemäſs, so hat man in der Reihe

$$\log\sqrt{\frac{1}{k'}} = \frac{4q^2}{1-q^4} + \frac{4q^6}{3(1-q^{12})} + \frac{4q^{10}}{5(1-q^{20})} + \ldots,$$

$q^{\frac{1}{2}}$ statt q und $\frac{1-k}{1+k}$ statt k' zu setzen, wodurch man erhält:

$$\log\sqrt{\frac{1+k}{1-k}} = \frac{4q}{1-q^2} + \frac{4q^3}{3(1-q^6)} + \frac{4q^5}{5(1-9^{10})} + \ldots,$$

Setzen wir noch qi statt q, also dem §. 167. gemäſs $\frac{ik}{k'}$ statt k und $k = \sin\theta$, so ist

$$\frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{1+i\,\mathrm{tang}\,\theta}{1-i\,\mathrm{tang}\,\theta}} = \frac{4q}{1+q^2} - \frac{4q^3}{3(1+q^6)} + \frac{4q^5}{5(1+q^{10})} - \frac{4q^7}{7(1+q^{14})} + \ldots.$$

Die vorstehenden beiden Reihen können wie folgt einfacher dargestellt werden:

$$22.\quad \tfrac{1}{2}\mathfrak{L}\,\theta = \frac{1}{\mathfrak{Sin}\,v} + \frac{1}{3\,\mathfrak{Sin}\,3v} + \frac{1}{5\,\mathfrak{Sin}\,5v} + \frac{1}{7\,\mathfrak{Sin}\,7v} + \ldots \quad \text{und}$$

$$23.\quad \tfrac{1}{4}\theta = \frac{1}{\mathfrak{Cos}\,v} - \frac{1}{3\,\mathfrak{Cos}\,3v} + \frac{1}{5\,\mathfrak{Cos}\,5v} - \frac{1}{7\,\mathfrak{Cos}\,7v} + - \ldots.$$

Hiernach können also aus der Gröſse $v = \frac{1}{2}\pi.\frac{K'}{K}$ die Quadranten K, K' und die Moduln k und k', wie auch $\theta = \arcsin(k)$ bequem berechnet werden.

Soll umgekehrt v aus dem Modul k berechnet werden, so dient dazu die im §. 57. gefundene Formel

$$v = \log\frac{1}{q} = \log\left(\frac{4\sqrt{k'}}{k}\right) + \tfrac{3}{4}\log\frac{m_1}{n_1} + \tfrac{3}{8}\log\frac{m_2}{n_2} + \tfrac{3}{16}\log\frac{m_3}{n_3} + \ldots.$$

§. 176.

Reihen für die ersten Differenzial-Verhältnisse der natürlichen Logarithmen der Modular-Functionen des Argumentes u.

Differenziirt man die vorhin entwickelten Reihen (1.) bis (8.), indem man u als veränderlich betrachtet, so erhält man die Formeln:

$$1.\quad k'.\frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{cnc}\,u}=\frac{2\eta'}{\mathrm{Sin}2\eta'u}-4p^2\eta'.\frac{\mathrm{Sin}2\eta'u}{\mathrm{Sin}2\eta'K}-4p^6\eta'.\frac{\mathrm{Sin}6\eta'u}{\mathrm{Sin}6\eta'K}-4p^{10}\eta'.\frac{\mathrm{Sin}10\eta'u}{\mathrm{Sin}10\eta'K}-\ldots,$$

$$2.\quad k'.\frac{\mathrm{cnc}\,u}{\mathrm{cn}\,u}=4\eta'.\frac{\mathrm{Sin}\,2\eta'u}{\mathrm{Sin}2\eta'K}+4\eta'.\frac{\mathrm{Sin}6\eta'u}{\mathrm{Sin}6\eta'K}+4\eta'.\frac{\mathrm{Sin}10\eta'u}{\mathrm{Sin}10\eta'K}+4\eta'.\frac{\mathrm{Sin}14\eta'u}{\mathrm{Sin}14\eta'K}+\ldots,$$

$$3.\quad \frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{snc}\,u}=\eta'\,\mathrm{Tang}\,\eta'u+2\eta'p.\frac{\mathrm{Sin}2\eta'u}{\mathrm{Sin}\,\eta'K}+2\eta'p^2.\frac{\mathrm{Sin}4\eta'u}{\mathrm{Cos}2\eta'K}+2\eta'p^3.\frac{\mathrm{Sin}6\eta'u}{\mathrm{Sin}3\eta'K}$$
$$+2\eta'p^4.\frac{\mathrm{Sin}8\eta'u}{\mathrm{Cos}4\eta'K}+\ldots,$$

$$4.\quad \frac{\mathrm{snc}\,u}{\mathrm{sn}\,u}=\eta'\,\mathrm{Cot}\,\eta'u-2\eta'p.\frac{\mathrm{Sin}2\eta'u}{\mathrm{Sin}\,\eta'K}+2\eta'p^2.\frac{\mathrm{Sin}4\eta'u}{\mathrm{Cos}2\eta'K}-2\eta'p^3.\frac{\mathrm{Sin}6\eta'u}{\mathrm{Sin}3\eta'K}$$
$$+2\eta'p^4.\frac{\mathrm{Sin}8\eta'u}{\mathrm{Cos}4\eta'K}-+\ldots,$$

$$5.\quad k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u=\eta'\,\mathrm{Tang}\,\eta'u-2\eta'p.\frac{\mathrm{Sin}2\eta'u}{\mathrm{Cos}\,\eta'K}+2\eta'p^2.\frac{\mathrm{Sin}4\eta'u}{\mathrm{Cos}2\eta'K}$$
$$-2\eta'p^3.\frac{\mathrm{Sin}6\eta'u}{\mathrm{Cos}3\eta'K}+2\eta'p^4.\frac{\mathrm{Sin}8\eta'u}{\mathrm{Cos}4\eta'K}-+\ldots,$$

$$6.\quad \frac{1}{\mathrm{sn}\,u\,.\,\mathrm{snc}\,u}=\eta'\,\mathrm{Cot}\,\eta'u+2\eta'p.\frac{\mathrm{Sin}2\eta'u}{\mathrm{Cos}\,\eta'K}+2\eta'p^2.\frac{\mathrm{Sin}4\eta'u}{\mathrm{Cos}2\eta'K}$$
$$+2\eta'p^3.\frac{\mathrm{Sin}6\eta'u}{\mathrm{Cos}3\eta'K}+2\eta'p^4.\frac{\mathrm{Sin}8\eta'u}{\mathrm{Cos}4\eta'K}+\ldots,$$

deren Convergenz desto rascher ist, je weniger der Modul k von Eins abweicht. Die Formeln (9.) bis (16.) §. 175. geben:

$$7.\quad k'.\frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{cnc}\,u}=\eta\,\cot\eta u-2\eta q.\frac{\sin2\eta u}{\mathrm{Cos}\,\eta K'}-2\eta q^2.\frac{\sin4\eta u}{\mathrm{Cos}2\eta K'}-2\eta q^3.\frac{\sin6\eta u}{\mathrm{Cos}3\eta K'}$$
$$-2\eta q^4.\frac{\sin8\eta u}{\mathrm{Cos}4\eta K'}-\ldots,$$

$$8.\quad k'.\frac{\mathrm{cnc}\,u}{\mathrm{cn}\,u}=\eta\,\mathrm{tang}\,\eta u-2\eta q.\frac{\sin2\eta u}{\mathrm{Cos}\,\eta K'}+2\eta q^2.\frac{\sin4\eta u}{\mathrm{Cos}2\eta K'}-2\eta q^3.\frac{\sin6\eta u}{\mathrm{Cos}3\eta K'}$$
$$+2\eta q^4.\frac{\sin8\eta u}{\mathrm{Cos}4\eta K'}-+\ldots,$$

$$9.\quad \frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{snc}\,u}=\eta\,\mathrm{tang}\,\eta u+2\eta q.\frac{\sin2\eta u}{\mathrm{Sin}\,\eta K'}+2\eta q^2.\frac{\sin4\eta u}{\mathrm{Cos}2\eta K'}+2\eta q^3.\frac{\sin6\eta u}{\mathrm{Sin}3\eta K'}$$
$$+2\eta q^4.\frac{\sin8\eta u}{\mathrm{Cos}4\eta K'}+\ldots,$$

$$10.\quad \frac{\mathrm{snc}\,u}{\mathrm{sn}\,u}=\eta\,\cot\eta u+2\eta q.\frac{\sin2\eta u}{\mathrm{Sin}\,\eta K'}-2\eta q^2.\frac{\sin4\eta u}{\mathrm{Cos}2\eta K'}+2\eta q^3.\frac{\sin6\eta u}{\mathrm{Sin}3\eta K'}$$
$$-2\eta q^4.\frac{\sin8\eta u}{\mathrm{Cos}4\eta K'}+-\ldots,$$

$$11.\quad k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u=4\eta.\frac{\sin2\eta u}{\mathrm{Sin}2\eta K'}+4\eta.\frac{\sin6\eta u}{\mathrm{Sin}6\eta K'}+4\eta.\frac{\sin10\eta u}{\mathrm{Sin}10\eta K'}$$
$$+4\eta.\frac{\sin14\eta u}{\mathrm{Sin}14\eta K'}+\ldots,$$

$$12.\quad \frac{1}{\mathrm{sn}\,u\,.\,\mathrm{snc}\,u}=\frac{2\eta}{\sin2\eta u}+4\eta q^2.\frac{\sin2\eta u}{\mathrm{Sin}2\eta K'}+4\eta q^6.\frac{\sin6\eta u}{\mathrm{Sin}6\eta K'}+4\eta q^{10}.\frac{\sin10\eta u}{\mathrm{Sin}10\eta K'}+\ldots$$

§. 177.

Reihen für $\sqrt{\frac{1 \pm t}{1 \mp t}}$, wenn t eine von den Functionen snc$u$, cn$u$ und dn$u$ ist.

Nach §. 32. *a.* ist

$$\text{cnc}\tfrac{1}{2}u = \sqrt{\frac{\text{dn}\,u - \text{cn}\,u}{1 + \text{dn}\,u}} \quad \text{und} \quad \text{cn}\tfrac{1}{2}u = \sqrt{\frac{\text{dn}\,u + \text{cn}\,u}{1 + \text{dn}\,u}};$$

daher ist

$$\frac{\text{cnc}\frac{1}{2}u}{\text{cn}\frac{1}{2}u} = \sqrt{\frac{\text{dn}\,u - \text{cn}\,u}{\text{dn}\,u + \text{cn}\,u}} = \sqrt{\frac{1 - \text{snc}\,u}{1 + \text{snc}\,u}}.$$

Ferner ist $\text{sn}\frac{1}{2}u = \sqrt{\frac{1 - \text{cn}\,u}{1 + \text{dn}\,u}}$ und $\text{snc}\frac{1}{2}u = \sqrt{\frac{1 + \text{cn}\,u}{1 + \text{dn}\,u}}$, und hieraus folgt

$$\frac{\text{sn}\frac{1}{2}u}{\text{snc}\frac{1}{2}u} = \sqrt{\frac{1 - \text{cn}\,u}{1 + \text{cn}\,u}}.$$

Aus den Formeln $\text{sn}\frac{1}{2}u = \sqrt{\frac{1 - \text{cn}\,u}{1 + \text{dn}\,u}}$ und $k\,\text{snc}\frac{1}{2}u = \sqrt{\frac{1 - \text{dn}\,u}{1 - \text{cn}\,u}}$ setzen wir zusammen:

$$k\,\text{sn}\tfrac{1}{2}u \,.\, \text{snc}\tfrac{1}{2}u = \sqrt{\frac{1 - \text{dn}\,u}{1 + \text{dn}\,u}}.$$

Werden diese drei Formeln benutzt, und setzt man in den Reihen (1.) bis (6.) §. 176. noch $\frac{1}{2}u$ für u, so erhält man

$$1.\quad k'.\sqrt{\frac{1 + \text{snc}\,u}{1 - \text{snc}\,u}} = \frac{2\eta'}{\mathfrak{Sin}\,\eta' u} - 4\eta' p^2.\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta' K} - 4\eta' p^6.\frac{\mathfrak{Sin}\,3\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta' K} - 4\eta' p^{10}.\frac{\mathfrak{Sin}\,5\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,10\eta' K} - \ldots,$$

$$2.\quad k'.\sqrt{\frac{1 - \text{snc}\,u}{1 + \text{snc}\,u}} = 4\eta'.\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta' K} + 4\eta'.\frac{\mathfrak{Sin}\,3\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta' K} + 4\eta'.\frac{\mathfrak{Sin}\,5\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,10\eta' K} + 4\eta'.\frac{\mathfrak{Sin}\,7\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,14\eta' K} + \ldots,$$

$$3.\quad \sqrt{\frac{1 - \text{cn}\,u}{1 + \text{cn}\,u}} = \eta'.\mathfrak{Tang}\frac{\eta' u}{2} + 2\eta' p.\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,\eta' K} + 2\eta' p^2.\frac{\mathfrak{Sin}\,2\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta' K} + 2\eta' p^3.\frac{\mathfrak{Sin}\,3\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,3\eta' K} + 2\eta' p^4.\frac{\mathfrak{Sin}\,4\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta' K} + \ldots,$$

$$4.\quad \sqrt{\frac{1 + \text{cn}\,u}{1 - \text{cn}\,u}} = \eta'.\,\mathfrak{Cot}\frac{\eta' u}{2} - 2\eta' p.\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,\eta' K} + 2\eta' p^2.\frac{\mathfrak{Sin}\,2\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta' K} - 2\eta' p^3.\frac{\mathfrak{Sin}\,3\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,3\eta' K} + 2\eta' p^4.\frac{\mathfrak{Sin}\,4\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta' K} - + \ldots,$$

$$5.\quad k.\sqrt{\frac{1 - \text{dn}\,u}{1 + \text{dn}\,u}} = \eta'.\mathfrak{Tang}\frac{\eta' u}{2} - 2\eta' p.\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,\eta' K} + 2\eta' p^2.\frac{\mathfrak{Sin}\,2\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta' K} - 2\eta' p^3.\frac{\mathfrak{Sin}\,3\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta' K} + 2\eta' p^4.\frac{\mathfrak{Sin}\,4\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta' K} - + \ldots,$$

$$6.\quad k.\sqrt{\frac{1 + \text{dn}\,u}{1 - \text{dn}\,u}} = \eta'.\,\mathfrak{Cot}\frac{\eta' u}{2} + 2\eta' p.\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,\eta' K} + 2\eta' p^2.\frac{\mathfrak{Sin}\,2\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta' K} + 2\eta' p^3.\frac{\mathfrak{Sin}\,3\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta' K} + 2\eta' p^4.\frac{\mathfrak{Sin}\,4\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta' K} + \ldots$$

Auf gleiche Weise erhält man aus (7.) bis (12.) §. 176. die Reihen

$$7.\quad k'.\sqrt{\frac{1+\operatorname{snc}u}{1-\operatorname{snc}u}} = \eta\,\cot\frac{\eta u}{2} - 2\eta q.\frac{\sin\eta u}{\mathfrak{Cos}\,\eta K'} - 2\eta q^2.\frac{\sin 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta K'} - 2\eta q^3.\frac{\sin 3\eta u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta K'} - 2\eta q^4.\frac{\sin 4\eta u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta K'} - \ldots,$$

$$8.\quad k'.\sqrt{\frac{1-\operatorname{snc}u}{1+\operatorname{snc}u}} = \eta\,\mathrm{tang}\frac{\eta u}{2} - 2\eta q.\frac{\sin\eta u}{\mathfrak{Cos}\,\eta K'} + 2\eta q^2.\frac{\sin 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta K'} - 2\eta q^3.\frac{\sin 3\eta u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta K'} + 2\eta q^4.\frac{\sin 4\eta u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta K'} - + \ldots,$$

$$9.\quad \sqrt{\frac{1-\operatorname{cn}u}{1+\operatorname{cn}u}} = \eta\,\mathrm{tang}\frac{\eta u}{2} + 2\eta q.\frac{\sin\eta u}{\mathfrak{Sin}\,\eta K'} + 2\eta q^2.\frac{\sin 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta K'} + 2\eta q^3.\frac{\sin 3\eta u}{\mathfrak{Sin}\,3\eta K'} + 2\eta q^4.\frac{\sin 4\eta u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta K'} + \ldots,$$

$$10.\quad \sqrt{\frac{1+\operatorname{cn}u}{1-\operatorname{cn}u}} = \eta\,\cot\frac{\eta u}{2} + 2\eta q.\frac{\sin\eta u}{\mathfrak{Sin}\,\eta K'} - 2\eta q^2.\frac{\sin 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta K'} + 2\eta q^3.\frac{\sin 3\eta u}{\mathfrak{Sin}\,3\eta K'} - 2\eta q^4.\frac{\sin 4\eta u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta K'} + - \ldots,$$

$$11.\quad k.\sqrt{\frac{1-\operatorname{dn}u}{1+\operatorname{dn}u}} = 4\eta.\frac{\sin\eta u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta K'} + 4\eta.\frac{\sin 3\eta u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta K'} + 4\eta.\frac{\sin 5\eta u}{\mathfrak{Sin}\,10\eta K'} + 4\eta.\frac{\sin 7\eta u}{\mathfrak{Sin}\,14\eta K'} + \ldots,$$

$$12.\quad k.\sqrt{\frac{1+\operatorname{dn}u}{1-\operatorname{dn}u}} = \frac{2\eta}{\sin\eta u} + 4\eta q^2.\frac{\sin\eta u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta K'} + 4\eta q^6.\frac{\sin 3\eta u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta K'} + 4\eta q^{10}.\frac{\sin 5\eta u}{\mathfrak{Sin}\,10\eta K'} + \ldots$$

Es ist nicht zu übersehen, dafs

$$\sqrt{\frac{1+\operatorname{sn}u}{1-\operatorname{sn}u}} = \mathrm{tang}(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\operatorname{am}u), \qquad \sqrt{\frac{1+\operatorname{snc}u}{1-\operatorname{snc}u}} = \mathrm{tang}(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\operatorname{amc}u),$$

$$\sqrt{\frac{1-\operatorname{sn}u}{1+\operatorname{sn}u}} = \mathrm{tang}(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\operatorname{am}u), \qquad \sqrt{\frac{1-\operatorname{snc}u}{1+\operatorname{snc}u}} = \mathrm{tang}(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\operatorname{amc}u),$$

$$\sqrt{\frac{1+\operatorname{cn}u}{1-\operatorname{cn}u}} = \mathrm{cotang}\,\tfrac{1}{2}\operatorname{am}u, \qquad \sqrt{\frac{1+\operatorname{cnc}u}{1-\operatorname{cnc}u}} = \cot\tfrac{1}{2}\operatorname{amc}u,$$

$$\sqrt{\frac{1-\operatorname{cn}u}{1+\operatorname{cn}u}} = \mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\operatorname{am}u, \qquad \sqrt{\frac{1-\operatorname{cnc}u}{1+\operatorname{cnc}u}} = \mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\operatorname{amc}u,$$

$$\sqrt{\frac{1+\operatorname{dn}u}{1-\operatorname{dn}u}} = \cot\tfrac{1}{2}\operatorname{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right), \qquad \sqrt{\frac{1+\operatorname{dnc}u}{1-\operatorname{dnc}u}} = \cot\tfrac{1}{2}\operatorname{am}\left(k(K-u), \frac{1}{k}\right),$$

$$\sqrt{\frac{1-\operatorname{dn}u}{1+\operatorname{dn}u}} = \mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\operatorname{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right), \qquad \sqrt{\frac{1-\operatorname{dnc}u}{1+\operatorname{dnc}u}} = \mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\operatorname{am}\left(k(K-u), \frac{1}{k}\right)$$

und dafs also die vorstehenden zwölf Reihen auch zur bequemen Berechnung der Amplituden dienen. Die hier noch fehlenden Reihen finden sich in §. 180., und in Beziehung auf sie fügen wir noch die Formeln

$$\sqrt{\frac{1+k\operatorname{sn}u}{1-k\operatorname{sn}u}} = \mathrm{tang}\left(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\operatorname{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right)\right),$$

$$\sqrt{\frac{1-k\,\mathrm{sn}\,u}{1+k\,\mathrm{sn}\,u}} = \mathrm{tang}\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\mathrm{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right)\right),$$
$$\sqrt{\frac{1+k\,\mathrm{snc}\,u}{1-k\,\mathrm{snc}\,u}} = \mathrm{tang}\left(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\mathrm{am}\left(k(K-u), \frac{1}{k}\right)\right),$$
$$\sqrt{\frac{1-k\,\mathrm{snc}\,u}{1+k\,\mathrm{snc}\,u}} = \mathrm{tang}\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\mathrm{am}\left(k(K-u), \frac{1}{k}\right)\right)$$

hinzu.

§. 178.

Entwickelung der Modular-Functionen der Argumente u und $K-u$ in Reihen, welche nach Potenzial-Functionen der Vielfachen von ηu und $\eta' u$ fortschreiten.

Es ist

$$\tfrac{1}{2}k'\sqrt{\frac{1+\mathrm{snc}\,u}{1-\mathrm{snc}\,u}} + \tfrac{1}{2}k'\sqrt{\frac{1-\mathrm{snc}\,u}{1+\mathrm{snc}\,u}} = \frac{k'}{\mathrm{cnc}\,u} \text{ und}$$
$$\tfrac{1}{2}k'\sqrt{\frac{1+\mathrm{snc}\,u}{1-\mathrm{snc}\,u}} - \tfrac{1}{2}k'\sqrt{\frac{1-\mathrm{snc}\,u}{1+\mathrm{snc}\,u}} = k'\,\mathrm{tnc}\,u = \frac{1}{\mathrm{tn}\,u};$$

$\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\mathrm{cn}\,u}{1-\mathrm{cn}\,u}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{1-\mathrm{cn}\,u}{1+\mathrm{cn}\,u}} = \frac{1}{\mathrm{sn}\,u}$ und $\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\mathrm{cn}\,u}{1-\mathrm{cn}\,u}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{1-\mathrm{cn}\,u}{1+\mathrm{cn}\,u}} = \frac{1}{\mathrm{tn}\,u}$; ferner

$\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\mathrm{dn}\,u}{1-\mathrm{dn}\,u}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{1-\mathrm{dn}\,u}{1+\mathrm{dn}\,u}} = \frac{1}{k\,\mathrm{sn}\,u}$ und

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\mathrm{dn}\,u}{1-\mathrm{dn}\,u}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{1-\mathrm{dn}\,u}{1+\mathrm{dn}\,u}} = \frac{\mathrm{dn}\,u}{k\,\mathrm{sn}\,u} = \frac{k'}{k}\cdot\frac{1}{\mathrm{cnc}\,u}.$$

Diesen Formeln gemäfs lassen sich die Reihen (1.) bis (6.) §. 177. auch wie folgt darstellen:

$$\frac{k'}{\mathrm{cnc}\,u} + \frac{1}{\mathrm{tn}\,u} = \frac{2\eta'}{\mathfrak{Sin}\,\eta' u} - \frac{8\eta' p^4\,\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{1-p^4} - \frac{8\eta' p^{12}\,\mathfrak{Sin}\,3\eta' u}{1-p^{12}} - \frac{8\eta' p^{20}\,\mathfrak{Sin}\,5\eta' u}{1-p^{20}} - \ldots,$$
$$\frac{k'}{\mathrm{cnc}\,u} - \frac{1}{\mathrm{tn}\,u} = \frac{8\eta' p^2\,\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{1-p^4} + \frac{8\eta' p^6\,\mathfrak{Sin}\,3\eta' u}{1-p^{12}} + \frac{8\eta' p^{10}\,\mathfrak{Sin}\,5\eta' u}{1-p^{20}} + \ldots,$$

woraus man durch Addition und Subtraction erhält:

$$1.\quad \frac{k'}{\mathrm{cnc}\,u} = \frac{\eta'}{\mathfrak{Sin}\,\eta' u} + \frac{4\eta' p^2}{1+p^2}\mathfrak{Sin}\,\eta' u + \frac{4\eta' p^6}{1+p^6}\mathfrak{Sin}\,3\eta' u + \frac{4\eta' p^{10}}{1+p^{10}}\mathfrak{Sin}\,5\eta' u + \ldots,$$
$$2.\quad \frac{1}{\mathrm{tn}\,u} = \frac{\eta'}{\mathfrak{Sin}\,\eta' u} - \frac{4\eta' p^2}{1-p^2}\mathfrak{Sin}\,\eta' u - \frac{4\eta' p^6}{1-p^6}\mathfrak{Sin}\,3\eta' u - \frac{4\eta' p^{10}}{1-p^{10}}\mathfrak{Sin}\,5\eta' u - \ldots.$$

Ferner geben die Reihen

$$\frac{1}{\mathrm{sn}\,u} + \frac{1}{\mathrm{tn}\,u} = \eta'\,\mathfrak{Cot}\frac{\eta' u}{2} - \frac{4\eta' p^2}{1-p^2}\mathfrak{Sin}\,\eta' u + \frac{4\eta' p^4}{1+p^4}\mathfrak{Sin}\,2\eta' u - \frac{4\eta' p^6}{1-p^6}\mathfrak{Sin}\,3\eta' u + \frac{4\eta' p^8}{1+p^8}\mathfrak{Sin}\,4\eta' u - + \ldots,$$
$$\frac{1}{\mathrm{sn}\,u} - \frac{1}{\mathrm{tn}\,u} = \eta'\,\mathfrak{Tang}\frac{\eta' u}{2} + \frac{4\eta' p^2}{1-p^2}\mathfrak{Sin}\,\eta' u + \frac{4\eta' p^4}{1+p^4}\mathfrak{Sin}\,2\eta' u + \frac{4\eta' p^6}{1-p^6}\mathfrak{Sin}\,3\eta' u + \frac{4\eta' p^8}{1+p^8}\mathfrak{Sin}\,4\eta' u + \ldots.$$

durch Addition

3. $$\frac{1}{\operatorname{sn} u} = \frac{\eta'}{\mathfrak{Tang}\,\eta' u} + \frac{4\eta' p^4}{1+p^4}\,\mathfrak{Sin}\,2\eta' u + \frac{4\eta' p^8}{1+p^8}\,\mathfrak{Sin}\,4\eta' u + \frac{4\eta' p^{12}}{1+p^{12}}\,\mathfrak{Sin}\,6\eta' u + \ldots.$$

Durch Subtraction erhält man dieselbe Reihe für $\frac{1}{\operatorname{tn} u}$, wie vorhin.

Setzt man in den gefundenen Reihen $u + iK'$ statt u, so verwandelt sich $\frac{k'}{\operatorname{cnc} u} = \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u}$ in $\frac{k \operatorname{cn} u}{i}$, $\frac{1}{\operatorname{tn} u}$ in $\frac{\operatorname{dn} u}{i}$ und $\frac{1}{\operatorname{sn} u}$ in $k \operatorname{sn} u$; daher haben wir noch, weil sich $\eta' u$ in $\eta' u + \frac{1}{2}\pi i$ verwandelt, die drei Reihen

4. $$k \operatorname{cn} u = \frac{\eta'}{\mathfrak{Cos}\,\eta' u} - \frac{4\eta' p^2}{1+p^2}\,\mathfrak{Cos}\,\eta' u + \frac{4\eta' p^6}{1+p^6}\,\mathfrak{Cos}\,3\eta' u - \frac{4\eta' p^{10}}{1+p^{10}}\,\mathfrak{Cos}\,5\eta' u + - \ldots,$$

5. $$\operatorname{dn} u = \frac{\eta'}{\mathfrak{Cos}\,\eta' u} + \frac{4\eta' p^2}{1-p^2}\,\mathfrak{Cos}\,\eta' u - \frac{4\eta' p^6}{1-p^6}\,\mathfrak{Cos}\,3\eta' u + \frac{4\eta' p^{10}}{1-p^{10}}\,\mathfrak{Cos}\,5\eta' u - + \ldots,$$

6. $$k \operatorname{sn} u = \eta'\,\mathfrak{Tang}\,\eta' u - \frac{4\eta' p^4}{1+p^4}\,\mathfrak{Sin}\,2\eta' u + \frac{4\eta' p^8}{1+p^8}\,\mathfrak{Sin}\,4\eta' u - \frac{4\eta' p^{12}}{1+p^{12}}\,\mathfrak{Sin}\,6\eta' u + - \ldots$$

Setzt man wieder $e^{\eta' u} = x$, so kann die erste Reihe auch also dargestellt werden:

$$\frac{k'}{\operatorname{cnc} u} = \frac{2\eta'}{x - x^{-1}} + \frac{2\eta' p^2}{1+p^2}(x - x^{-1}) + \frac{2\eta' p^6}{1+p^6}(x^3 - x^{-3}) + \frac{2\eta' p^{10}}{1+p^{10}}(x^5 - x^{-5}) \ldots,$$

und da x in $\frac{1}{px}$ übergeht, wenn $K - u$ für u gesetzt wird, so hat man

$$\frac{k'}{\operatorname{cn} u} = \frac{2\eta' p x}{1 - p^2 x^2} + \frac{2\eta' p}{1+p^2} x^{-1} + \frac{2\eta' p^3}{1+p^6} x^{-3} + \frac{2\eta' p^5 x^{-5}}{1+p^{10}} + \ldots$$
$$- \frac{2\eta' p^3}{1+p^2} x - \frac{2\eta' p^9}{1+p^6} x^3 - \frac{2\eta' p^{15} x^5}{1+p^{10}} - \ldots.$$

Substituirt man die Reihe

$$\frac{2\eta' p x}{1 - p^2 x^2} = 2\eta' p x + 2\eta' p^3 x^3 + 2\eta' p^5 x^5 + 2\eta' p^7 x^7 + \ldots,$$

und bedenkt, dafs

$$2\eta' p x - \frac{2\eta' p^3 x}{1+p^2} = \frac{2\eta' p x}{1+p^2}, \quad 2\eta' p^3 x^3 - \frac{2\eta' p^9 x^3}{1+p^6} = \frac{2\eta' p^3 x^3}{1+p^6},$$
$$2\eta' p^5 x^5 - \frac{2\eta' p^{15} x^5}{1+p^{10}} = \frac{2\eta' p^5 x^5}{1+p^{10}}, \text{ u. s. w.}$$

ist, so hat man

7. $$\frac{k'}{\operatorname{cn} u} = \frac{4\eta' p}{1+p^2}\,\mathfrak{Cos}\,\eta' u + \frac{4\eta' p^3}{1+p^6}\,\mathfrak{Cos}\,3\eta' u + \frac{4\eta' p^5}{1+p^{10}}\,\mathfrak{Cos}\,5\eta' u + \frac{4\eta' p^7}{1+p^{14}}\,\mathfrak{Cos}\,7\eta' u + \ldots.$$

Ganz eben so verwandeln sich die Reihen (2.) und (3.) in

8. $$\frac{1}{\operatorname{tnc} u} = \frac{4\eta' p}{1-p^2}\,\mathfrak{Sin}\,\eta' u + \frac{4\eta' p^3}{1-p^6}\,\mathfrak{Sin}\,3\eta' u + \frac{4\eta' p^5}{1-p^{10}}\,\mathfrak{Sin}\,5\eta' u + \frac{4\eta' p^7}{1-p^{14}}\,\mathfrak{Sin}\,7\eta' u + \ldots,$$

9. $$\frac{1}{\operatorname{snc} u} = \eta' + \frac{4\eta' p^2}{1+p^4}\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u + \frac{4\eta' p^4}{1+p^8}\,\mathfrak{Cos}\,4\eta' u + \frac{4\eta' p^6}{1+p^{12}}\,\mathfrak{Cos}\,6\eta' u + \ldots;$$

und substituirt man noch $u+iK'$ für u, also $\eta' u+\frac{1}{2}\pi i$ für $\eta' u$, so verwandeln sich diese drei Reihen in

$$10.\quad k\,\mathrm{cnc}\,u=\frac{4\eta' p}{1+p^2}\,\mathrm{Sin}\,\eta' u-\frac{4\eta' p^3}{1+p^6}\,\mathrm{Sin}\,3\eta' u+\frac{4\eta' p^5}{1+p^{10}}\,\mathrm{Sin}\,5\eta' u-\frac{4\eta' p^7}{1+p^{14}}\,\mathrm{Sin}\,7\eta' u+-\ldots,$$

$$11.\quad \mathrm{dnc}\,u=\frac{4\eta' p}{1-p^2}\,\mathrm{Cos}\,\eta' u-\frac{4\eta' p^3}{1-p^6}\,\mathrm{Cos}\,3\eta' u+\frac{4\eta' p^5}{1-p^{10}}\,\mathrm{Cos}\,5\eta' u-\frac{4\eta' p^7}{1-p^{14}}\,\mathrm{Cos}\,7\eta' u+-\ldots,$$

$$12.\quad k\,\mathrm{snc}\,u=\eta'-\frac{4\eta' p^2}{1+p^4}\,\mathrm{Cos}\,2\eta' u+\frac{4\eta' p^4}{1+p^8}\,\mathrm{Cos}\,4\eta' u-\frac{4\eta' p^6}{1+p^{12}}\,\mathrm{Cos}\,6\eta' u+\frac{4\eta' p^8}{1+p^{16}}\,\mathrm{Cos}\,8\eta' u-+\ldots.$$

Vertauscht man in den vorstehenden Reihen die beiden conjugirten Moduln, also auch p und q, η und η', indem man zugleich ui statt u setzt, so erhält man Reihen für die cyklischen Modular-Functionen des Argumentes u, welche nach cyklischen Potenzial-Functionen der Vielfachen von ηu fortschreiten.

§. 179.

Uebersichtliche Zusammenstellung der einfachsten Reihen für die cyklischen Modular-Functionen.

Die vorhin entwickelten Formeln geben folgende übersichtliche Zusammenstellung:

$$1.\quad k\,\mathrm{sn}\,u=\frac{2\eta\sin\eta u}{\mathrm{Sin}\,\eta K'}+\frac{2\eta\sin 3\eta u}{\mathrm{Sin}\,3\eta K'}+\frac{2\eta\sin 5\eta u}{\mathrm{Sin}\,5\eta K'}+\frac{2\eta\sin 7\eta u}{\mathrm{Sin}\,7\eta K'}+\ldots,$$

$$2.\quad k\,\mathrm{snc}\,u=\frac{2\eta\cos\eta u}{\mathrm{Sin}\,\eta K'}-\frac{2\eta\cos 3\eta u}{\mathrm{Sin}\,3\eta K'}+\frac{2\eta\cos 5\eta u}{\mathrm{Sin}\,5\eta K'}-\frac{2\eta\cos 7\eta u}{\mathrm{Sin}\,7\eta K'}+-\ldots,$$

$$3.\quad k\,\mathrm{sn}\,u=\eta'\,\mathrm{Tang}\,\eta' u-2\eta' p^2.\frac{\mathrm{Sin}\,2\eta' u}{\mathrm{Cos}\,2\eta' K}+2\eta' p^4.\frac{\mathrm{Sin}\,4\eta u}{\mathrm{Cos}\,4\eta K'}-2\eta' p^6.\frac{\mathrm{Sin}\,6\eta' u}{\mathrm{Cos}\,6\eta' K}+-\ldots,$$

$$4.\quad k\,\mathrm{snc}\,u=\eta'-\frac{2\eta'\,\mathrm{Cos}\,2\eta' u}{\mathrm{Cos}\,2\eta' K}+\frac{2\eta'\,\mathrm{Cos}\,4\eta' u}{\mathrm{Cos}\,4\eta' K}-\frac{2\eta'\,\mathrm{Cos}\,6\eta' u}{\mathrm{Cos}\,6\eta' K}+\frac{2\eta'\,\mathrm{Cos}\,8\eta' u}{\mathrm{Cos}\,8\eta' K}-+\ldots,$$

$$5.\quad \frac{1}{\mathrm{sn}\,u}=\frac{\eta}{\sin\eta u}+2\eta q.\frac{\sin\eta u}{\mathrm{Sin}\,\eta K'}+2\eta q^3.\frac{\sin 3\eta u}{\mathrm{Sin}\,3\eta K'}+2\eta q^5.\frac{\sin 5\eta u}{\mathrm{Sin}\,5\eta K'}+\ldots,$$

$$6.\quad \frac{1}{\mathrm{snc}\,u}=\frac{\eta}{\cos\eta u}+2\eta q.\frac{\cos\eta u}{\mathrm{Sin}\,\eta K'}-2\eta q^3.\frac{\cos 3\eta u}{\mathrm{Sin}\,3\eta K'}+2\eta q^5.\frac{\cos 5\eta u}{\mathrm{Sin}\,5\eta K'}-+\ldots,$$

$$7.\quad \frac{1}{\mathrm{sn}\,u}=\frac{\eta'}{\mathrm{Tang}\,\eta' u}+2\eta' p^2.\frac{\mathrm{Sin}\,2\eta' u}{\mathrm{Cos}\,2\eta' K}+2\eta' p^4.\frac{\mathrm{Sin}\,4\eta' u}{\mathrm{Cos}\,4\eta' K}+2\eta' p^6.\frac{\mathrm{Sin}\,6\eta' u}{\mathrm{Cos}\,6\eta' K}+\ldots,$$

$$8.\quad \frac{1}{\mathrm{snc}\,u}=\eta'+\frac{2\eta'\,\mathrm{Cos}\,2\eta' u}{\mathrm{Cos}\,2\eta' K}+\frac{2\eta'\,\mathrm{Cos}\,4\eta' u}{\mathrm{Cos}\,4\eta' K}+\frac{2\eta'\,\mathrm{Cos}\,6\eta' u}{\mathrm{Cos}\,6\eta' K}+\ldots,$$

$$9.\quad k\,\mathrm{cn}\,u = \frac{2\eta\cos\eta u}{\mathfrak{Cos}\,\eta K'} + \frac{2\eta\cos 3\eta u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta K'} + \frac{2\eta\cos 5\eta u}{\mathfrak{Cos}\,5\eta K'} + \frac{2\eta\cos 7\eta u}{\mathfrak{Cos}\,7\eta K'} + \ldots,$$

$$10.\quad k\,\mathrm{cnc}\,u = \frac{2\eta\sin\eta u}{\mathfrak{Cos}\,\eta K'} - \frac{2\eta\sin 3\eta u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta K'} + \frac{2\eta\sin 5\eta u}{\mathfrak{Cos}\,5\eta K'} - \frac{2\eta\sin 7\eta u}{\mathfrak{Cos}\,7\eta K'} + - \ldots,$$

$$11.\quad k\,\mathrm{cn}\,u = \frac{\eta'}{\mathfrak{Cos}\,\eta' u} - 2\eta' p\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,\eta' K} + 2\eta' p^3\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,3\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta' K} - 2\eta' p^5\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,5\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,5\eta' K} + - \ldots,$$

$$12.\quad k\,\mathrm{cnc}\,u = \frac{2\eta'\,\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,\eta' K} - \frac{2\eta'\,\mathfrak{Sin}\,3\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta' K} + \frac{2\eta'\,\mathfrak{Sin}\,5\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,5\eta' K} - \frac{2\eta'\,\mathfrak{Sin}\,7\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,7\eta' K} + - \ldots,$$

$$13.\quad \frac{k'}{\mathrm{cn}\,u} = \frac{\eta}{\cos\eta u} - 2\eta q\cdot\frac{\cos\eta u}{\mathfrak{Cos}\,\eta K'} + 2\eta q^3\cdot\frac{\cos 3\eta u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta K'} - 2\eta q^5\cdot\frac{\cos 5\eta u}{\mathfrak{Cos}\,5\eta K'} + - \ldots,$$

$$14.\quad \frac{k'}{\mathrm{cnc}\,u} = \frac{\eta}{\sin\eta u} - 2\eta q\cdot\frac{\sin\eta u}{\mathfrak{Cos}\,\eta K'} - 2\eta q^3\cdot\frac{\sin 3\eta u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta K'} - 2\eta q^5\cdot\frac{\sin 5\eta u}{\mathfrak{Cos}\,5\eta K'} - \ldots,$$

$$15.\quad \frac{k'}{\mathrm{cn}\,u} = \frac{2\eta'\,\mathfrak{Cos}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,\eta' K} + \frac{2\eta'\,\mathfrak{Cos}\,3\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta' K} + \frac{2\eta'\,\mathfrak{Cos}\,5\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,5\eta' K} + \frac{2\eta'\,\mathfrak{Cos}\,7\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,7\eta' K} + \ldots,$$

$$16.\quad \frac{k'}{\mathrm{cnc}\,u} = \frac{\eta'}{\mathfrak{Sin}\,\eta' u} + 2\eta' p\cdot\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,\eta' K} + 2\eta' p^3\cdot\frac{\mathfrak{Sin}\,3\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta' K} + 2\eta' p^5\cdot\frac{\mathfrak{Sin}\,5\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,5\eta' K} + \ldots,$$

$$17.\quad \mathrm{dn}\,u = \eta + \frac{2\eta\cos 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta K'} + \frac{2\eta\cos 4\eta u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta K'} + \frac{2\eta\cos 6\eta u}{\mathfrak{Cos}\,6\eta K'} + \frac{2\eta\cos 8\eta u}{\mathfrak{Cos}\,8\eta K'} + \ldots,$$

$$18.\quad \mathrm{dnc}\,u = \eta - \frac{2\eta\cos 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta K'} + \frac{2\eta\cos 4\eta u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta K'} - \frac{2\eta\cos 6\eta u}{\mathfrak{Cos}\,6\eta K'} + \frac{2\eta\cos 8\eta u}{\mathfrak{Cos}\,8\eta K'} - + \ldots,$$

$$19.\quad \mathrm{dn}\,u = \frac{\eta'}{\mathfrak{Cos}\,\eta' u} + 2\eta' p\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,\eta' K} - 2\eta' p^3\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,3\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,3\eta' K} + 2\eta' p^5\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,5\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,5\eta' K} + \ldots,$$

$$20.\quad \mathrm{dnc}\,u = \frac{2\eta'\,\mathfrak{Cos}\,\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,\eta' K} - \frac{2\eta'\,\mathfrak{Cos}\,3\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,3\eta' K} + \frac{2\eta'\,\mathfrak{Cos}\,5\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,5\eta' K} - \frac{2\eta'\,\mathfrak{Cos}\,7\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,7\eta' K} + - \ldots,$$

$$21.\quad k'.\mathrm{tn}\,u = \eta\,\mathrm{tang}\,\eta u - 2\eta q^2\cdot\frac{\sin 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta K'} + 2\eta q^4\cdot\frac{\sin 4\eta u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta K'} - 2\eta q^6\cdot\frac{\sin 6\eta u}{\mathfrak{Cos}\,6\eta K'} + 2\eta q^8\cdot\frac{\sin 8\eta u}{\mathfrak{Cos}\,8\eta K'} - + \ldots,$$

$$22.\quad k'.\mathrm{tnc}\,u = \eta\cot\eta u - 2\eta q^2\cdot\frac{\sin 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta K'} - 2\eta q^4\cdot\frac{\sin 4\eta u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta K'} - 2\eta q^6\cdot\frac{\sin 6\eta u}{\mathfrak{Cos}\,6\eta K'} - 2\eta q^8\cdot\frac{\sin 8\eta u}{\mathfrak{Cos}\,8\eta K'} - \ldots,$$

$$23.\quad k'.\mathrm{tn}\,u = \frac{2\eta'\,\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,\eta' K} + \frac{2\eta'\,\mathfrak{Sin}\,3\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,3\eta' K} + \frac{2\eta'\,\mathfrak{Sin}\,5\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,5\eta' K} + \frac{2\eta'\,\mathfrak{Sin}\,7\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,7\eta' K} + \ldots,$$

$$24.\quad k'.\mathrm{tnc}\,u = \frac{\eta'}{\mathfrak{Sin}\,\eta' u} - 2\eta' p\cdot\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,\eta' K} - 2\eta' p^3\cdot\frac{\mathfrak{Sin}\,3\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,3\eta' K} - 2\eta' p^5\cdot\frac{\mathfrak{Sin}\,5\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,5\eta' K} - \ldots.$$

Zusatz. Aus den vorstehenden Reihen erhält man, wenn wieder $\frac{1}{2}\pi\cdot\frac{K'}{K} = v$ gesetzt wird, für $u = 0$ und $u = K$ die folgenden particulären Reihen:

$$25.\quad K = \tfrac{1}{2}\pi\left(1 + \frac{2}{\mathfrak{Cos}\,2v} + \frac{2}{\mathfrak{Cos}\,4v} + \frac{2}{\mathfrak{Cos}\,6v} + \frac{2}{\mathfrak{Cos}\,8v} + \ldots\right),$$

$$26. \quad K' = v\left(1+\frac{2}{\mathfrak{Cos}\,2v}+\frac{2}{\mathfrak{Cos}\,4v}+\frac{2}{\mathfrak{Cos}\,6v}+\frac{2}{\mathfrak{Cos}\,8v}+\dots\right),$$

$$27. \quad k.K = \tfrac{1}{2}\pi\left(\frac{2}{\mathfrak{Sin}\,v}-\frac{2}{\mathfrak{Sin}\,3v}+\frac{2}{\mathfrak{Sin}\,5v}-\frac{2}{\mathfrak{Sin}\,7v}+-\dots\right),$$

$$28. \quad k.K = \tfrac{1}{2}\pi\left(\frac{2}{\mathfrak{Cos}\,v}+\frac{2}{\mathfrak{Cos}\,3v}+\frac{2}{\mathfrak{Cos}\,5v}+\frac{2}{\mathfrak{Cos}\,7v}+\dots\right),$$

$$29. \quad k'.K = \tfrac{1}{2}\pi\left(1-\frac{2}{\mathfrak{Cos}\,2v}+\frac{2}{\mathfrak{Cos}\,4v}-\frac{2}{\mathfrak{Cos}\,6v}+\frac{2}{\mathfrak{Cos}\,8v}-+\dots\right),$$

$$30. \quad K = \tfrac{1}{2}\pi\left(1+\frac{2e^{-v}}{\mathfrak{Sin}\,v}-\frac{2e^{-3v}}{\mathfrak{Sin}\,3v}+\frac{2e^{-5v}}{\mathfrak{Sin}\,5v}-\frac{2e^{-7v}}{\mathfrak{Sin}\,7v}+-\dots\right),$$

$$31. \quad K' = v\left(1+\frac{2e^{-v}}{\mathfrak{Sin}\,v}-\frac{2e^{-3v}}{\mathfrak{Sin}\,3v}+\frac{2e^{-5v}}{\mathfrak{Sin}\,5v}-\frac{2e^{-7v}}{\mathfrak{Sin}\,7v}+-\dots\right),$$

$$32. \quad k'.K = \tfrac{1}{2}\pi\left(1-\frac{2e^{-v}}{\mathfrak{Cos}\,v}+\frac{2e^{-3v}}{\mathfrak{Cos}\,3v}-\frac{2e^{-5v}}{\mathfrak{Cos}\,5v}+\frac{2e^{-7v}}{\mathfrak{Cos}\,7v}-+\dots\right).$$

§. 180.

Reihen für $\sqrt{\frac{1\pm t}{1\mp t}}$, wenn t eine von den Modular-Functionen $\mathrm{sn}\,u$, $k\,\mathrm{sn}\,u$, $k\,\mathrm{snc}\,u$, $\mathrm{cnc}\,u$ und $\mathrm{dnc}\,u$ ist.

Es ist

$$k'.\sqrt{\frac{1+\mathrm{sn}\,u}{1-\mathrm{sn}\,u}} = \frac{k'}{\mathrm{cn}\,u}+k'\,\mathrm{tn}\,u \quad \text{und} \quad k'.\sqrt{\frac{1-\mathrm{sn}\,u}{1+\mathrm{sn}\,u}} = \frac{k'}{\mathrm{cn}\,u}-k'\,\mathrm{tn}\,u,$$

$$k'.\sqrt{\frac{1+k\,\mathrm{sn}\,u}{1-k\,\mathrm{sn}\,u}} = \mathrm{dnc}\,u+k\,\mathrm{cnc}\,u \quad \text{und} \quad k'.\sqrt{\frac{1-k\,\mathrm{sn}\,u}{1+k\,\mathrm{sn}\,u}} = \mathrm{dnc}\,u-k\,\mathrm{cnc}\,u,$$

$$k'.\sqrt{\frac{1+k\,\mathrm{snc}\,u}{1-k\,\mathrm{snc}\,u}} = \mathrm{dn}\,u+k\,\mathrm{cn}\,u \quad \text{und} \quad k'.\sqrt{\frac{1-k\,\mathrm{snc}\,u}{1+k\,\mathrm{snc}\,u}} = \mathrm{dn}\,u-k\,\mathrm{cn}\,u,$$

$$\sqrt{\frac{1+\mathrm{cnc}\,u}{1-\mathrm{cnc}\,u}} = \frac{1}{\mathrm{snc}\,u}+k'\,\mathrm{tn}\,u \quad \text{und} \quad \sqrt{\frac{1-\mathrm{cnc}\,u}{1+\mathrm{cnc}\,u}} = \frac{1}{\mathrm{snc}\,u}-k'\,\mathrm{tn}\,u,$$

$$k.\sqrt{\frac{1+\mathrm{dnc}\,u}{1-\mathrm{dnc}\,u}} = \frac{1}{\mathrm{snc}\,u}+\frac{k'}{\mathrm{cn}\,u} \quad \text{und} \quad k.\sqrt{\frac{1-\mathrm{dnc}\,u}{1+\mathrm{dnc}\,u}} = \frac{1}{\mathrm{snc}\,u}-\frac{k'}{\mathrm{cn}\,u}.$$

Daher erhält man die gesuchten Reihen leicht durch eine Zusammensetzung aus den vorigen Reihen, nämlich:

$$1. \quad k'.\sqrt{\frac{1+\mathrm{sn}\,u}{1-\mathrm{sn}\,u}} = \frac{4\eta'\,\mathfrak{Sin}\,\eta'(K+u)}{\mathfrak{Sin}\,2\eta'K}+\frac{4\eta'\,\mathfrak{Sin}\,3\eta'(K+u)}{\mathfrak{Sin}\,6\eta'K}+\frac{4\eta'\,\mathfrak{Sin}\,5\eta'(K+u)}{\mathfrak{Sin}\,10\eta'K}+\frac{4\eta'\,\mathfrak{Sin}\,7\eta'(K+u)}{\mathfrak{Sin}\,14\eta'K}+\dots,$$

$$2. \quad k'.\sqrt{\frac{1-\mathrm{sn}\,u}{1+\mathrm{sn}\,u}} = \frac{4\eta'\,\mathfrak{Sin}\,\eta'(K-u)}{\mathfrak{Sin}\,2\eta'K}+\frac{4\eta'\,\mathfrak{Sin}\,3\eta'(K-u)}{\mathfrak{Sin}\,6\eta'K}+\frac{4\eta'\,\mathfrak{Sin}\,5\eta'(K-u)}{\mathfrak{Sin}\,10\eta'K}+\frac{4\eta'\,\mathfrak{Sin}\,7\eta'(K-u)}{\mathfrak{Sin}\,14\eta'K}+\dots,$$

$$3. \quad k'.\sqrt{\frac{1+k\,\mathrm{sn}\,u}{1-k\,\mathrm{sn}\,u}} = \frac{4\eta'\,\mathfrak{Cos}\,\eta'(K+u)}{\mathfrak{Sin}\,2\eta'K}-\frac{4\eta'\,\mathfrak{Cos}\,3\eta'(K+u)}{\mathfrak{Sin}\,6\eta'K}+\frac{4\eta'\,\mathfrak{Cos}\,5\eta'(K+u)}{\mathfrak{Sin}\,10\eta'K}-\frac{4\eta'\,\mathfrak{Cos}\,7\eta'(K+u)}{\mathfrak{Sin}\,14\eta'K}+-\dots,$$

$$4.\quad k'.\sqrt{\frac{1-k\,\mathrm{sn}\,u}{1+k\,\mathrm{sn}\,u}}=\frac{4\eta'\,\mathfrak{Cos}\,\eta'(K-u)}{\mathfrak{Sin}\,2\eta'K}-\frac{4\eta'\,\mathfrak{Cos}\,3\eta'(K-u)}{\mathfrak{Sin}\,6\eta'K}+\frac{4\eta'\,\mathfrak{Cos}\,5\eta'(K-u)}{\mathfrak{Sin}\,10\eta'K}-\frac{4\eta'\,\mathfrak{Cos}\,7\eta'(K-u)}{\mathfrak{Sin}\,14\eta'K}+-\ldots,$$

$$5.\quad k'.\sqrt{\frac{1+k\,\mathrm{snc}\,u}{1-k\,\mathrm{snc}\,u}}=\frac{2\eta'}{\mathfrak{Cos}\,\eta'u}+\frac{4\eta'p^2\,\mathfrak{Cos}\,\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta'K}-\frac{4\eta'p^6\,\mathfrak{Cos}\,3\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta'K}+\frac{4\eta'p^{10}\,\mathfrak{Cos}\,5\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,10\eta'K}-+\ldots,$$

$$6.\quad k'.\sqrt{\frac{1-k\,\mathrm{snc}\,u}{1+k\,\mathrm{snc}\,u}}=\frac{4\eta'\,\mathfrak{Cos}\,\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta'K}-\frac{4\eta'\,\mathfrak{Cos}\,3\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta'K}+\frac{4\eta'\,\mathfrak{Cos}\,5\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,10\eta'K}-\frac{4\eta'\,\mathfrak{Cos}\,7\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,14\eta'K}+-\ldots,$$

$$7.\quad \sqrt{\frac{1+\mathrm{cnc}\,u}{1-\mathrm{cnc}\,u}}=\eta'+\frac{2\eta'\,\mathfrak{Sin}\,\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,\eta'K}+\frac{2\eta'\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta'K}+\frac{2\eta'\,\mathfrak{Sin}\,3\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,3\eta'K}+\frac{2\eta'\,\mathfrak{Cos}\,4\eta'u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta'K}+\frac{2\eta'\,\mathfrak{Sin}\,5\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,5\eta'K}+\ldots,$$

$$8.\quad \sqrt{\frac{1-\mathrm{cnc}\,u}{1+\mathrm{cnc}\,u}}=\eta'-\frac{2\eta'\,\mathfrak{Sin}\,\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,\eta'K}+\frac{2\eta'\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta'K}-\frac{2\eta'\,\mathfrak{Sin}\,3\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,3\eta'K}+\frac{2\eta'\,\mathfrak{Cos}\,4\eta'u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta'K}-\frac{2\eta'\,\mathfrak{Sin}\,5\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,5\eta'K}+-\ldots,$$

$$9.\quad k.\sqrt{\frac{1+\mathrm{dnc}\,u}{1-\mathrm{dnc}\,u}}=\eta'+\frac{2\eta'\,\mathfrak{Cos}\,\eta'u}{\mathfrak{Cos}\,\eta'K}+\frac{2\eta'\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta'K}+\frac{2\eta'\,\mathfrak{Cos}\,3\eta'u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta'K}+\frac{2\eta'\,\mathfrak{Cos}\,4\eta'u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta'K}+\ldots,$$

$$10.\quad k.\sqrt{\frac{1-\mathrm{dnc}\,u}{1+\mathrm{dnc}\,u}}=\eta'-\frac{2\eta'\,\mathfrak{Cos}\,\eta'u}{\mathfrak{Cos}\,\eta'K}+\frac{2\eta'\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta'K}-\frac{2\eta'\,\mathfrak{Cos}\,3\eta'u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta'K}+\frac{2\eta'\,\mathfrak{Cos}\,4\eta'u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta'K}-+\ldots$$

Ganz eben so erhält man Reihen für dieselben zehn Wurzelgröſsen, welche nach Potenzial-Functionen des Arcus ηu und seiner Vielfachen fortschreiten. Dieselben Resultate findet man aber schon dadurch, daſs man in den Formeln (7.) bis (12.) §. 177. $K-u$ statt u, also $\frac{1}{2}\pi-\eta u$ statt ηu setzt. Daher geben wir nur noch die folgenden Reihen an:

$$11.\quad k'.\sqrt{\frac{1+k\,\mathrm{snc}\,u}{1-k\,\mathrm{snc}\,u}}=\eta+\frac{2\eta\cos\eta u}{\mathfrak{Cos}\,\eta K'}+\frac{2\eta\cos2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta K'}+\frac{2\eta\cos3\eta u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta K'}+\frac{2\eta\cos4\eta u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta K'}+\ldots,$$

$$12.\quad k'.\sqrt{\frac{1-k\,\mathrm{snc}\,u}{1+k\,\mathrm{snc}\,u}}=\eta-\frac{2\eta\cos\eta u}{\mathfrak{Cos}\,\eta K'}+\frac{2\eta\cos2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta K'}-\frac{2\eta\cos3\eta u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta K'}+\frac{2\eta\cos4\eta u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta K'}-+\ldots$$

Zusatz. Es ist nach §. 32. *a.* $\sqrt{\frac{1-\mathrm{snc}\,u}{1+\mathrm{snc}\,u}}=\frac{\mathrm{cnc}\,\frac{1}{2}u}{\mathrm{cn}\,\frac{1}{2}u}$, also

$$\sqrt{\frac{1-\mathrm{sn}\,u}{1+\mathrm{sn}\,u}}=\frac{\mathrm{cn}\,(\frac{1}{2}K+\frac{1}{2}u)}{\mathrm{cn}\,(\frac{1}{2}K-\frac{1}{2}u)},$$

$$\sqrt{\frac{1-k\,\mathrm{snc}\,u}{1+k\,\mathrm{snc}\,u}}=\sqrt{\frac{1-k}{1+k}\cdot\frac{1+k\,\mathrm{sn}^2\,\frac{1}{2}u}{1-k\,\mathrm{sn}^2\,\frac{1}{2}u}}\quad\text{und}\quad\sqrt{\frac{1-k\,\mathrm{sn}\,u}{1+k\,\mathrm{sn}\,u}}=\frac{1-k\,\mathrm{sn}\,\frac{1}{2}u\,\mathrm{snc}\,\frac{1}{2}u}{1+k\,\mathrm{sn}\,\frac{1}{2}u\,\mathrm{snc}\,\frac{1}{2}u},$$

$$\sqrt{\frac{1-\mathrm{cn}\,u}{1+\mathrm{cn}\,u}}=\frac{\mathrm{sn}\,\frac{1}{2}u}{\mathrm{snc}\,\frac{1}{2}u},\qquad\text{also}\quad\sqrt{\frac{1-\mathrm{cnc}\,u}{1+\mathrm{cnc}\,u}}=\sqrt{\frac{\mathrm{sn}\,(\frac{1}{2}K-\frac{1}{2}u)}{\mathrm{sn}\,(\frac{1}{2}K+\frac{1}{2}u)}},$$

$$\sqrt{\frac{1-\mathrm{dn}\,u}{1+\mathrm{dn}\,u}}=k\,\mathrm{sn}\,\tfrac{1}{2}u\,\mathrm{snc}\,\tfrac{1}{2}u,\quad\text{also}\quad\sqrt{\frac{1-\mathrm{dnc}\,u}{1+\mathrm{dnc}\,u}}=k\,\mathrm{sn}\,(\tfrac{1}{2}K-\tfrac{1}{2}u)\,\mathrm{sn}\,(\tfrac{1}{2}K+\tfrac{1}{2}u).$$

Hiernach können die vorigen Entwicklungen auch noch auf eine andere Art dargestellt werden.

§. 181.

Reihen für die Quadrate der Modular-Functionen.

Nach §. 179. Formel (1.) ist

$$k\,\mathrm{sn}\,u = 2\eta.S\frac{\sin(2\alpha+1)\eta u}{\mathfrak{Sin}(2\alpha+1)\eta K'} = 4\eta.S\frac{q^{2\alpha+1}}{1-q^{4\alpha+2}}\sin(2\alpha+1)\eta u;$$

daher ist

$$k^2\,\mathrm{sn}^2 u = 16\eta^2.S\frac{q^{2\alpha+2\beta+2}}{(1-q^{4\alpha+2})(1-q^{4\beta+2})}\sin(2\alpha+1)\eta u.\sin(2\beta+1)\eta u,$$

und da

$$2\sin(2\alpha+1)\eta u\sin(2\beta+1)\eta u = \cos 2(\beta-\alpha)\eta u - \cos 2(\alpha+\beta+1)\eta u,$$

so ist

$$k^2\,\mathrm{sn}^2 u = 8\eta^2.S\frac{q^{2\alpha+2\beta+2}}{(1-q^{4\alpha+2})(1-q^{4\beta+2})}\cos 2(\beta-\alpha)\eta u$$
$$-8\eta^2.S\frac{q^{2\alpha+2\beta+2}}{(1-q^{4\alpha+2})(1-q^{4\beta+2})}\cos 2(\alpha+\beta+1)\eta u,$$

und es hat folglich die Reihe die Form

$$k^2\,\mathrm{sn}^2 u = \eta^2(A+\overset{1}{A}\cos 2\eta u+\overset{2}{A}\cos 4\eta u+\overset{3}{A}\cos 6\eta u+\ldots.+\overset{n}{A}\cos 2n\eta u+\ldots.).$$

Der Coefficient A entsteht aus dem ersten Theile der vorigen Reihe, wenn man $\beta=\alpha$ setzt. Es ist

$$A = S\frac{8q^{4\alpha+2}}{(1-q^{4\alpha+2})^2} = \frac{8q^2}{(1-q^2)^2}+\frac{8q^6}{(1-q^6)^2}+\frac{8q^{10}}{(1-q^{10})^2}+\ldots.;$$

also

$$A = \frac{2}{\mathfrak{Sin}^2\eta K'}+\frac{2}{\mathfrak{Sin}^2 3\eta K'}+\frac{2}{\mathfrak{Sin}^2 5\eta K'}+\frac{2}{\mathfrak{Sin}^2 7\eta K'}+\ldots.$$

Zu dem Coefficienten $\overset{n}{A}$ fließen drei Haupttheile zusammen, da $n = +(\beta-\alpha)$, $n=-(\beta-\alpha)=\alpha-\beta$ und $n=\alpha+\beta+1$ sein kann; da aber $\cos 2(\beta-\alpha)\eta u = \cos 2(\alpha-\beta)\eta u$ ist, so sind die beiden ersten Theile gleich. Es sei

$$P = S\frac{8q^{2\alpha+2\beta+2}}{(1-q^{4\alpha+2})(1-q^{4\beta+2})}\ \text{cond.}\ \beta-\alpha=n,$$
$$Q = S\frac{8q^{2\alpha+2\beta+2}}{(1-q^{4\alpha+2})(1-q^{4\beta+2})}\ \text{cond.}\ \alpha+\beta+1=n,$$

so ist der Coefficient $\overset{n}{A} = 2P-Q$. Es kann P, da in ihm $\beta = n+\alpha$ ist, so dargestellt werden:

$$P = S\frac{8q^{2n+4\alpha+2}}{(1-q^{4\alpha+2})(1-q^{4n+4\alpha+2})}\ \text{und}$$
$$Q = S\frac{8q^{2n}}{(1-q^{4\alpha+2})(1-q^{4n-4\alpha-2})}.$$

Der Ausdruck für P ist eine unendliche Reihe; der Ausdruck für Q ist geschlossener, da $4n-4\alpha-2$ positiv sein muſs. Es ist

$$\frac{q^{4\alpha+2}}{1-q^{4\alpha+2}}-\frac{q^{4n+4\alpha+2}}{1-q^{4n+4\alpha+2}}=\frac{q^{4\alpha+2}(1-q^{4n})}{(1-q^{4\alpha+2})(1-q^{4n+4\alpha+2})};$$

also

$$\frac{q^{2n+4\alpha+2}}{(1-q^{4\alpha+2})(1-q^{4n+4\alpha+2})}=\frac{q^{2n}}{1-q^{4n}}\left(\frac{q^{4\alpha+2}}{1-q^{4\alpha+2}}-\frac{q^{4n+4\alpha+2}}{1-q^{4n+4\alpha+2}}\right),$$

oder

$$P=\frac{8q^{2n}}{1-q^{4n}}\left\{S\frac{q^{4\alpha+2}}{1-q^{4\alpha+2}}-S\frac{q^{4n+4\alpha+2}}{1-q^{4n+4\alpha+2}}\right\}.$$

Läſst man nun die sich aufhebenden Glieder weg, so erhält man den geschlossenen Ausdruck

$$P=\frac{8q^{2n}}{1-q^{4n}}\left\{\frac{q^2}{1-q^2}+\frac{q^6}{1-q^6}+\frac{q^{10}}{1-q^{10}}\cdots+\frac{q^{4n-2}}{1-q^{4n-2}}\right\}.$$

Ferner ist

$$\frac{q^{4\alpha+2}}{1-q^{4\alpha+2}}+\frac{q^{4n-4\alpha-2}}{1-q^{4n-4\alpha-2}}+1=\frac{1-q^{4n}}{(1-q^{4\alpha+2})(1-q^{4n+4\alpha+2})},$$

und also

$$\frac{q^{2n}}{(1-q^{4\alpha+2})(1-q^{4n+4\alpha+2})}=\frac{q^{2n}}{1-q^{4n}}\left\{\frac{q^{4\alpha+2}}{1-q^{4\alpha+2}}+\frac{q^{4n-4\alpha-2}}{1-q^{4n-4\alpha-2}}+1\right\}.$$

Zerlegt man hienach jedes von den n Gliedern des Ausdrucks Q, so erhält man

$$Q=\frac{8^n q^{2n}}{1-q^{4n}}+\frac{16q^{2n}}{1-q^{4n}}\left\{\frac{q^2}{1-q^2}+\frac{q^6}{1-q^6}+\frac{q^{10}}{1-q^{10}}\cdots+\frac{q^{4n-2}}{1-q^{4n-2}}\right\};$$

es ist mithin

$$\overset{n}{A}=\frac{-8nq^{2n}}{1-q^{4n}}=-\frac{4n}{\mathfrak{Sin}\,2n\eta K'}.$$

Multiplicirt man die Reihe für $k^2\mathrm{sn}^2u$ mit ∂u und integrirt auf beiden Seiten so, daſs das Integral für $u=0$ verschwindet, so erhält man, da nach §. 64. $\int_0 k^2\mathrm{sn}^2u.\partial u=u-\mathrm{el}\,u$ ist, die Reihe

$$u-\mathrm{el}\,u=A\eta^2u+\frac{\overset{1}{A}\eta}{2}\sin2\eta u+\frac{\overset{2}{A}\eta}{4}\sin4\eta u+\frac{\overset{3}{A}\eta}{6}\sin6\eta u+\ldots.$$

und wird hierin $u=K$, also $\mathrm{el}\,u=E$ gesetzt, so fällt der periodische Theil der Reihe weg und es bleibt bloſs

$$K-E=(\tfrac{1}{2}\pi)^2.\frac{A}{K},$$

also

$$A\eta^2=1-\frac{E}{K}.$$

Es ist mithin

$$1-\frac{E}{K}=\frac{(\frac{1}{2}\pi)^2}{K^2}\left(\frac{2}{\mathfrak{Sin}^2\eta K'}+\frac{2}{\mathfrak{Sin}^2 3\eta K'}+\frac{2}{\mathfrak{Sin}^2 5\eta K'}+\ldots\right) \text{ und}$$

$$1.\quad k^2\,\mathrm{sn}^2 u = 1 - \frac{E}{K} - \frac{4\eta^2\cos 2\eta u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta K'} - \frac{8\eta^2\cos 4\eta u}{\mathfrak{Sin}\,4\eta K'} - \frac{12\eta^2\cos 6\eta u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta K'} - \frac{16\eta^2\cos 8\eta u}{\mathfrak{Sin}\,8\eta K'} - - \ldots, \quad \text{oder}$$

$$2.\quad \mathrm{dn}^2 u = \frac{E}{K} + \frac{4\eta^2\cos 2\eta u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta K'} + \frac{8\eta^2\cos 4\eta u}{\mathfrak{Sin}\,4\eta K'} + \frac{12\eta^2\cos 6\eta u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta K'} + \frac{16\eta^2\cos 8\eta u}{\mathfrak{Sin}\,8\eta K'} + \ldots,$$

$$3.\quad k^2\,\mathrm{cn}^2 u = \frac{E}{K} - k'^2 + \frac{4\eta^2\cos 2\eta u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta K'} + \frac{8\eta^2\cos 4\eta u}{\mathfrak{Sin}\,4\eta K'} + \frac{12\eta^2\cos 6\eta u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta K'} + \frac{16\eta^2\cos 8\eta u}{\mathfrak{Sin}\,8\eta K'} + \ldots,$$

$$4.\quad k^2\,\mathrm{snc}^2 u = 1 - \frac{E}{K} + \frac{4\eta^2\cos 2\eta u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta K'} - \frac{8\eta^2\cos 4\eta u}{\mathfrak{Sin}\,4\eta K'} + \frac{12\eta^2\cos 6\eta u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta K'} - \frac{16\eta^2\cos 8\eta u}{\mathfrak{Sin}\,8\eta K'} + - \ldots,$$

$$5.\quad \mathrm{dnc}^2 u = \frac{E}{K} - \frac{4\eta^2\cos 2\eta u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta K'} + \frac{8\eta^2\cos 4\eta u}{\mathfrak{Sin}\,4\eta K'} - \frac{12\eta^2\cos 6\eta u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta K'} + \frac{16\eta^2\cos 8\eta u}{\mathfrak{Sin}\,8\eta K'} - + \ldots,$$

$$6.\quad k^2\,\mathrm{cnc}^2 u = \frac{E}{K} - k'^2 - \frac{4\eta^2\cos 2\eta u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta K'} + \frac{8\eta^2\cos 4\eta u}{\mathfrak{Sin}\,4\eta K'} - \frac{12\eta^2\cos 6\eta u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta K'} + \frac{16\eta^2\cos 8\eta u}{\mathfrak{Sin}\,8\eta K'} - + \ldots$$

Zusatz. Erhebt man die Reihe (9.) §. 179. zum Quadrate, so erhält man für das von u unabhängige Anfangsglied die Reihe:

$$\frac{E}{K} - k'^2 = \eta^2\left(\frac{2}{\mathfrak{Cos}^2\eta K'} + \frac{2}{\mathfrak{Cos}^2 3\eta K'} + \frac{2}{\mathfrak{Cos}^2 5\eta K'} \ldots\right).$$

Erhebt man die Reihe (17.) §. 179. zum Quadrate, so findet man

$$\frac{E}{K} = \eta^2\left(1 + \frac{2}{\mathfrak{Cos}^2 2\eta K'} + \frac{2}{\mathfrak{Cos}^2 4\eta K'} + \frac{2}{\mathfrak{Cos}^2 6\eta K'} + \ldots\right).$$

Setzt man also wieder $\frac{1}{2}\pi . \frac{K'}{K} = v$, so hat man

$$7.\quad K(K-E) = (\tfrac{1}{2}\pi)^2.\left(\frac{2}{\mathfrak{Sin}^2 v} + \frac{2}{\mathfrak{Sin}^2 3v} + \frac{2}{\mathfrak{Sin}^2 5v} + \frac{2}{\mathfrak{Sin}^2 7v} + \ldots\right),$$

$$8.\quad K(E-k'^2K) = (\tfrac{1}{2}\pi)^2.\left(\frac{2}{\mathfrak{Cos}^2 v} + \frac{2}{\mathfrak{Cos}^2 3v} + \frac{2}{\mathfrak{Cos}^2 5v} + \frac{2}{\mathfrak{Cos}^2 7v} + \ldots\right),$$

$$9.\quad K.E = (\tfrac{1}{2}\pi)^2.\left(1 + \frac{2}{\mathfrak{Cos}^2 2v} + \frac{2}{\mathfrak{Cos}^2 4v} + \frac{2}{\mathfrak{Cos}^2 6v} + \frac{2}{\mathfrak{Cos}^2 8v} + \ldots\right).$$

Werden die beiden Gleichungen (7.) und (8.) addirt, so erhält man

$$10.\quad k^2.K^2 = (\tfrac{1}{2}\pi)^2.\left\{\frac{8\,\mathfrak{Cos}\,2v}{\mathfrak{Sin}^2 2v} + \frac{8\,\mathfrak{Cos}\,6v}{\mathfrak{Sin}^2 6v} + \frac{8\,\mathfrak{Cos}\,10v}{\mathfrak{Sin}^2 10v} + \frac{8\,\mathfrak{Cos}\,14v}{\mathfrak{Sin}^2 14v} + \ldots\right\}.$$

Weiter ist, wenn (8.) von (9.) subtrahirt wird,

$$11.\quad k'^2.K^2 = (\tfrac{1}{2}\pi)^2.\left\{1 - \frac{2}{\mathfrak{Cos}^2 v} + \frac{2}{\mathfrak{Cos}^2 2v} - \frac{2}{\mathfrak{Cos}^2 3v} + \frac{2}{\mathfrak{Cos}^2 4v} - \frac{2}{\mathfrak{Cos}^2 5v} + - \ldots\right\}.$$

Aus (10.) und (11.) erhält man endlich durch Addition:

12. $K^2 = (\tfrac{1}{2}\pi)^2 \left\{1 + \frac{2}{\mathfrak{Sin}^2 v} + \frac{2}{\mathfrak{Cos}^2 2v} + \frac{2}{\mathfrak{Sin}^2 3v} + \frac{2}{\mathfrak{Cos}^2 4v} + \frac{2}{\mathfrak{Sin}^2 5v} + \dots\right\}$;

also

13. $K'^2 = v^2 \left\{1 + \frac{2}{\mathfrak{Sin}^2 v} + \frac{2}{\mathfrak{Cos}^2 2v} + \frac{2}{\mathfrak{Sin}^2 3v} + \frac{2}{\mathfrak{Cos}^2 4v} + \frac{2}{\mathfrak{Sin}^2 5v} + \dots\right\}$.

§. 182.

Nach §. 62. ist

$$\frac{1}{\mathrm{sn}^2 u} = k^2 \mathrm{sn}^2 u - \frac{\partial^2 \log \mathrm{sn}\, u}{\partial u^2} \quad \text{und} \quad \frac{k'^2}{\mathrm{cn}^2 u} = -k^2 \mathrm{cn}^2 u - \frac{\partial^2 \log \mathrm{cn}\, u}{\partial u^2}.$$

Es ist ferner

$$\frac{\partial \log \mathrm{sn}\, u}{\partial u} = \frac{\mathrm{cn}\, u\, \mathrm{dn}\, u}{\mathrm{sn}\, u} = k' . \frac{\mathrm{cn}\, u}{\mathrm{cnc}\, u}$$

$$= \eta \cot \eta u - 2\eta q \frac{\sin 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\, \eta K'} - 2\eta q^2 \frac{\sin 4\eta u}{\mathfrak{Cos}\, 2\eta K'} - 2\eta q^3 \frac{\sin 6\eta u}{\mathfrak{Cos}\, 3\eta K'} - 2\eta q^4 \frac{\sin 8\eta u}{\mathfrak{Cos}\, 4\eta K'} - \dots;$$

also

$$\frac{\partial^2 \log \mathrm{sn}\, u}{\partial u^2} = -\frac{\eta^2}{\sin^2 \eta u} - 4\eta^2 q . \frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\, \eta K'} - 8\eta^2 q^2 . \frac{\cos 4\eta u}{\mathfrak{Cos}\, 2\eta K'} - 12\eta^2 q^3 . \frac{\cos 6\eta u}{\mathfrak{Cos}\, 3\eta K'}$$
$$- 16\eta^2 q^4 . \frac{\cos 6\eta u}{\mathfrak{Cos}\, 4\eta K'} - \dots.$$

Wird diese Reihe von der vorhin für $k^2 \mathrm{sn}^2 u$ gefundenen subtrahirt, so entsteht

1. $$\frac{1}{\mathrm{sn}^2 u} = 1 - \frac{E}{K} + \frac{\eta^2}{\sin^2 \eta u} - 4\eta^2 q^2 . \frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Sin}\, 2\eta K'} - 8\eta^2 q^4 . \frac{\cos 4\eta u}{\mathfrak{Sin}\, 4\eta K'}$$
$$- 12\eta^2 q^6 . \frac{\cos 6\eta u}{\mathfrak{Sin}\, 6\eta K'} - 16\eta^2 q^8 . \frac{\cos 8\eta u}{\mathfrak{Sin}\, 8\eta K'} - \dots.$$

Es ist

$$-\frac{\partial \log \mathrm{cn}\, u}{\partial u} = \frac{\mathrm{sn}\, u}{\mathrm{snc}\, u}$$

$$= \eta \tang \eta u + 2\eta q . \frac{\sin 2\eta u}{\mathfrak{Sin}\, \eta K'} + 2\eta q^2 . \frac{\sin 4\eta u}{\mathfrak{Cos}\, 2\eta K'} + 2\eta q^3 . \frac{\sin 6\eta u}{\mathfrak{Sin}\, 3\eta K'} + \dots;$$

also ist

$$-\frac{\partial^2 \log \mathrm{cn}\, u}{\partial u^2} = \frac{\eta^2}{\cos^2 \eta u} + 4\eta^2 q . \frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Sin}\eta K'} + 8\eta^2 q^2 . \frac{\cos 4\eta u}{\mathfrak{Cos} 2\eta K'} + 12\eta^2 q^3 . \frac{\cos 6\eta u}{\mathfrak{Sin} 3\eta K'} + \dots$$

Wird von dieser Reihe die Reihe (3.) §. 181. subtrahirt, so entsteht

2. $$\frac{k'^2}{\mathrm{cn}^2 u} = k'^2 - \frac{E}{K} + \frac{\eta^2}{\cos^2 \eta u} + 4\eta^2 q^2 . \frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Sin}\, 2\eta K'} - 8\eta^2 q^4 . \frac{\cos 4\eta u}{\mathfrak{Sin}\, 4\eta K'}$$
$$+ 12\eta^2 q^6 . \frac{\cos 6\eta u}{\mathfrak{Sin}\, 6\eta K'} - + \dots.$$

Es können diese beiden Reihen auch also dargestellt werden:

3. $$\begin{cases} \frac{1}{\mathrm{tn}^2 u} = -\frac{E}{K} + \frac{\eta^2}{\sin^2 \eta u} - 4\eta q^2 . \frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Sin} 2\eta K'} - 8\eta^2 q^4 . \frac{\cos 4\eta u}{\mathfrak{Cos} 2\eta K'} - 12\eta^2 q^6 . \frac{\cos 6\eta u}{\mathfrak{Sin} 6\eta K'} - \dots, \\ \frac{1}{\mathrm{tnc}^2 u} = -\frac{E}{K} + \frac{\eta^2}{\cos^2 \eta u} + 4\eta q^2 . \frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Sin} 2\eta K'} - 8\eta^2 q^4 . \frac{\cos 4\eta u}{\mathfrak{Sin} 4\eta K'} + 12\eta^2 q^6 . \frac{\cos 6\eta u}{\mathfrak{Sin} 6\eta K'} - + \dots, \end{cases}$$

woraus erhellet, dafs die eine Reihe in die andere übergeht, wenn $K-u$ statt u gesetzt wird.

Vertauscht man in den beiden Reihen

$$k^2\operatorname{snc}^2 u = 1-\frac{E}{K}+\frac{4\eta^2\cos 2\eta u}{\operatorname{Sin}2\eta K'}-\frac{8\eta^2\cos 4\eta u}{\operatorname{Sin}4\eta K'}+\frac{12\eta^2\cos 6\eta u}{\operatorname{Sin}6\eta K'}-\frac{16\eta^2\cos 8\eta u}{\operatorname{Sin}8\eta K'}+-\ldots,$$

$$\frac{1}{\operatorname{snc}^2 u}=1-\frac{E}{K}+\frac{\eta^2}{\cos^2\eta u}+4\eta^2 q^2.\frac{\cos 2\eta u}{\operatorname{Sin}2\eta K'}-8\eta^2 q^4.\frac{\cos 4\eta u}{\operatorname{Sin}4\eta K'}$$
$$+12\eta^2 q^6.\frac{\cos 6\eta u}{\operatorname{Sin}6\eta K'}-+\ldots$$

die beiden conjugirten Moduln mit einander, indem man ui statt u setzt, so erhält man die beiden Reihen

$$4.\quad \operatorname{dnc}^2 u = 1-\frac{E'}{K'}+\frac{4\eta'^2\operatorname{Cos}2\eta' u}{\operatorname{Sin}2\eta' K}-\frac{8\eta'^2\operatorname{Cos}4\eta' u}{\operatorname{Sin}4\eta' K}+\frac{12\eta'^2\operatorname{Cos}6\eta' u}{\operatorname{Sin}6\eta' K}$$
$$-\frac{16\eta'^2\operatorname{Cos}8\eta' u}{\operatorname{Sin}8\eta' K}-+\ldots,$$

$$5.\quad \operatorname{dn}^2 u = 1-\frac{E'}{K'}+\frac{\eta'^2}{\operatorname{Cos}^2\eta' u}+4\eta'^2 p^2.\frac{\operatorname{Cos}2\eta' u}{\operatorname{Sin}2\eta' K}+8\eta'^2 p^4.\frac{\operatorname{Cos}4\eta' u}{\operatorname{Sin}4\eta' K}$$
$$+12\eta'^2 p^6.\frac{\operatorname{Cos}6\eta' u}{\operatorname{Sin}6\eta' K}-16\eta'^2 p^8.\frac{\operatorname{Cos}8\eta' u}{\operatorname{Sin}8\eta' K}+-\ldots,$$

welche desto rascher convergiren, je mehr sich der Modul k der Einheit nähert.

§. 183.

Reihen für das Modular-Integral $\operatorname{el} u$ der ersten Art, welche nach Functionen der Vielfachen von ηu und $\eta' u$ fortschreiten. Ausdruck der Modular-Logarithmen durch die Hülfs-Functionen.

Multiplicirt man die Reihe (2.) §. 181. mit ∂u, so erhält man durch Integration die Reihe

$$1.\quad \operatorname{el} u = \frac{E}{K}.u+\frac{2\eta\sin 2\eta u}{\operatorname{Sin}2\eta K'}+\frac{2\eta\sin 4\eta u}{\operatorname{Sin}4\eta K'}+\frac{2\eta\sin 6\eta u}{\operatorname{Sin}6\eta K'}+\frac{2\eta\sin 8\eta u}{\operatorname{Sin}8\eta K'}+\ldots,\ \text{also}$$

$$2.\quad \operatorname{elc} u = E-\frac{E}{K}u+\frac{2\eta\sin 2\eta u}{\operatorname{Sin}2\eta K'}-\frac{2\eta\sin 4\eta u}{\operatorname{Sin}4\eta K'}+\frac{2\eta\sin 6\eta u}{\operatorname{Sin}6\eta K'}-\frac{2\eta\sin 8\eta u}{\operatorname{Sin}8\eta K'}+\ldots$$

Integrirt man die mit ∂u multiplicirte Reihe (5.) §. 182., so erhält man

$$3.\quad \operatorname{el} u = \left(1-\frac{E'}{K'}\right)u+\eta'\operatorname{Tang}\eta' u+2\eta' p^2\frac{\operatorname{Sin}2\eta' u}{\operatorname{Sin}2\eta' K}-2\eta' p^4.\frac{\operatorname{Sin}4\eta' u}{\operatorname{Sin}4\eta' K}$$
$$+2\eta' p^6.\frac{\operatorname{Sin}6\eta' u}{\operatorname{Sin}6\eta' K}+2\eta' p^8.\frac{\operatorname{Sin}8\eta' u}{\operatorname{Sin}8\eta' K}+-\ldots,$$

und integrirt man die mit $-\partial u = \partial(K-u)$ multiplicirte Reihe (4.) §. 182., so entsteht die Reihe

$$4.\quad \mathrm{elc}\,u = E - \left(1-\frac{E'}{K'}\right)u - 2\eta'.\frac{\mathfrak{Sin}\,2\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta' K} + 2\eta'.\frac{\mathfrak{Sin}\,4\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,4\eta' K} - 2\eta'.\frac{\mathfrak{Sin}\,6\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta' K} + 2\eta'.\frac{\mathfrak{Sin}\,8\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,8\eta' K} - + \ldots.$$

Multiplicirt man die Reihe (1.) mit ∂u, und integrirt, so entsteht

$$\mathrm{lm}\,u = \frac{E}{K}.\frac{u^2}{2} + A - \frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta K} - \tfrac{1}{2}.\frac{\cos 4\eta u}{\mathfrak{Sin}\,4\eta K'} - \tfrac{1}{3}.\frac{\cos 6\eta u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta K'} - \tfrac{1}{4}.\frac{\cos 8\eta u}{\mathfrak{Sin}\,8\eta K'} - \ldots,$$

wenn man die Constante der Integration durch A bezeichnet. Da nach §. 174.

$$\log \mathrm{Hl}\,u = \log g - \frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta K} - \tfrac{1}{2}.\frac{\cos 4\eta u}{\mathfrak{Sin}\,4\eta K'} - \tfrac{1}{3}.\frac{\cos 6\eta u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta K'} - \tfrac{1}{4}.\frac{\cos 8\eta u}{\mathfrak{Sin}\,8\eta K} - \ldots,$$

ist, so ist $\mathrm{lm}\,u = \frac{E}{K}.\frac{u^2}{2} + A - \log g + \log \mathrm{Hl}\,u$. Setzt man, um die Constante zu bestimmen, $u = o$, so hat man $\mathrm{lm}\,o = o$, $\log \mathrm{Hl}\,o = \log \sqrt{k'}$, also $o = A - \log g + \log \sqrt{k'}$, folglich

$$5.\quad \mathrm{lm}\,u = \frac{E}{K}.\frac{u^2}{2} + \log\left(\frac{\mathrm{Hl}\,u}{\sqrt{k'}}\right).$$

Wird in dieser Formel $K-u$ statt u gesetzt, so hat man, da $\mathrm{Hl}(K-u) = \mathrm{Gl}\,u$ ist,

$$6.\quad \mathrm{lmc}\,u = \tfrac{1}{2}EK - Eu + \frac{E}{K}.\tfrac{1}{2}u^2 + \log\left(\frac{\mathrm{Gl}\,u}{\sqrt{k'}}\right).$$

Wird die Reihe (3.) mit ∂u multiplicirt, so giebt die Integration

$$\mathrm{lm}\,u = B + \left(1-\frac{E'}{K'}\right).\frac{u^2}{2} + \log \mathfrak{Cos}\,\eta' u + p^2.\frac{\mathfrak{Cos}\,2\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta' K} - \frac{p^4}{2}.\frac{\mathfrak{Cos}\,4\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,4\eta' K} + \frac{p^6}{3}.\frac{\mathfrak{Cos}\,6\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta' K} - + \ldots;$$

und da nach §. 174.

$$\log \mathfrak{Bl}'u = \log(2g'\sqrt{p}.\mathfrak{Cos}\,\eta' u) + p^2\frac{\mathfrak{Cos}\,2\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta' K} - \frac{p^4}{2}.\frac{\mathfrak{Cos}\,4\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,4\eta' K} + \frac{p^6}{3}.\frac{\mathfrak{Cos}\,6\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta' K} - + \ldots$$

ist, so ist

$$\mathrm{lm}\,u = B - (\log 2g'\sqrt{p}) + \left(1-\frac{E'}{K'}\right).\frac{u^2}{2} + \log \mathfrak{Bl}'u.$$

Setzt man, um die Constante B zu bestimmen, $u = o$, so hat man, da $\mathfrak{Bl}'o = \sqrt{k'}$ ist, die Gleichung $o = B - \log(2g'\sqrt{p}) + \log\sqrt{k'}$; folglich ist

$$7.\quad \mathrm{lm}\,u = \left(1-\frac{E'}{K'}\right).\frac{u^2}{2} + \log\left(\frac{\mathfrak{Bl}'u}{\sqrt{k'}}\right).$$

Setzen wir auch in dieser Formel $K-u$ für u, so ist $\mathfrak{Bl}'(K-u) = e^{\eta'(\frac{1}{2}K-u)}.\mathfrak{Gl}'u$, also

$$\log \mathfrak{Bl}'(K-u) = \eta'(\tfrac{1}{2}K-u) + \log \mathfrak{Gl}'u = \frac{\pi}{4KK'}(K-u)^2 - \frac{\pi u^2}{4KK'} + \log \mathfrak{Gl}'u,$$

folglich

$$\text{lmc}\,u = \left(1-\frac{E'}{K'}\right).\frac{(K-u)^2}{2}+\frac{\pi}{2KK'}.\frac{(K-u)^2}{2}-\frac{\pi u^2}{4KK'}+\log\frac{\mathfrak{Sl}'u}{\sqrt{k'}}.$$

Da aber $\frac{\pi}{2KK'}=\frac{E}{K}+\frac{E'}{K'}-1$, so reducirt sich die Formel auf

$$\text{lmc}\,u = \frac{EK}{2}-E.u+\left(\frac{E}{K}-\frac{\pi}{2KK'}\right).\frac{u^2}{2}+\log\left(\frac{\mathfrak{Sl}'u}{\sqrt{k'}}\right),$$

oder endlich auf

$$8.\quad \text{lmc}\,u = \frac{EK}{2}-E.u+\left(1-\frac{E'}{K'}\right).\frac{u^2}{2}+\log\left(\frac{\mathfrak{Sl}'u}{\sqrt{k'}}\right).$$

Zusatz. Die Formel (7.) wurde hergeleitet, ohne die Relation $\frac{E}{K}+\frac{E'}{K'}-1=\frac{\pi}{2KK'}$ anzuwenden; wir können aber diese bei Herleitung der Formel (8.) angewandte Relation daraus herleiten, indem wir $u=K$ setzen. Dadurch entsteht

$$\text{lm}\,K = \left(1-\frac{E'}{K'}\right).\tfrac{1}{2}K^2+\log\frac{\mathfrak{Bl}'K}{\sqrt{k'}}.$$

Da aber nach §. 73.

$$\text{lm}\,K = \frac{EK}{2}+\log\sqrt{\frac{1}{k'}} \quad \text{und} \quad \mathfrak{Bl}'K = e^{\frac{\pi K}{4K'}}$$

ist, so ist

$$\frac{EK}{2} = \left(1-\frac{E'}{K'}\right).\tfrac{1}{2}K^2+\frac{\pi K}{4K'} \quad \text{oder} \quad EK'+E'K-KK' = \tfrac{1}{2}\pi$$

und folglich

$$\frac{E}{K}+\frac{E'}{K'}-1 = \frac{\pi}{2KK'}.$$

§. 184.

Die Differenziale der acht Hülfs-Functionen.

Differenziirt man die Formeln (5.) und (6.) §. 183., so erhält man

$$\text{el}\,u = \frac{E}{K}.u+\frac{\partial\log\text{Hl}\,u}{\partial u}$$

und

$$E-\text{elc}\,u = \frac{E}{K}.u+\frac{\partial\log\text{Gl}\,u}{\partial u};$$

daher ist rückwärts:

$$\frac{\partial\log\text{Hl}\,u}{\partial u} = \text{el}\,u-\frac{E}{K}u \quad \text{und}$$

$$\frac{\partial\log\text{Gl}\,u}{\partial u} = E-\text{elc}\,u-\frac{E}{K}.u.$$

Differenziirt man aber die Logarithmen der Gleichungen (6.) §. 171., so erhält man

$$\frac{\partial \log \mathrm{Al}\, u}{\partial u} = \frac{\partial \log \mathrm{Hl}\, u}{\partial u} + \frac{k' \mathrm{cn}\, u}{\mathrm{cnc}\, u} = \frac{\partial \log \mathrm{Gl}\, u}{\partial u} + \frac{\mathrm{snc}\, u}{\mathrm{sn}\, u},$$

$$\frac{\partial \log \mathrm{Bl}\, u}{\partial u} = \frac{\partial \log \mathrm{Hl}\, u}{\partial u} - \frac{\mathrm{sn}\, u}{\mathrm{snc}\, u} = \frac{\partial \log \mathrm{Gl}\, u}{\partial u} + \frac{k' \mathrm{cnc}\, u}{\mathrm{cn}\, u},$$

$$\frac{\partial \log \mathrm{Gl}\, u}{\partial u} = \frac{\partial \log \mathrm{Hl}\, u}{\partial u} - k^2 \mathrm{sn}\, u\, \mathrm{snc}\, u.$$

Werden diese Werthe benutzt, so hat man die vier Formeln

1. $$\frac{\partial \log \mathrm{Al}\, u}{\partial u} = \mathrm{el}\, u - \frac{E}{K} u + \frac{k' \mathrm{cn}\, u}{\mathrm{cnc}\, u} = E - \mathrm{elc}\, u - \frac{E}{K} u + \frac{\mathrm{snc}\, u}{\mathrm{sn}\, u}, \text{ also}$$

$$\frac{\partial^2 \log \mathrm{Al}\, u}{\partial u^2} = -\frac{E}{K} - \frac{1}{\mathrm{tn}^2 u},$$

2. $$\frac{\partial \log \mathrm{Bl}\, u}{\partial u} = \mathrm{el}\, u - \frac{E}{K} u - \frac{\mathrm{sn}\, u}{\mathrm{snc}\, u} = E - \mathrm{elc}\, u - \frac{E}{K} u - \frac{k' \mathrm{cnc}\, u}{\mathrm{cn}\, u}, \text{ also}$$

$$\frac{\partial^2 \log \mathrm{Bl}\, u}{\partial u^2} = -\frac{E}{K} - \frac{1}{\mathrm{tnc}^2 u},$$

3. $$\frac{\partial \log \mathrm{Gl}\, u}{\partial u} = \mathrm{el}\, \mathrm{u} - \frac{E}{K} u - k^2 \mathrm{sn}\, u\, \mathrm{snc}\, u = E - \mathrm{elc}\, u - \frac{E}{K} u, \text{ also}$$

$$\frac{\partial^2 \log \mathrm{Gl}\, u}{\partial u^2} = -\frac{E}{K} + \mathrm{dnc}^2 u,$$

4. $$\frac{\partial \log \mathrm{Hl}\, u}{\partial u} = \mathrm{el}\, \mathrm{u} - \frac{E}{K} u = E - \mathrm{elc}\, u - \frac{E}{K} u + k^2 \mathrm{sn}\, u\, \mathrm{snc}\, u, \text{ also}$$

$$\frac{\partial^2 \log \mathrm{Hl}\, u}{\partial u^2} = -\frac{E}{K} + \mathrm{dn}^2 u.$$

Differenziirt man die Formeln (7.) und (8.) §. 183., so erhält man

$$\mathrm{el}\, u - \left(1 - \frac{E'}{K'}\right) u = \frac{\partial \log \mathfrak{B}\mathfrak{l}' u}{\partial u},$$

$$E - \mathrm{elc}\, u - \left(1 - \frac{E'}{K'}\right) u = \frac{\partial \log \mathfrak{G}\mathfrak{l}' u}{\partial u}.$$

Differenziirt man ferner die Logarithmen der Gleichungen (8.) §. 170., so hat man

$$\frac{\partial \log \mathfrak{A}\mathfrak{l}' u}{\partial u} = \frac{\partial \log \mathfrak{B}\mathfrak{l}' u}{\partial u} + \frac{k' \mathrm{cn}\, u}{\mathrm{cnc}\, u} = \frac{\partial \log \mathfrak{G}\mathfrak{l}' u}{\partial u} + \frac{\mathrm{snc}\, u}{\mathrm{sn}\, u},$$

$$\frac{\partial \log \mathfrak{H}\mathfrak{l}' u}{\partial u} = \frac{\partial \log \mathfrak{B}\mathfrak{l}' u}{\partial u} - \frac{\mathrm{sn}\, u}{\mathrm{snc}\, u} = \frac{\partial \log \mathfrak{G}\mathfrak{l}' u}{\partial u} - \frac{k' \mathrm{cnc}\, u}{\mathrm{cn}\, u},$$

$$\frac{\partial \log \mathfrak{G}\mathfrak{l}' u}{\partial u} = \frac{\partial \log \mathfrak{B}\mathfrak{l}' u}{\partial u} - k^2 \mathrm{sn}\, u\, \mathrm{snc}\, u.$$

Daher haben wir folgende Ausdrücke der Differenzial-Verhältnisse der Logarithmen der hyperbolischen Hülfs-Functionen:

5. $$\frac{\partial \log \mathfrak{A}\mathfrak{l}' u}{\partial u} = \mathrm{el}\, u - \left(1 - \frac{E'}{K'}\right) u + \frac{k' \mathrm{cn}\, u}{\mathrm{cnc}\, u} = E - \mathrm{elc}\, u - \left(1 - \frac{E'}{K'}\right) u + \frac{\mathrm{snc}\, u}{\mathrm{sn}\, u},$$

6. $$\frac{\partial \log \mathfrak{B}\mathfrak{l}' u}{\partial u} = \mathrm{el}\, u - \left(1 - \frac{E'}{K'}\right) u = E - \mathrm{elc}\, u - \left(1 - \frac{E'}{K'}\right) u + k^2 \mathrm{sn}\, u\, \mathrm{snc}\, u,$$

$$7. \quad \frac{\partial \log \mathfrak{G}l'u}{\partial u} = \mathrm{el}\,u - \left(1 - \frac{E'}{K'}\right)u - k^2 \,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u = E - \mathrm{elc}\,u - \left(1 - \frac{E'}{K'}\right)u,$$

$$8. \quad \frac{\partial \log \mathfrak{H}l'u}{\partial u} = \mathrm{el}\,u - \left(1 - \frac{E'}{K'}\right)u - \frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{snc}\,u} = E - \mathrm{elc}\,u - \left(1 - \frac{E'}{K'}\right)u - \frac{k'\,\mathrm{cnc}\,u}{\mathrm{cn}\,u},$$

und hieraus folgen die zweiten Differenzial-Verhältnisse

$$\frac{\partial^2 \log \mathfrak{A}l'u}{\partial u^2} = \frac{E'}{K'} - \frac{1}{\mathrm{sn}^2 u}, \qquad \frac{\partial^2 \log \mathfrak{G}l'u}{\partial u^2} = \frac{E'}{K'} - k^2 \,\mathrm{snc}^2 u,$$

$$\frac{\partial^2 \log \mathfrak{B}l'u}{\partial u^2} = \frac{E'}{K'} - k^2 \,\mathrm{sn}^2 u, \qquad \frac{\partial^2 \log \mathfrak{H}l'u}{\partial u^2} = \frac{E'}{K'} - \frac{1}{\mathrm{snc}^2 u}.$$

§. 185.

Einfacher Zusammenhang der cyklischen Hülfs-Functionen mit den auf den conjugirten Modul bezogenen hyperbolischen.

Da nach §. 170. und 171.

$$\mathrm{sn}\,u = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{\mathfrak{A}l'u}{\mathfrak{B}l'u} \quad \text{und} \quad \mathrm{sn}\,u = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{\mathrm{Al}\,u}{\mathrm{Hl}\,u},$$

ist, so ist

$$\frac{\mathfrak{A}l'u}{\mathfrak{B}l'u} = \frac{\mathrm{Al}\,u}{\mathrm{Hl}\,u}.$$

Eben so ist

$$\frac{\mathfrak{H}l'u}{\mathfrak{B}l'u} = \frac{\mathrm{Bl}\,u}{\mathrm{Hl}\,u} \quad \text{und} \quad \frac{\mathfrak{G}l'u}{\mathfrak{B}l'u} = \frac{\mathrm{Gl}\,u}{\mathrm{Hl}\,u}.$$

Diese drei Gleichungen lassen sich aber zu der einzigen zusammenfassen:

$$1. \quad \frac{\mathfrak{A}l'u}{\mathrm{Al}\,u} = \frac{\mathfrak{B}l'u}{\mathrm{Hl}\,u} = \frac{\mathfrak{H}l'u}{\mathrm{Bl}\,u} = \frac{\mathfrak{G}l'u}{\mathrm{Gl}\,u}.$$

Sind, der gefundenen Gleichung gemäfs, die vier Verhältnisse einander gleich, so braucht nur noch der Werth eines dieser Verhältnisse gefunden zu werden. Da nach §. 183.

$$\mathrm{lm}\,u = \frac{E}{K} \cdot \frac{u^2}{2} + \log\left(\frac{\mathrm{Hl}\,u}{\sqrt{k'}}\right)$$

und auch

$$\mathrm{lm}\,u = \left(1 - \frac{E'}{K'}\right) \cdot \frac{u^2}{2} + \log\left(\frac{\mathfrak{B}l'u}{\sqrt{k}}\right)$$

ist, so geben die beiden Ausdrücke die Gleichung

$$\frac{E}{K} \cdot \frac{u^2}{2} + \log\left(\frac{\mathrm{Hl}\,u}{\sqrt{k}}\right) = \left(1 - \frac{E'}{K'}\right) \cdot \frac{u^2}{2} + \log\left(\frac{\mathfrak{B}l'u}{\sqrt{k'}}\right)$$

oder

$$\left(\frac{E}{K} + \frac{E'}{K'} - 1\right) \cdot \frac{u^2}{2} = \log \frac{\mathfrak{B}l'u}{\mathrm{Hl}\,u},$$

welche sich, da $\frac{E}{K} + \frac{E'}{K'} - 1 = \frac{\pi}{2KK'}$ ist, auf die einfachere

$$\frac{\pi u^2}{4KK'} = \log \frac{\mathfrak{B}l'u}{\mathrm{Hl}\,u}$$

oder

2. $$\begin{cases} \dfrac{\mathfrak{Bl}'u}{\mathrm{Hl}\,u} = e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}} \text{ reducirt. Also ist auch } \dfrac{\mathfrak{Al}'u}{\mathrm{Al}\,u} = e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}}, \\ \dfrac{\mathfrak{Hl}'u}{\mathrm{Bl}\,u} = e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}} \quad \text{und} \quad \dfrac{\mathfrak{Gl}'u}{\mathrm{Gl}\,u} = e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}}. \end{cases}$$

Vertauscht man in diesen Gleichungen die conjugirten Moduln mit einander, indem man ui statt u setzt, so verwandelt sich die erste Gleichung in die dritte und die dritte in die erste; die zweite Gleichung verwandelt sich wieder in sich selbst, und dasselbe gilt von der vierten Gleichung. Die vorstehenden Gleichungen können auch also dargestellt werden:

3. $$\begin{cases} \mathrm{Al}(ui) = i.e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}}.\,\mathrm{Al}'u, \qquad \mathrm{Gl}(ui) = e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}}.\,\mathrm{Gl}'u, \\ \mathrm{Bl}(ui) = e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}}.\,\mathrm{Hl}'u, \qquad \mathrm{Hl}(ui) = e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}}.\,\mathrm{Bl}'u. \end{cases}$$

Sie drücken nun aus, wie cyklische Hülfs-Functionen des rein imaginären Argumentes ui auf cyklische Hülfs-Functionen des reellen Argumentes u mit dem conjugirten Modul zurückgeführt werden können.

§. 186.

Andere Darstellung der Factoren der unendlichen Producte, wodurch die cyklischen und hyperbolischen Hülfs-Functionen ausgedrückt werden.

Setzt man in der Gleichung (3.) §. 171. das Argument $u = o$, so hat man, da $\mathrm{Bl}\,o = \sqrt{k}$ ist, die Gleichung

$$\frac{\sqrt{k}}{g} = 2\sqrt{q}.(1+q^4)^2.(1+q^8)^2.(1+q^{12})^2 \ldots;$$

und wird hierdurch die Gleichung (3.) selbst dividirt, so entsteht

$$\mathrm{Bl}\,u = \sqrt{k}.\cos\eta u.\frac{1+2q^4\cos 2\eta u+q^8}{(1+q^4)^2}.\frac{1+2q^8\cos 2\eta u+q^{16}}{(1+q^8)^2}\ldots.$$

Es ist

$$\frac{1+2q^4\cos 2\eta u+q^8}{(1+q^4)^2} = 1-\frac{4q^4\sin^2\eta u}{(1+q^4)^2} = 1-\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Cos}^2 2\eta K'}.$$

Werden eben so die übrigen Factoren umgeformt, so erhält man

1. $$\mathrm{Al}\,u = \sqrt{k}.\sin\eta u.\left(1-\frac{\cos^2\eta u}{\mathfrak{Cos}^2 2\eta K'}\right)\left(1-\frac{\cos^2\eta u}{\mathfrak{Cos}^2 4\eta K'}\right)\left(1-\frac{\cos^2\eta u}{\mathfrak{Cos}^2 6\eta K'}\right)\left(1-\frac{\cos^2\eta u}{\mathfrak{Cos}^2 8\eta K'}\right)\ldots,$$

2. $$\mathrm{Bl}\,u = \sqrt{k}.\cos\eta u.\left(1-\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Cos}^2 2\eta K'}\right)\left(1-\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Cos}^2 4\eta K'}\right)\left(1-\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Cos}^2 6\eta K'}\right)\left(1-\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Cos}^2 8\eta K'}\right)\ldots$$

Setzt man in der Reihe (4.) §. 171. das Argument $u = o$, so hat man, da $\mathrm{Gl}\,o = 1$ ist,

$$\frac{1}{g} = (1+q^2)^2(1+q^6)^2(1+q^{10})^2\ldots,$$

also

$$\mathrm{Gl}\,u = \frac{1+2q^2\cos 2\eta u+q^4}{(1+q^2)^2}\cdot\frac{1+2q^6\cos 2\eta u+q^{12}}{(1+q^6)^2}\cdot\frac{1+2q^{10}\cos 2\eta u+q^{20}}{(1+q^{10})^2}\cdots\cdot$$

Da aber $\frac{1+2q^2\cos 2\eta u+q^4}{(1+q^2)^2} = 1-\frac{4q^2\sin^2\eta u}{(1+q^2)^2} = 1-\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Cos}^2\eta K'}$ ist, so erhält man durch eine ähnliche Umformung der übrigen Factoren das Product

$$3.\quad \mathrm{Gl}\,u = \left(1-\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Cos}^2\eta K'}\right)\left(1-\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Cos}^2 3\eta K'}\right)\left(1-\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Cos}^2 5\eta K'}\right)\left(1-\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Cos}^2 7\eta K'}\right)\cdots\cdot$$

und also

$$4.\quad \mathrm{Hl}\,u = \left(1-\frac{\cos^2\eta u}{\mathfrak{Cos}^2\eta K'}\right)\left(1-\frac{\cos^2\eta u}{\mathfrak{Cos}^2 3\eta K'}\right)\left(1-\frac{\cos^2\eta u}{\mathfrak{Cos}^2 5\eta K'}\right)\left(1-\frac{\cos^2\eta u}{\mathfrak{Cos}^2 7\eta K'}\right)\cdots\cdot$$

Setzt man in der Reihe (4.) §. 171. $u=K$, so hat man, da $\mathrm{Gl}\,K=\sqrt{k'}$ ist,

$$\frac{\sqrt{k'}}{g} = (1-q^2)^2(1-q^6)^2(1-q^{10})^2\cdots,$$

also

$$\mathrm{Gl}\,u = \sqrt{k'}.\frac{1+2q^2\cos 2\eta u+q^4}{(1-q^2)^2}\cdot\frac{1+2q^6\cos 2\eta u+q^{12}}{(1-q^6)^2}\cdot\frac{1+2q^{10}\cos 2\eta u+q^{20}}{(1-q^{10})^2}\cdots\cdot$$

Da aber $\frac{1+2q^2\cos 2\eta u+q^4}{(1-q^2)^2} = 1+\frac{4q^2\cos^2\eta u}{(1-q^2)^2} = 1+\frac{\cos^2\eta u}{\mathfrak{Sin}^2\eta K'}$ ist, so erhält man durch eine ähnliche Umformung der übrigen Factoren das Product

$$5.\quad \mathrm{Gl}\,u = \sqrt{k'}.\left(1+\frac{\cos^2\eta u}{\mathfrak{Sin}^2\eta K'}\right)\left(1+\frac{\cos^2\eta u}{\mathfrak{Sin}^2 3\eta K'}\right)\left(1+\frac{\cos^2\eta u}{\mathfrak{Sin}^2 5\eta K'}\right)\left(1+\frac{\cos^2\eta u}{\mathfrak{Sin}^2 7\eta K'}\right)\cdots\cdot$$

und

$$6.\quad \mathrm{Hl}\,u = \sqrt{k'}.\left(1+\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Sin}^2\eta K'}\right)\left(1+\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Sin}^2 3\eta K'}\right)\left(1+\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Sin}^2 5\eta K'}\right)\left(1+\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Sin}^2 7\eta K'}\right)\cdots\cdot$$

Die Producte (1.) und (2.) lassen sich auf ähnliche Art noch anders darstellen.

Nach §. 169. ist $a^2=\sqrt[3]{\frac{kk'}{4\eta'^3 p}}$ und nach §. 172. ist $g'=\sqrt[3]{\frac{\sqrt{kk'}}{2\sqrt{p}}}$; folglich ist $a^2.g'=\frac{\sqrt{(kk')}}{2\eta'\sqrt{p}}$. Da aber

$$\frac{\mathfrak{Al}'u}{a^2.g'} = 2\sqrt{p}\,\mathfrak{Sin}\,\eta' u\,\frac{(1-2p^4\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u+p^8)(1-2p^8\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u+p^{16})\cdots\cdot}{(1-p^4)^2.(1-p^8)^2\cdots\cdot}$$

ist, so ist

$$\mathfrak{Al}'u = \sqrt{(kk')}.\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\eta'}\cdot\frac{1-2p^4\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u+p^8}{(1-p^4)^2}\cdot\frac{1-2p^8\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u+p^{16}}{(1-p^8)^2}\cdots,$$

folglich

$$\mathrm{Al}'u = \sqrt{(kk')}.\frac{\sin\eta u}{\eta}\cdot\frac{1-2p^4\cos 2\eta u+q^8}{(1-q^4)^2}\cdot\frac{1-2q^8\cos 2\eta u+q^{16}}{(1-q^8)^2}\cdots,$$

oder auch

7. $\mathrm{Al}\,u = \sqrt{(kk')}.\frac{\sin\eta u}{\eta}.\left(1+\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Sin}^2 2\eta K'}\right)\left(1+\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Sin}^2 4\eta K'}\right)\left(1+\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Sin}^2 6\eta K'}\right)\ldots$ und

8. $\mathrm{Bl}\,u = \sqrt{(kk')}.\frac{\cos\eta u}{\eta}.\left(1+\frac{\cos^2\eta u}{\mathfrak{Sin}^2 2\eta K'}\right)\left(1+\frac{\cos^2\eta u}{\mathfrak{Sin}^2 4\eta K'}\right)\left(1+\frac{\cos^2\eta u}{\mathfrak{Sin}^2 6\eta K'}\right)\ldots$

Aus den Formeln (1.) bis (8.) ergeben sich durch das bekannte Verfahren die Producte für die hyperbolischen Hülfs-Functionen.

§. 187.

Da $\mathrm{Al}\,\frac{1}{2}K = \mathrm{Bl}\,\frac{1}{2}K$ und $\mathrm{Gl}\,\frac{1}{2}K = \mathrm{Hl}\,\frac{1}{2}K$ ist, so gelangen wir noch zu einer neuen Umformung der unendlichen Producte, indem wir $u = \frac{1}{2}K$ setzen. Ist zur Abkürzung

$$\alpha = \mathrm{Al}(\tfrac{1}{2}K) = \mathrm{Bl}(\tfrac{1}{2}K) \quad \text{und} \quad \beta = \mathrm{Gl}(\tfrac{1}{2}K) = \mathrm{Hl}(\tfrac{1}{2}K),$$

so erhalten wir, da $\eta u = \frac{1}{4}\pi$, also $2\eta u = \frac{1}{2}\pi$ ist, wenn $u = \frac{1}{2}K$ genommen wird,

$$\frac{\alpha}{g} = \sqrt{2}\,q.(1+q^8)(1+q^{16})(1+q^{24})(1+q^{32})\ldots \text{ und}$$

$$\frac{\beta}{g} = (1+q^4)(1+q^{12})(1+q^{20})\ldots$$

Dividirt man hierdurch die Gleichungen (2.) bis (5.) §. 171., so erhält man

$$\frac{\mathrm{Al}\,u}{\alpha} = \sqrt{2}.\sin\eta u.\frac{1-2q^4\cos 2\eta u+q^8}{1+q^8}.\frac{1-2q^8\cos 2\eta u+q^{16}}{1+q^{16}}.\frac{1-2q^{12}\cos 2\eta u+q^{24}}{1+q^{24}}$$

oder

$$\mathrm{Al}\,u = \alpha\sqrt{2}.\sin\eta u.\left(1-\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta K'}\right)\left(1-\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,8\eta K'}\right)\left(1-\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,12\eta K'}\right)\ldots,$$

$$\mathrm{Bl}\,u = \alpha\sqrt{2}.\cos\eta u.\left(1+\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta K'}\right)\left(1+\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,8\eta K'}\right)\left(1+\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,12\eta K'}\right)\ldots$$

Die Factoren dieser Producte convergiren aufs rascheste gegen die Grenze Eins. Eben so erhält man noch

$$\mathrm{Gl}\,u = \beta.\left(1+\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta K'}\right)\left(1+\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,6\eta K'}\right)\left(1+\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,10\eta K'}\right)\ldots,$$

$$\mathrm{Hl}\,u = \beta.\left(1-\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta K'}\right)\left(1-\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,6\eta K'}\right)\left(1-\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,10\eta K'}\right)\ldots$$

Es bleibt nur noch die Bestimmung von α und β übrig. Nach Formel (5.) §. 183. ist $\mathrm{lm}\,\frac{1}{2}K = \frac{1}{8}EK + \log\frac{\mathrm{Hl}(\frac{1}{2}K)}{\sqrt{k'}} = \frac{1}{8}EK + \log\frac{\beta}{\sqrt{k'}}$; und nach §. 73. ist $\mathrm{lm}\,\frac{1}{2}K = \frac{1}{8}EK + \log\sqrt[4]{\left(\frac{1+k'}{2\sqrt{k'^3}}\right)}$; also ist

$$\beta = \sqrt{k'}.\sqrt[4]{\frac{1+k'}{2\sqrt{k'^3}}} \quad \text{oder} \quad \beta = \sqrt[4]{\left(\frac{1+k'}{2}.\sqrt{k'}\right)}.$$

Da $\mathrm{Al}\,u = \sqrt{k}.\mathrm{sn}\,u.\mathrm{Hl}\,u$ ist, so ist $\alpha = \sqrt{k}.\mathrm{sn}\tfrac{1}{2}K.\beta$. Da aber $\mathrm{sn}\tfrac{1}{2}K = \sqrt{\frac{1}{1+k'}}$ ist, so ist $\alpha = \sqrt[4]{\frac{1-k'^2}{(1+k')^2}}.\beta = \beta\sqrt[4]{\frac{1-k'}{1+k'}}$ und also

$$\alpha = \sqrt[4]{(\tfrac{1}{2}(1-k').\sqrt{k'})}.$$

Werden diese Werthe substituirt, so haben wir die Producte:

$$1.\quad \mathrm{Al}\,u = \sqrt[4]{[(1-k').2\sqrt{k'}]}\sin\eta u.\left(1-\frac{\cos 2\eta u}{\mathrm{Cos}\,4\eta K'}\right)\left(1-\frac{\cos 2\eta u}{\mathrm{Cos}\,8\eta K'}\right)\left(1-\frac{\cos 2\eta u}{\mathrm{Cos}\,12\eta K'}\right) \times\left(1-\frac{\cos 2\eta u}{\mathrm{Cos}\,16\eta K'}\right)\ldots,$$

$$2.\quad \mathrm{Bl}\,u = \sqrt[4]{[(1-k').2\sqrt{k'}]}\cos\eta u.\left(1+\frac{\cos 2\eta u}{\mathrm{Cos}\,4\eta K'}\right)\left(1+\frac{\cos 2\eta u}{\mathrm{Cos}\,8\eta K'}\right)\left(1+\frac{\cos 2\eta u}{\mathrm{Cos}\,12\eta K'}\right) \times\left(1+\frac{\cos 2\eta u}{\mathrm{Cos}\,16\eta K'}\right)\ldots,$$

$$3.\quad \mathrm{Gl}.u = \sqrt[4]{\left[\frac{1+k'}{2}.\sqrt{k'}\right]}.\left(1+\frac{\cos 2\eta u}{\mathrm{Cos}\,2\eta K'}\right)\left(1+\frac{\cos 2\eta u}{\mathrm{Cos}\,6\eta K'}\right)\left(1+\frac{\cos 2\eta u}{\mathrm{Cos}\,10\eta K'}\right) \times\left(1+\frac{\cos 2\eta u}{\mathrm{Cos}\,14\eta K'}\right)\ldots,$$

$$4.\quad \mathrm{Hl}\,u = \sqrt[4]{\left[\frac{1+k'}{2}.\sqrt{k'}\right]}\ \left(1-\frac{\cos 2\eta u}{\mathrm{Cos}\,2\eta K'}\right)\left(1-\frac{\cos 2\eta u}{\mathrm{Cos}\,6\eta K'}\right)\left(1-\frac{\cos 2\eta u}{\mathrm{Cos}\,10\eta K'}\right) \times\left(1-\frac{\cos 2\eta u}{\mathrm{Cos}\,14\eta K'}\right)\ldots.$$

Vertauschen wir in diesen Formeln die beiden conjugirten Moduln, und setzen wir ui statt u, so erhalten wir noch

$$\mathfrak{A}\mathrm{l}'u = \sqrt[4]{((1-k).2\sqrt{k})}.\mathrm{Sin}\,\eta' u.\left(1-\frac{\mathrm{Cos}\,2\eta' u}{\mathrm{Cos}\,4\eta' K}\right)\left(1-\frac{\mathrm{Cos}\,2\eta' u}{\mathrm{Cos}\,8\eta' K}\right)\left(1-\frac{\mathrm{Cos}\,2\eta' u}{\mathrm{Cos}\,12\eta' K}\right) \times\left(1-\frac{\mathrm{Cos}\,2\eta' u}{\mathrm{Cos}\,16\eta' K}\right)\ldots,$$

$$\mathfrak{B}\mathrm{l}'u = \sqrt[4]{((1-k).2\sqrt{k})}.\mathrm{Cos}\,\eta' u.\left(1+\frac{\mathrm{Cos}\,2\eta' u}{\mathrm{Cos}\,4\eta' K}\right)\left(1+\frac{\mathrm{Cos}\,2\eta' u}{\mathrm{Cos}\,8\eta' K}\right)\left(1+\frac{\mathrm{Cos}\,2\eta' u}{\mathrm{Cos}\,12\eta' K}\right) \times\left(1+\frac{\mathrm{Cos}\,2\eta' u}{\mathrm{Cos}\,16\eta' K}\right)\ldots,$$

$$\mathfrak{G}\mathrm{l}'u - \sqrt[4]{\left(\frac{1+k}{2}.\sqrt{k}\right)}\ \left(1+\frac{\mathrm{Cos}\,2\eta' u}{\mathrm{Cos}\,2\eta' K}\right)\left(1+\frac{\mathrm{Cos}\,2\eta' u}{\mathrm{Cos}\,6\eta' K}\right)\left(1+\frac{\mathrm{Cos}\,2\eta' u}{\mathrm{Cos}\,10\eta' K}\right)\ldots,$$

$$\mathfrak{H}\mathrm{l}'u = \sqrt[4]{\left(\frac{1+k}{2}.\sqrt{k}\right)}.\left(1-\frac{\mathrm{Cos}\,2\eta' u}{\mathrm{Cos}\,2\eta' K}\right)\left(1-\frac{\mathrm{Cos}\,2\eta' u}{\mathrm{Cos}\,6\eta' K}\right)\left(1-\frac{\mathrm{Cos}\,2\eta' u}{\mathrm{Cos}\,10\eta' K}\right)\ldots.$$

Da nun bekanntlich

$$\mathrm{Cos}\,A + \mathrm{Cos}\,B = 2\,\mathrm{Cos}\,\frac{A+B}{2}\,\mathrm{Cos}\,\frac{A-B}{2} \quad \text{und}$$

$$\mathrm{Cos}\,A - \mathrm{Cos}\,B = 2\,\mathrm{Sin}\,\frac{A+B}{2}\,\mathrm{Sin}\,\frac{A-B}{2}$$

ist, so können die obigen Producte auch also dargestellt werden:

$$5.\quad \mathfrak{Al}'u=\sqrt[4]{((1-k)\,2\sqrt{k})}\,\mathrm{Sin}\,\eta'u.\frac{\mathrm{Sin}(2\eta'K+\eta'u)\,\mathrm{Sin}(2\eta'K-\eta'u)}{\frac{1}{2}\mathrm{Cos}\,4\eta'K}$$
$$\times\frac{\mathrm{Sin}(4\eta'K+\eta'u)\,\mathrm{Sin}(4\eta'K-\eta'u)}{\frac{1}{2}\mathrm{Cos}\,8\eta'K}.\frac{\mathrm{Sin}(6\eta'K+\eta'u)\,\mathrm{Sin}(6\eta'K-\eta'u)}{\frac{1}{2}\mathrm{Cos}\,12\eta'K}\ldots,$$

$$6.\quad \mathfrak{Bl}'u=\sqrt[4]{((1-k)\,2\sqrt{k})}\,\mathrm{Cos}\,\eta'u.\frac{\mathrm{Cos}(2\eta'K+\eta'u)\,\mathrm{Cos}\,(2\eta'K-\eta'u)}{\frac{1}{2}\mathrm{Cos}\,4\eta'K}$$
$$\times\frac{\mathrm{Cos}\,(4\eta'K+\eta'u)\,\mathrm{Cos}\,(2\eta'K-\eta'u)}{\frac{1}{2}\mathrm{Cos}\,8\eta'K}.\frac{\mathrm{Cos}\,(6\eta'K+\eta'u)\,\mathrm{Cos}\,(6\eta'K-\eta'u)}{\frac{1}{2}\mathrm{Cos}\,12\eta'K}\ldots,$$

$$7.\quad \mathfrak{Cl}'u=\sqrt[4]{\left(\frac{1+k}{2}.\sqrt{k}\right)}.\frac{\mathrm{Cos}\,(\eta'K+\eta'u)\,\mathrm{Cos}\,(\eta'K-\eta'u)}{\frac{1}{2}\mathrm{Cos}\,2\eta'K}$$
$$\times\frac{\mathrm{Cos}\,(3\eta'K+\eta'u)\,\mathrm{Cos}\,(3\eta'K-\eta'u)}{\frac{1}{2}\mathrm{Cos}\,6\eta'K}.\frac{\mathrm{Cos}\,(5\eta'K+\eta'u)\,\mathrm{Cos}\,(5\eta'K-\eta'u)}{\frac{1}{2}\mathrm{Cos}\,10\eta'K}\ldots,$$

$$8.\quad \mathfrak{Hl}'u=\sqrt[4]{\left(\frac{1+k}{2}.\sqrt{k}\right)}.\frac{\mathrm{Sin}\,(\eta'K+\eta'u)\,\mathrm{Sin}\,(\eta'K-\eta'u)}{\frac{1}{2}\mathrm{Cos}\,2\eta'K}$$
$$\times\frac{\mathrm{Sin}\,(3\eta'K+\eta'u)\,\mathrm{Sin}\,(3\eta'K-\eta'u)}{\frac{1}{2}\mathrm{Cos}\,6\eta'K}.\frac{\mathrm{Sin}\,(5\eta'K+\eta'u)\,\mathrm{Sin}\,(5\eta'K-\eta'u)}{\frac{1}{2}\mathrm{Cos}\,10\eta'K}\ldots$$

Hiernach lassen sich die Werthe der hyperbolischen Hülfs-Functionen sehr leicht mittelst der Logarithmen berechnen.

Zusatz. Aus den vorstehenden Producten erhält man sofort

$$9.\quad \mathrm{sn}\,u=\frac{1}{\sqrt{k}}\mathrm{Tang}\,\eta'u.\{\mathrm{Tang}\,(2\eta'K+\eta'u).\mathrm{Tang}\,(2\eta'K-\eta'u)\}$$
$$\times\{\mathrm{Tang}\,(4\eta'K+\eta'u).\mathrm{Tang}\,(4\eta'K-\eta'u)\}$$
$$\times\{\mathrm{Tang}\,(6\eta'K+\eta'u).\mathrm{Tang}\,(6\eta'K-\eta'u)\}\ldots$$

$$10.\quad \mathrm{snc}\,u=\frac{1}{\sqrt{k}}.\{\mathrm{Tang}\,(\eta'K+\eta'u)\,\mathrm{Tang}\,(\eta'K-\eta'u)\}$$
$$\times\{\mathrm{Tang}\,(3\eta'K+\eta'u).\mathrm{Tang}\,(3\eta'K-\eta'u)\}$$
$$\times\{\mathrm{Tang}\,(5\eta'K+\eta'u).\mathrm{Tang}\,(5\eta'K-\eta'u)\}\ldots,$$

und hiernach lassen sich $\mathrm{sn}\,u$ und $\mathrm{snc}\,u$ sehr bequem berechnen.

Ferner ist $\sqrt{k'}\,\mathrm{tn}\,u=\mathrm{tang}\,\eta u\left(\frac{\mathrm{Cos}4\eta K'-\cos 2\eta u}{\mathrm{Cos}4\eta K'+\cos 2\eta u}.\frac{\mathrm{Cos}8\eta K'-\cos 2\eta u}{\mathrm{Cos}8\eta K'+\cos 2\eta u}\ldots\right)$.

Nimmt man also auf beiden Seiten die natürlichen Logarithmen und beachtet, dafs $\log\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}=\mathrm{ArcTang}\left(\frac{b}{a}\right)$ ist, so hat man

$$11.\quad \log\mathrm{tn}\,u=\log\left(\frac{\mathrm{tang}\,\eta u}{\sqrt{k'}}\right)-2\,\mathrm{ArcTang}\left(\frac{\cos 2\eta u}{\mathrm{Cos}4\eta K'}\right)-2\,\mathrm{ArcTang}\left(\frac{\cos 2\eta u}{\mathrm{Cos}\,8\eta K'}\right)$$
$$-2\,\mathrm{ArcTang}\left(\frac{\cos 2\eta u}{\mathrm{Cos}12\eta K'}\right)-\ldots$$

Eben so findet man noch

$$12.\quad \log\mathrm{dn}\,u=\log\sqrt{k'}+2\,\mathrm{ArcTang}\left(\frac{\cos 2\eta u}{\mathrm{Cos}2\eta K'}\right)+2\,\mathrm{ArcTang}\left(\frac{\cos 2\eta u}{\mathrm{Cos}6\eta K'}\right)$$
$$+2\,\mathrm{ArcTang}\left(\frac{\cos 2\eta u}{\mathrm{Cos}10\eta K'}\right)+\ldots$$

Statt der Formeln (9.) und (10.) können auch die beiden folgenden genommen werden:

$$13. \quad \log \operatorname{sn} u = \log\left(\frac{\mathfrak{Tang}\,\eta' u}{\sqrt{k}}\right) - 2\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathfrak{Cos}\,2\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta' K}\right) - 2\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathfrak{Cos}\,2\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,8\eta' K}\right) - 2\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathfrak{Cos}\,2\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,12\eta' K}\right) \ldots.$$

$$14. \quad \log \operatorname{snc} u = \log \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathfrak{Cos}\,2\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta' K}\right) - 2\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathfrak{Cos}\,2\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,6\eta' K}\right) - 2\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathfrak{Cos}\,2\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,10\eta' K}\right) - \ldots.$$

welche man erhält, wenn man in den beiden Formeln (11.) und (12.) ui für u setzt, und die beiden conjugirten Moduln mit einander vertauscht. Die Formeln (9.) bis (14.) sind wegen ihrer raschen Convergenz merkwürdig.

§. 188.

Entwickelung der acht Hülfs-Functionen in Reihen, welche nach Potenzial-Functionen des vervielfachten Argumentes fortschreiten.

Es ist nach §. 170. die Function

$$\frac{\mathfrak{Gl}' u}{g'} = (1+2p^2\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u + p^4)(1+2p^6\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u + p^{12})(1+2p^{10}\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u + p^{20}) \ldots.$$

Setzt man wieder $e^{\eta' u} = x$, also $2\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u = x^2 + x^{-2}$, so ist

$$\frac{\mathfrak{Gl}' u}{g'} = \{(1+p^2x^2)(1+p^6x^2)(1+p^{10}x^2)\ldots\}.\{(1+p^2x^{-2})(1+p^6x^{-2})(1+p^{10}x^{-2})\ldots\}.$$

Entwickelt man das Product $(1+p^2x^2)(1+p^6x^2)(1+p^2x^2)\ldots$ nach steigenden Potenzen von x^2, so sind in der gefundenen Reihe alle Coefficienten positiv, und setzt man in ihr x^{-2} für x^2, so erhält man eine ähnliche Reihe, welche nach Potenzen von x^{-2} fortschreitet, und das Product beider Reihen hat also die Form

$$\mathfrak{Gl}' u = a + \overset{1}{a}(x^2+x^{-2}) + \overset{2}{a}(x^4+x^{-4}) + \overset{3}{a}(x^6+x^{-6}) \ldots,$$

in welcher die unbekannten Coefficienten $a, \overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a}$ etc., welche von x unabhängig sind, zu ermitteln übrig bleiben. Man kann leicht eine Recursions-Formel zur Berechnung dieser Coefficienten ermitteln. Nach §. 173. ist $\mathfrak{Gl}'(u+2K) = e^{\lambda(u+2K)^2 - \lambda u^2}.\mathfrak{Gl}' u$, wenn $\lambda = \frac{\pi}{4KK'}$, gesetzt wird; da aber $(n+2K)^2 - u^2 = 4uK + 4K^2$, also $\lambda(u+2K)^2 - \lambda u^2 = 2\eta'(K+u)$, folglich $e^{\lambda(u+2K)^2 - \lambda u^2} = e^{2\eta' K}.e^{2\eta' u} = \frac{x^2}{p^2}$ ist, so ist

$$\mathfrak{Gl}'(u+2K) = \frac{x^2}{p^2}.\mathfrak{Gl}' u.$$

Setzt man $u+2K$ statt u, so verwandelt sich $x=e^{\eta'u}$ in $e^{\eta'u}.e^{2\eta'K}$ oder x in $\frac{x}{p^2}$; daher ist

$$\begin{aligned}\mathfrak{Gl}'(u+2K) = a + \frac{\overset{1}{a}}{p^4}x^2 + \frac{\overset{2}{a}}{p^8}x^4 + \frac{\overset{3}{a}}{p^{12}}x^6 + \dots\\ + \overset{1}{a}p^4x^{-2} + \overset{2}{a}p^8x^{-4} + \overset{3}{a}p^{12}x^{-6} + \dots,\end{aligned}$$

und da $p^2.\mathfrak{Gl}'(u+2K) = x^2.\mathfrak{Gl}'u$ sein soll, so ist

$$\left.\begin{aligned}\overset{1}{a} + ax^2 + \overset{1}{a}x^4 + \overset{2}{a}x^6 + \overset{3}{a}x^8\dots\\ + \overset{2}{a}x^{-2} + \overset{3}{a}x^{-4} + \overset{4}{a}x^{-6} + \overset{5}{a}x^{-8}\dots\end{aligned}\right\}$$

$$= \left\{\begin{aligned}ap^2 + \frac{\overset{1}{a}}{p^2}x^2 + \frac{\overset{2}{a}}{p^6}x^4 + \frac{\overset{3}{a}}{p^{10}}x^6 + \frac{\overset{4}{a}}{p^{14}}x^8 + \dots\\ + \overset{1}{a}p^6x^{-2} + \overset{2}{a}p^{10}x^{-4} + \overset{3}{a}p^{14}x^{-6} + \overset{4}{a}p^{18}x^{-8} + \dots\end{aligned}\right.$$

Diese Gleichung mufs in eine Identität übergehen. Identificiren wir die beiden oberen Horizontal-Reihen, und setzen also

$$\overset{1}{a} = a.p^2,\quad \overset{2}{a} = \overset{1}{a}.p^6,\quad \overset{3}{a} = \overset{2}{a}.p^{10},\quad \overset{4}{a} = \overset{3}{a}.p^{14} \text{ u. s. w.}$$

so sind von selbst auch die beiden unteren Horizontal-Reihen und also die ganzen Reihen selbst identisch. Aus den gefundenen Gleichungen können die unbekannten Coefficienten, mit Ausnahme des ersten a, welchen wir durch $\varphi(k')$ bezeichnen wollen, weil er nur von dem Modul k' abhängt, leicht berechnet werden. Wir erhalten durch Zusammensetzung:

$$\overset{1}{a} = p^2.\varphi(k'),\ \overset{2}{a} = p^8.\varphi(k'),\ \overset{3}{a} = p^{18}.\varphi(k'),\ \overset{4}{a} = p^{32}.\varphi(k'), \text{ u. s. w.}$$

Der allgemeine Ausdruck dieser Coefficienten ist

$$\overset{n}{a} = p^{2nn}.\varphi(k').$$

Werden die gefundenen Werthe substituirt, so hat man

$$\frac{\mathfrak{Gl}'u}{\varphi(k')} = 1 + p^2(x^2+x^{-2}) + p^8(x^4+x^{-4}) + p^{18}(x^6+x^{-6}) + p^{32}(x^8+x^{-8}) + \dots$$

oder

$$\frac{\mathfrak{Gl}'u}{\varphi(k')} = 1 + 2p^2\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'u + 2p^8\,\mathfrak{Cos}\,4\eta'u + 2p^{18}\,\mathfrak{Cos}\,6\eta'u + 2p^{32}\,\mathfrak{Cos}\,8\eta'u + \dots$$

Das allgemeine Glied dieser Reihe ist $2p^{\frac{nn}{2}}.\mathfrak{Cos}(n\eta'u)$, wenn durch n eine gerade Zahl bezeichnet wird. Da $\mathfrak{Gl}'(u+iK') = \mathfrak{Hl}'u$ ist, und $\eta'u$ sich in $\eta'u + \frac{\pi i}{2}$ verwandelt, wenn $u+iK'$ statt u gesetzt wird, so erhalten wir noch

$$\frac{\mathfrak{Hl}'u}{\varphi(k')} = 1 - 2p^2\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'u + 2p^8\,\mathfrak{Cos}\,4\eta'u - 2p^{18}\,\mathfrak{Cos}\,6\eta'u + 2p^{32}\,\mathfrak{Cos}\,8\eta'u - + \dots$$

Vertauschen wir in diesen Formeln die beiden conjugirten Moduln mit einander, wodurch sich $\Phi(k')$ in $\Phi(k)$ verwandelt, und setzen wir ui statt u, so erhalten wir

$$\frac{\mathrm{Gl}\,u}{\varphi(k)} = 1 + 2p^2\cos 2\eta u + 2q^8\cos 4\eta u + 2q^{18}\cos 6\eta u + 2q^{32}\cos 8\eta u + \ldots,$$

$$\frac{\mathrm{Hl}\,u}{\varphi(k)} = 1 - 2q^2\cos 2\eta u + 2q^8\cos 4\eta u - 2q^{18}\cos 6\eta u + 2q^{32}\cos 8\eta u - + \ldots$$

Setzen wir in diesen beiden Reihen $u = o$, so erhalten wir

$$\frac{1}{\varphi(k)} = 1 + 2q^2 + 2q^8 + 2q^{18} + 2q^{32} + 2q^{50} + 2q^{72} + \ldots,$$

$$\frac{\sqrt{k'}}{\varphi(k)} = 1 - 2q^2 + 2q^8 - 2q^{18} + 2q^{32} - 2q^{50} + 2q^{72} - + \ldots$$

Durch Addition dieser beiden Gleichungen erhält man

$$\frac{1+\sqrt{k'}}{2\varphi(k)} = 1 + 2q^8 + 2q^{32} + 2q^{72} + \ldots$$

Dieselbe Reihe findet man, wenn man in der Reihe für $\frac{1}{\varphi(k)}$ q^4 statt q setzt, und also §. 168. gemäſs den Modul k zweimal nach einander verkleinert.

Setzen wir aber $k_1 = \frac{1-k'}{1+k'}$, also $k_1' = \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}$; ferner $k_2 = \frac{1-k_1'}{1+k_1'} = \left(\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}\right)^2$, so ist $\frac{1+\sqrt{k'}}{2\varphi(k)} = \frac{1}{\varphi(k_2)}$. Bezeichnen wir die zu den Moduln k, k_1, k_2 gehörigen Modular-Quadranten mit K, K_1, K_2, wie in §. 55., so ist $K_1 = \frac{1+k'}{2}.K$ und $K_2 = \frac{1+k_1'}{2}.K_1 = \frac{(1+\sqrt{k'})^2}{2(1+k')}.K_1$, also $K_2 = \frac{(1+\sqrt{k'})^2}{4}.K$, oder

$$\sqrt{K_2} = \frac{1+\sqrt{k'}}{2}\sqrt{K}.$$

Wird diese Gleichung mit der vorigen verbunden, so erhält man

$$\Phi(k).\sqrt{K} = \Phi(k_2).\sqrt{K_2}.$$

Wird die Verkleinerung des Moduls weiter fortgesetzt, so ist überhaupt $\Phi(k).\sqrt{K} = \Phi(k_{2r}).\sqrt{K_{2r}}$, und wird r groſs genug genommen, so ist $k_{2r} = o$, also $K_{2r} = \frac{1}{2}\pi$, folglich ist $\Phi(k).\sqrt{K_2} = \Phi(o).\sqrt{\frac{1}{2}\pi}$. Da nun

$$\frac{1}{\varphi(k_{2r})} = 1 + 2q^{4r} + 2q^{16r} + \ldots = 1$$

wird, so ist

$$\Phi(k).\sqrt{K} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\pi} \quad \text{oder} \quad \Phi(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2K}} = \sqrt{\eta} \quad \text{und} \quad \Phi(k') = \sqrt{\eta'}.$$

Hiernach ist also

1. $\sqrt{K} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\pi}.(1+2q^2+2q^8+2q^{18}+2q^{32}+2q^{50}+2q^{72}+\ldots.+2q^{2nn}\ldots.),$

2. $\sqrt{(k'K)} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\pi}.(1-2q^2+2q^8-2q^{18}+2q^{32}-2q^{50}+2q^{72}-+\ldots.+(-1)^n.2q^{2nn}\ldots.),$

3. $\dfrac{\mathfrak{Gl}'u}{\sqrt{\eta'}} = 1+2p^2\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'u+2p^8\,\mathfrak{Cos}\,4\eta'u+2p^{18}\,\mathfrak{Cos}\,6\eta'u+2p^{32}\,\mathfrak{Cos}\,8\eta'u$
$+2p^{50}\,\mathfrak{Cos}\,10\eta'u+\ldots.,$

4. $\dfrac{\mathfrak{Hl}'u}{\sqrt{\eta'}} = 1-2p^2\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'u+2p^8\,\mathfrak{Cos}\,4\eta'u-2p^{18}\,\mathfrak{Cos}\,6\eta'u+2p^{32}\,\mathfrak{Cos}\,8\eta'u$
$-2p^{50}\,\mathfrak{Cos}\,10\eta'u+\ldots.,$

5. $\dfrac{\mathrm{Gl}\,u}{\sqrt{\eta}} = 1+2q^2\cos 2\eta u+2q^8\cos 4\eta u+2q^{18}\cos 6\eta u+2q^{32}\cos 8\eta u$
$+2q^{50}\cos 10\eta u+\ldots.,$

6. $\dfrac{\mathrm{Hl}\,u}{\sqrt{\eta}} = 1-2q^2\cos 2\eta u+2q^8\cos 4\eta u-2q^{18}\cos 6\eta u+2q^{32}\cos 8\eta u$
$-2q^{50}\cos 10\eta u+-\ldots.$

Zusatz. Aus den Formeln (1.) und (2.) folgt durch Division:

$$\sqrt{k'} = \frac{1-2q^2+2q^8-2q^{18}+2q^{32}-+\ldots.}{1+2q^2+2q^8+2q^{18}+3q^{32}+\ldots.}.$$

Nimmt man statt des Moduls k, dem §. 168. gemäfs, den nächst gröfseren, indem man $\sqrt{q}$ statt q setzt, so hat man $\frac{1-k}{1+k}$ für k' zu setzen, und es ist also

$$\sqrt{\frac{1-k}{1+k}} = \frac{1-2q+2q^4-2q^9+2q^{16}-+\ldots.}{1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}+\ldots.}.$$

Setzt man nun $k=\sin\theta$, und nimmt auf beiden Seiten die natürlichen Logarithmen, so erhält man die merkwürdige Formel

7. $$\mathfrak{L}\theta = 2\,\mathfrak{L}\,\mathrm{arc}\sin\left(\frac{2q+2q^9+2q^{25}+2q^{49}+2q^{81}+\ldots.}{1+2q^4+2q^{16}+2q^{36}+2q^{64}+2q^{100}+\ldots.}\right).$$

Setzt man aber noch $\frac{ik}{k'} = i\,\mathrm{tang}\,\theta$ statt k, also qi statt q, so erhält man

8. $$\theta = 2\,\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{2q+2q^9+2q^{25}+2q^{49}+2q^{81}+\ldots.}{1+2q^4+2q^{16}+2q^{36}+2q^{64}+2q^{100}+\ldots.}\right).$$

Diese Formel ist jedoch von der vorigen kaum verschieden, da bekanntlich $\mathfrak{Tang}\,\tfrac{1}{2}\mathfrak{L}\theta = \mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\theta$ ist.

§. 189.

Die nach Functionen des vervielfachten Arcus $\eta'u$ fortschreitenden Reihen für $\mathfrak{Bl}'u$ und $\mathfrak{Al}'u$ lassen sich leicht aus den früheren herleiten. Nach §. 173. ist

$$\mathfrak{Gl}'(K-u) = e^{\eta(\frac{1}{2}K-u)}.\mathfrak{Bl}'u,\quad \text{oder auch}\quad \mathfrak{Gl}'(K-u) = \frac{1}{x\sqrt{p}}.\mathfrak{Bl}'u,$$

folglich

$$\mathfrak{Bl}'u = x\sqrt{p}.\mathfrak{Gl}'(K-u).$$

Setzt man aber in der Reihe

$$\frac{\mathfrak{Gl}'u}{\sqrt{\eta'}} = 1 + p^2(x^2 + x^{-2}) + p^8(x^4 + x^{-4}) + p^{18}(x^6 + x^{-6}) + \ldots.$$

wirklich $K - u$ statt u, also $\frac{1}{px}$ statt x, so erhält man

$$\frac{\mathfrak{Gl}'(K-u)}{\sqrt{\eta'}} = 1 + \begin{array}{l} x^{-2} + p^4 x^{-4} + p^{12} x^{-6} + p^{24} x^{-8} + \ldots. \\ p^4 x^2 + p^{12} x^4 + p^{24} x^6 + p^{40} x^8 + \ldots, \end{array}$$

also

$$\frac{\mathfrak{Bl}'u}{\sqrt{\eta'}} = x\sqrt{p}.\frac{\mathfrak{Gl}'(K-u)}{\sqrt{\eta'}} = \begin{array}{l} p^{\frac{1}{2}}x + p^{\frac{9}{2}}x^3 + p^{\frac{25}{2}}x^5 + p^{\frac{49}{2}}x^7 + \ldots. \\ + p^{\frac{1}{2}}x^{-1} + p^{\frac{9}{2}}x^{-3} + p^{\frac{25}{2}}x^{-5} + p^{\frac{49}{2}}x^{-7} + \ldots, \end{array}$$

oder

1. $$\frac{\mathfrak{Bl}'u}{\sqrt{\eta'}} = 2p^{\frac{1}{2}}\mathfrak{Cos}\,\eta'u + 2p^{\frac{9}{2}}\mathfrak{Cos}\,3\eta'u + 2p^{\frac{25}{2}}\mathfrak{Cos}\,5\eta'u + 2p^{\frac{49}{2}}\mathfrak{Cos}\,7\eta'u + \ldots.$$

Setzt man in dieser Reihe noch $u + iK'$ statt u, also $\eta'u + \frac{1}{2}\pi i$ statt $\eta'u$, und erinnert sich, daſs nach §. 170. $\mathfrak{Bl}'(u + iK') = i.\mathfrak{Al}'u$ ist, so erhält man

2. $$\frac{\mathfrak{Al}'u}{\sqrt{\eta'}} = 2p^{\frac{1}{2}}\mathfrak{Sin}\,\eta'u - 2p^{\frac{9}{2}}\mathfrak{Sin}\,3\eta'u + 2p^{\frac{25}{2}}\mathfrak{Sin}\,5\eta'u - 2p^{\frac{49}{2}}\mathfrak{Sin}\,7\eta'u + - \ldots.$$

Für die cyklischen Functionen erhält man hieraus sogleich

3. $$\frac{\mathrm{Bl}\,u}{\sqrt{\eta}} = 2q^{\frac{1}{2}}\cos\eta u + 2q^{\frac{9}{2}}\cos 3\eta u + 2q^{\frac{25}{2}}\cos 5\eta u + 2q^{\frac{49}{2}}\cos 7\eta u + 2q^{\frac{81}{2}}\cos 9\eta u + \ldots,$$

4. $$\frac{\mathrm{Al}\,u}{\sqrt{\eta}} = 2q^{\frac{1}{2}}\sin\eta u - 2q^{\frac{9}{2}}\sin 3\eta u + 2q^{\frac{25}{2}}\sin 5\eta u - 2q^{\frac{49}{2}}\sin 7\eta u + 2q^{\frac{81}{2}}\sin 9\eta u - + \ldots.$$

Setzt man in der Reihe (3.) noch $u = o$, so erhält man

5. $$\sqrt{(kK)} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\pi}.(2q^{\frac{1}{2}} + 2q^{\frac{9}{2}} + 2q^{\frac{25}{2}} + 2q^{\frac{49}{2}} + 2q^{\frac{81}{2}} + \ldots),\ \text{also}$$

6. $$\sqrt{\tang\theta} = \sqrt{\frac{k}{k'}} = \frac{2q^{\frac{1}{2}} + 2q^{\frac{9}{2}} + 2q^{\frac{25}{2}} + 2q^{\frac{49}{2}} + 2q^{\frac{81}{2}} + \ldots}{1 - 2q^2 + 2q^8 - 2q^{18} + 2q^{32} - 2q^{50} + 2q^{72} - + \ldots}.$$

Zusatz. Da $g' = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{(kk')}}{2\sqrt{p}}}$ ist, so ist $\frac{\sqrt{\eta'}}{g'} = \sqrt[6]{\frac{\eta'^3.p}{kk'}}$, und also

$$\frac{\sqrt{\eta'}}{g'} = \frac{1}{(1-p^4)(1-p^8)(1-p^{12})(1-p^{16})\ldots}.$$

Multiplicirt man hiermit die Gleichungen (3.) und (4.) §. 188. und die Gleichungen (1.) und (2.) §. 189., so hat man, wenn man für $\frac{\mathfrak{Al}'u}{g'}$, $\frac{\mathfrak{Bl}'u}{g'}$, $\frac{\mathfrak{Gl}'u}{g'}$, $\frac{\mathfrak{Hl}'u}{g'}$ die Werthe aus §. 170., ferner $\frac{u}{\eta'}$ statt u setzt, die folgenden vier Gleichungen:

7. $2\sqrt{p}.\mathrm{Sin}\,u(1-2p^4\mathrm{Cos}2u+p^8)(1-2p^8\mathrm{Cos}2u+p^{16})(1-2p^{12}\mathrm{Cos}2u+p^{24})\ldots$
$$= \frac{2p^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{Sin}\,u-2p^{\frac{9}{2}}\,\mathrm{Sin}\,3u+2p^{\frac{25}{2}}\,\mathrm{Sin}\,5u-2p^{\frac{49}{2}}\,\mathrm{Sin}\,7u+-\ldots}{(1-p^4)(1-p^8)(1-p^{12})(1-p^{16})\ldots},$$

8. $2\sqrt{p}.\mathrm{Cos}\,u(1+2p^4\mathrm{Cos}2u+p^8)(1+2p^8\mathrm{Cos}2u+p^{16})(1+2p^{12}\mathrm{Cos}2u+p^{24})\ldots$
$$= \frac{2p^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{Cos}\,u+2p^{\frac{9}{2}}\,\mathrm{Cos}\,3u+2p^{\frac{25}{2}}\,\mathrm{Cos}\,5u+2p^{\frac{49}{2}}\,\mathrm{Cos}\,7u+\ldots}{(1-p^4)(1-p^8)(1-p^{12})(1-p^{16})\ldots},$$

9. $(1+2p^2\,\mathrm{Cos}\,2u+p^4)(1+2p^6\,\mathrm{Cos}\,2u+p^{12})(1+2p^{10}\,\mathrm{Cos}\,2u+p^{20})\ldots$
$$= \frac{1+2p^2\,\mathrm{Cos}\,2u+2p^8\,\mathrm{Cos}\,4u+2p^{18}\,\mathrm{Cos}\,6u+2p^{32}\,\mathrm{Cos}\,8u+\ldots}{(1-p^4)(1-p^8)(1-p^{12})(1-p^{16})\ldots},$$

10. $(1-2p^2\,\mathrm{Cos}\,2u+p^4)(1-2p^6\,\mathrm{Cos}\,2u+p^{12})(1-2p^{10}\,\mathrm{Cos}\,2u+p^{20})\ldots$
$$= \frac{1-2p^2\,\mathrm{Cos}\,2u+2p^8\,\mathrm{Cos}\,4u-2p^{18}\,\mathrm{Cos}\,6u+2p^{32}\,\mathrm{Cos}\,8u-+\ldots}{(1-p^4)(1-p^8)(1-p^{12})(1-p^{16})\ldots},$$

in welchen p und u beliebige von einander unabhängige Gröfsen sind, und wodurch eben so viele allgemeine Entwickelungs-Theoreme ausgedrückt werden.

§. 190.

Entwickelung particulärer Formeln, welche sich auf die Hülfs-Functionen beziehen.

Es ist $\mathrm{Hl}(K-u) = \mathrm{Gl}\,u$ und $\mathrm{Gl}\,u = \frac{\mathrm{dn}\,u}{\sqrt{k'}}.\mathrm{Hl}\,u$; also ist $\mathrm{Hl}(K-u) = \frac{\mathrm{dn}\,u}{\sqrt{k'}}.\mathrm{Hl}\,u$. Setzt man hierin $\frac{1}{2}K-u$ statt u, so erhält man $\mathrm{Hl}(\frac{1}{2}K+u) = \frac{\mathrm{dn}(\frac{1}{2}K-u)}{\sqrt{k'}}.\mathrm{Hl}(\frac{1}{2}K-u)$. Da $\mathrm{dn}(\frac{1}{2}K-u).\mathrm{dn}(\frac{1}{2}K+u) = k'$ ist, so ist $\frac{\mathrm{dn}(\frac{1}{2}K-u)}{\sqrt{k'}} = \sqrt{\frac{\mathrm{dn}(\frac{1}{2}K-u)}{\mathrm{dn}(\frac{1}{2}K+u)}}$, folglich
$$\sqrt{\frac{\mathrm{Hl}(\frac{1}{2}K+u)}{\mathrm{Hl}(\frac{1}{2}K-u)}} = \sqrt[4]{\frac{\mathrm{dn}(\frac{1}{2}K-u)}{\mathrm{dn}(\frac{1}{2}K+u)}}.$$
Da überhaupt $\frac{\mathrm{dn}(a-b)}{\mathrm{dn}(a+b)} = \frac{1+k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{snc}\,b}{1-k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{snc}\,b}$ ist, so reducirt sich das obige Verhältnifs, wenn man $b = u$, und $a = \frac{1}{2}K$, also $\mathrm{sn}\,a = \mathrm{snc}\,a = \sqrt{\frac{1}{1+k'}}$, also $k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a = \frac{1-k'^2}{1+k'} = 1-k'$ setzt, auf
$$\sqrt{\frac{\mathrm{Hl}(\frac{1}{2}K+u)}{\mathrm{Hl}(\frac{1}{2}K-u)}} = \sqrt[4]{\frac{1+(1-k')\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u}{1-(1-k')\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u}}.$$
Nimmt man nun auf beiden Seiten die natürlichen Logarithmen, so erhält man

1. $\log\sqrt{\frac{\mathrm{Hl}(\frac{1}{2}K+u)}{\mathrm{Hl}(\frac{1}{2}K-u)}} = \log\sqrt{\frac{\mathrm{Gl}(\frac{1}{2}K-u)}{\mathrm{Gl}(\frac{1}{2}K+u)}} = \frac{1}{2}\,\mathrm{ArcTang}((1-k')\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u)$ und

$$2.\quad \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\mathrm{Hl}(\frac{1}{2}K+ui)}{\mathrm{Hl}(\frac{1}{2}K-ui)}} = \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\mathrm{Gl}(\frac{1}{2}K-ui)}{\mathrm{Gl}(\frac{1}{2}K+ui)}} = \tfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tang}\left((1-k')\frac{\mathrm{tn}'u}{\mathrm{dn}'u}\right)$$
$$= \tfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tang}\left(\sqrt{\frac{1-k'}{1+k'}}\cdot\frac{\mathrm{cnc}'u}{\mathrm{cn}'u}\right).$$

Nach §. 185. ist

$$\log\mathfrak{Bl}'(\tfrac{1}{2}K+u) = \log\mathrm{Hl}(\tfrac{1}{2}K+u) + \frac{\pi(\frac{1}{2}K+u)^2}{4KK'},$$

und wird hiervon die Gleichung

$$\log\mathfrak{Bl}'(\tfrac{1}{2}K-u) = \log\mathrm{Hl}(\tfrac{1}{2}K-u) + \frac{\pi(\frac{1}{2}K-u)^2}{4KK'}$$

subtrahirt, so entsteht

$$\log\frac{\mathfrak{Bl}'(\frac{1}{2}K+u)}{\mathfrak{Bl}'(\frac{1}{2}K-u)} = \log\frac{\mathrm{Hl}(\frac{1}{2}K+u)}{\mathrm{Hl}(\frac{1}{2}K-u)} + \frac{\pi u}{2K'};$$

daher ist

$$3.\quad \log\sqrt{\frac{\mathfrak{Bl}'(\frac{1}{2}K+u)}{\mathfrak{Bl}'(\frac{1}{2}K-u)}} = \frac{\eta' u}{2} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{ArcTang}\,((1-k')\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u)$$

und

$$4.\quad \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Bl}'(\frac{1}{2}K+ui)}{\mathfrak{Bl}'(\frac{1}{2}K-ui)}} = \frac{\eta' u}{2} + \operatorname{arc\,tang}\left(\sqrt{\frac{1-k'}{1+k'}}\cdot\frac{\mathrm{cnc}'u}{\mathrm{cn}'u}\right).$$

Nach den Formeln (3.) §. 170. ist

$$\log\mathfrak{Bl}'(\tfrac{1}{2}K+u) = \eta' u + \log\mathfrak{Gl}'(\tfrac{1}{2}K-u)$$

und

$$\log\mathfrak{Bl}'(\tfrac{1}{2}K-u) = -\eta' u + \log\mathfrak{Gl}'(\tfrac{1}{2}K+u);$$

daher ist

$$\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Bl}'(\frac{1}{2}K+u)}{\mathfrak{Bl}'(\frac{1}{2}K-u)}} = \eta' u + \log\sqrt{\frac{\mathfrak{Gl}'(\frac{1}{2}K-u)}{\mathfrak{Gl}'(\frac{1}{2}K+u)}},$$

folglich

$$5.\quad \log\sqrt{\frac{\mathfrak{Gl}'(\frac{1}{2}K-u)}{\mathfrak{Gl}'(\frac{1}{2}K+u)}} = -\frac{\eta' u}{2} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{ArcTang}\,((1-k')\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u)\ \text{ und}$$

$$6.\quad \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Gl}'(\frac{1}{2}K-ui)}{\mathfrak{Gl}'(\frac{1}{2}K+ui)}} = -\frac{\eta' u}{2} + \tfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tang}\left(\sqrt{\frac{1-k'}{1+k'}}\cdot\frac{\mathrm{cnc}'u}{\mathrm{cn}'u}\right).$$

Es ist $\mathrm{Al}(K-u) = \mathrm{Bl}\,u$ und $\mathrm{Bl}\,u = \dfrac{\mathrm{Al}\,u}{\sqrt{k'}.\,\mathrm{tn}\,u}$, also ist $\mathrm{Al}(K-u) = \dfrac{1}{\sqrt{k'}.\,\mathrm{tn}\,u}.\,\mathrm{Al}\,u$, also $\mathrm{Al}(\frac{1}{2}K+u) = \sqrt{k'}.\,\mathrm{tn}(\frac{1}{2}K+u).\,\mathrm{Al}(\frac{1}{2}K-u) = \dfrac{1}{\sqrt{k'}.\,\mathrm{tn}(\frac{1}{2}K-u)}.\,\mathrm{Al}(\frac{1}{2}K-u)$, oder auch

$$\frac{\mathrm{Al}(\frac{1}{2}K+u)}{\mathrm{Al}(\frac{1}{2}K-u)} = \sqrt{\frac{\mathrm{tn}(\frac{1}{2}K+u)}{\mathrm{tn}(\frac{1}{2}K-u)}}.$$

Zieht man auf beiden Seiten die Quadratwurzel aus und nimmt die Logarithmen, so hat man nach Formel (22.) §. 37.

$$\log\sqrt{\frac{\mathrm{Al}(\frac{1}{2}K+u)}{\mathrm{Al}(\frac{1}{2}K-u)}} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\mathrm{sn}\,u\,.\,\mathrm{snc}\,u}{\mathrm{sn}\,a\,.\,\mathrm{snc}\,a}\right)\quad \text{für}\quad a = \tfrac{1}{2}K.$$

Da aber $\mathrm{sn}\,a = \mathrm{snc}\,a = \sqrt{\dfrac{1}{1+k'}}$ ist, so erhalten wir

$$7.\quad \log\sqrt{\frac{\mathrm{Al}(\tfrac{1}{2}K+u)}{\mathrm{Al}(\tfrac{1}{2}K-u)}} = \log\sqrt{\frac{\mathrm{Bl}(\tfrac{1}{2}K-u)}{\mathrm{Bl}(\tfrac{1}{2}K+u)}} = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{ArcTang}\,((1+k')\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u),$$

also

$$8.\quad \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\mathrm{Al}(\tfrac{1}{2}K+ui)}{\mathrm{Al}(\tfrac{1}{2}K-ui)}} = \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\mathrm{Bl}(\tfrac{1}{2}K-ui)}{\mathrm{Bl}(\tfrac{1}{2}K+ui)}} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tang}\left(\sqrt{\frac{1+k'}{1-k'}}\cdot\frac{\mathrm{cnc}'u}{\mathrm{cn}'u}\right)$$
$$= \tfrac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tang}\left((1+k')\cdot\frac{\mathrm{tn}'u}{\mathrm{dn}'u}\right).$$

Nach §. 185. ist

$$\log\mathfrak{A}\mathrm{l}'(\tfrac{1}{2}K+u) = \frac{\pi}{4KK'}\cdot(\tfrac{1}{2}K+u)^2 + \log\mathrm{Al}(\tfrac{1}{2}K+u).$$

Hieraus folgt

$$\log\frac{\mathfrak{A}\mathrm{l}'(\tfrac{1}{2}K+u)}{\mathfrak{A}\mathrm{l}'(\tfrac{1}{2}K-u)} = \eta' u + \log\frac{\mathrm{Al}(\tfrac{1}{2}K+u)}{\mathrm{Al}(\tfrac{1}{2}K-u)};$$

also ist

$$9.\quad \log\sqrt{\frac{\mathfrak{A}\mathrm{l}'(\tfrac{1}{2}K+u)}{\mathfrak{A}\mathrm{l}'(\tfrac{1}{2}K-u)}} = \frac{\eta' u}{2} + \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{ArcTang}\,((1+k')\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u)$$

und

$$10.\quad \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\mathfrak{A}\mathrm{l}'(\tfrac{1}{2}K+ui)}{\mathfrak{A}\mathrm{l}'(\tfrac{1}{2}K-ui)}} = \frac{\eta' u}{2} + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tang}\left(\sqrt{\frac{1+k'}{1-k'}}\cdot\frac{\mathrm{cnc}'u}{\mathrm{cn}'u}\right).$$

Da nach §. 170. $\log\mathfrak{A}\mathrm{l}'(\tfrac{1}{2}K+u) = \eta' u + \log\mathfrak{H}\mathrm{l}'(\tfrac{1}{2}K-u)$ ist, so ist

$$\log\sqrt{\frac{\mathfrak{A}\mathrm{l}'(\tfrac{1}{2}K+u)}{\mathfrak{A}\mathrm{l}'(\tfrac{1}{2}K-u)}} = \eta' u + \log\sqrt{\frac{\mathfrak{H}\mathrm{l}'(\tfrac{1}{2}K-u)}{\mathfrak{H}\mathrm{l}'(\tfrac{1}{2}K+u)}},$$

und also

$$11.\quad \log\sqrt{\frac{\mathfrak{H}\mathrm{l}'(\tfrac{1}{2}K-u)}{\mathfrak{H}\mathrm{l}'(\tfrac{1}{2}K+u)}} = -\frac{\eta' u}{2} + \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{ArcTang}\,((1+k')\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u)$$

und

$$12.\quad \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\mathfrak{H}\mathrm{l}'(\tfrac{1}{2}K-ui)}{\mathfrak{H}\mathrm{l}'(\tfrac{1}{2}K+ui)}} = -\frac{\eta' u}{2} + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tang}\left(\sqrt{\frac{1+k'}{1-k'}}\cdot\frac{\mathrm{cnc}'u}{\mathrm{cn}'u}\right).$$

In §. 187. wurden schon die Werthe

$$13.\quad \begin{cases} \mathrm{Al}\,\tfrac{1}{2}K = \mathrm{Bl}\,\tfrac{1}{2}K = \sqrt[4]{\left(\frac{1-k'}{2}\sqrt{k'}\right)}, \\ \mathrm{Gl}\,\tfrac{1}{2}K = \mathrm{Hl}\,\tfrac{1}{2}K = \sqrt[4]{\left(\frac{1+k'}{2}\cdot\sqrt{k'}\right)} \end{cases}$$

ermittelt. Setzen wir nun in den Formeln (2.) §. 185. das Argument $u = \tfrac{1}{2}K$, so erhalten wir

$$14.\quad \begin{cases} \mathfrak{B}\mathrm{l}'\,\tfrac{1}{2}K = \mathfrak{G}\mathrm{l}'\,\tfrac{1}{2}K = e^{\frac{\eta' K}{8}}\cdot\sqrt[4]{\left(\frac{1+k'}{2}\cdot\sqrt{k'}\right)} \text{ und} \\ \mathfrak{A}\mathrm{l}'\,\tfrac{1}{2}K = \mathfrak{H}\mathrm{l}'\,\tfrac{1}{2}K = e^{\frac{\eta' K}{8}}\cdot\sqrt[4]{\left(\frac{1-k'}{2}\cdot\sqrt{k'}\right)}. \end{cases}$$

Wir entwickeln nun der Vollständigkeit wegen auch noch die Differential-Verhältnisse der Logarithmen der Hülfs-Functionen des Argumentes u für den besonderen Werth $u = \tfrac{1}{2}K$. Ist $u = \tfrac{1}{2}K$, so ist nach §. 66. $\mathrm{el}\,u =$

$\text{el c}\,u = \frac{1}{2}E + \frac{1-k'}{2}$. Setzen wir nun auch in den Formeln (1.) bis (4.) §. 184. das Argument $u = \frac{1}{2}K$, so erhalten wir für $u = \frac{1}{2}K$:

$$15.\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \log \mathrm{Al}\,u}{\partial u} = \frac{1}{2}E + \dfrac{1-k'}{2} - \frac{1}{2}E + k' = \dfrac{1+k'}{2}, \\ \dfrac{\partial \log \mathrm{Bl}\,u}{\partial u} = \frac{1}{2}E + \dfrac{1-k'}{2} - \frac{1}{2}E - 1 = -\dfrac{1+k'}{2}, \\ \dfrac{\partial \log \mathrm{Gl}\,u}{\partial u} = \frac{1}{2}E + \dfrac{1-k'}{2} - \frac{1}{2}E - \dfrac{k^2}{1+k'} = -\dfrac{1-k'}{2}, \\ \dfrac{\partial \log \mathrm{Hl}\,u}{\partial u} = \frac{1}{2}E + \dfrac{1-k'}{2} - \frac{1}{2}E = \dfrac{1-k'}{2}. \end{cases}$$

Wird auch in den Formeln (5.) bis (8.) §. 206. das Argument $u = \frac{1}{2}K$ genommen, so entstehen die Gleichungen

$$16.\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \log \mathfrak{A}\mathfrak{l}'u}{\partial u} = \dfrac{1+k'}{2} + \frac{1}{2}\eta', & \dfrac{\partial \log \mathfrak{G}\mathfrak{l}'u}{\partial u} = -\dfrac{1-k'}{2} + \frac{1}{2}\eta', \\ \dfrac{\partial \log \mathfrak{B}\mathfrak{l}'u}{\partial u} = \dfrac{1-k'}{2} + \frac{1}{2}\eta', & \dfrac{\partial \log \mathfrak{H}\mathfrak{l}'u}{\partial u} = -\dfrac{1+k'}{2} + \frac{1}{2}\eta', \end{cases}$$

wenn man beachtet, dafs $1 - \frac{E'}{K'} = \frac{E}{K} - \frac{\pi}{2KK'} = \frac{E}{K} - \frac{\eta'}{K}$ ist.

§. 191.

Allgemeine Relationen zwischen den Hülfs-Functionen mehrtheiliger Argumente und den Functionen der Theile.

Nach §. 73. ist

$$\mathrm{lm}(a+b) + \mathrm{lm}(a-b) = 2\,\mathrm{lm}\,a + 2\,\mathrm{lm}\,b + \log(1 - k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b).$$

Substituirt man die nach Formel (5.) §. 183. bestimmten Werthe der Modular-Logarithmen in dieser Formel, so erhält man

$$\frac{E}{K}\left\{\frac{(a+b)^2 + (a-b)^2}{2}\right\} + \log\left\{\frac{\mathrm{Hl}(a+b).\,\mathrm{Hl}(a-b)}{k'}\right\}$$
$$= \frac{E}{K}(a^2+b^2) + \log\left\{\frac{\mathrm{Hl}^2 a.\,\mathrm{Hl}^2 b}{k'^2}\right\} + \log(1 - k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b),$$

und diese Gleichung reducirt sich auf

$$1.\quad \begin{cases} \mathrm{Hl}(a+b).\mathrm{Hl}(a-b) = \dfrac{\mathrm{Hl}^2 a.\mathrm{Hl}^2 b}{k'}.(1 - k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b) \text{ oder} \\ \mathrm{Hl}(a+b).\mathrm{Hl}(a-b) = \dfrac{\mathrm{Hl}^2 a.\mathrm{Hl}^2 b - \mathrm{Al}^2 a.\,\mathrm{Al}^2 b}{k'}. \end{cases}$$

Setzt man in dieser Formel $K-a$ statt a, so verwandelt sie sich zunächst in $\mathrm{Gl}(a+b).\mathrm{Gl}(a-b) = \frac{\mathrm{Gl}^2 a.\mathrm{Hl}^2 b - \mathrm{Bl}^2 a.\mathrm{Al}^2 b}{k'}$. Substituirt man hierin, dem Zusatze zu §. 171. gemäfs, die Werthe $\mathrm{Hl}^2 b = k'.\mathrm{Gl}^2 b + k.\mathrm{Al}^2 b$ und $\mathrm{Bl}^2 a = k.\mathrm{Gl}^2 a - k'.\mathrm{Al}^2 a$, so erhält man die einfachere Formel

$$2.\quad \begin{cases} \mathrm{Gl}(a+b).\mathrm{Gl}(a-b) = \mathrm{Gl}^2 a.\mathrm{Gl}^2 b + \mathrm{Al}^2 a.\mathrm{Al}^2 b, \\ \mathrm{Gl}(a+b).\mathrm{Gl}(a-b) = \mathrm{Gl}^2 a.\mathrm{Gl}^2 b\left(1+\frac{k'^2}{k^2}\,\mathrm{cnc}^2 a.\mathrm{cnc}^2 b\right). \end{cases}$$

Da $\mathrm{lm}(a\pm b)=\left(1-\frac{E'}{K'}\right).\frac{(a\pm b)^2}{2}+\log\left(\frac{\mathfrak{Bl}'(a\pm b)}{\sqrt{k'}}\right)$ ist, so findet man, wie die Formel (1.) gefunden wurde, noch

$$\mathfrak{Bl}'(a+b).\mathfrak{Bl}'(a-b) = \frac{\mathfrak{Bl}'^2 a.\mathfrak{Bl}'^2 b}{k'}.(1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b).$$

Vertauscht man hierin die beiden conjugirten Moduln mit einander, so entsteht, wenn ai statt a und bi statt b gesetzt wird,

$$3.\quad \begin{cases} \mathrm{Bl}(a+b).\mathrm{Bl}(a-b) = \frac{\mathrm{Bl}^2 a.\mathrm{Bl}^2 b - \mathrm{Al}^2 a.\mathrm{Al}^2 b}{k} \text{ oder} \\ \mathrm{Bl}(a+b).\mathrm{Bl}(a-b) = \frac{\mathrm{Bl}^2 a.\mathrm{Bl}^2 b}{k}.(1-k'^2.\mathrm{tn}^2 a\,\mathrm{tn}^2 b). \end{cases}$$

Es kann diese Formel auch leicht aus der Formel (1.) hergeleitet werden. Es ist nach §. 171.

$$\frac{\mathrm{Bl}(a+b).\mathrm{Bl}(a-b)}{\mathrm{Hl}(a+b).\mathrm{Hl}(a-b)} = \frac{k}{k'}\,\mathrm{cn}(a+b).\mathrm{cn}(a-b) = \frac{\mathrm{cn}^2 a\,\mathrm{cn}^2 b - k'^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b}.\frac{k}{k'};$$

und auch

$$\frac{\mathrm{Bl}^2 a.\mathrm{Bl}^2 b}{\mathrm{Hl}^2 a.\mathrm{Hl}^2 b} = \frac{k^2}{k'^2}.\mathrm{cn}^2 a.\mathrm{cn}^2 b;$$

also ist

$$\frac{\mathrm{Bl}(a+b).\mathrm{Bl}(a-b)}{\mathrm{Hl}(a+b).\mathrm{Hl}(a-b)} = \frac{\mathrm{Bl}^2 a.\mathrm{Bl}^2 b}{\mathrm{Hl}^2 a.\mathrm{Hl}^2 b}.\frac{k'}{k}.\frac{(1-k'^2\,\mathrm{tn}^2 a\,\mathrm{tn}^2 b)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b},$$

und wird hiermit die Gleichung (1.) multiplicirt, so erhält man die Formel (3.).

Da $\mathrm{Al}(a+b).\mathrm{Al}(a-b) = k\,\mathrm{sn}(a+b)\,\mathrm{sn}(a-b).\mathrm{Hl}(a+b).\mathrm{Hl}(a-b)$ $= \frac{k(\mathrm{sn}^2 a - \mathrm{sn}^2 b)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b}.\mathrm{Hl}(a+b).\mathrm{Hl}(a-b)$ ist, so erhält man, wenn diese Gleichung mit (1.) multiplicirt wird,

$$4.\quad \begin{cases} \mathrm{Al}(a+b).\mathrm{Al}(a-b) = \frac{\mathrm{Hl}^2 a.\mathrm{Hl}^2 b}{k'}(k\,\mathrm{sn}^2 a - k\,\mathrm{sn}^2 b) \text{ oder} \\ \mathrm{Al}(a+b).\mathrm{Al}(a-b) = \frac{\mathrm{Al}^2 a.\mathrm{Hl}^2 b - \mathrm{Al}^2 b.\mathrm{Hl}^2 a}{k'} = \frac{\mathrm{Al}^2 a.\mathrm{Bl}^2 b - \mathrm{Bl}^2 a.\mathrm{Al}^2 b}{k} \\ \qquad = \mathrm{Al}^2 a.\mathrm{Gl}^2 b - \mathrm{Al}^2 b.\mathrm{Gl}^2 a. \end{cases}$$

§. 192.

Wir leiten noch einige allgemeinere Relationen her, auf folgende Weise. Es ist nach §. 183.

$$\mathrm{lm}\,a + \mathrm{lm}\,b + \mathrm{lm}\,c = \frac{E}{K}.\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right) + \log\frac{\mathrm{Hl}\,a.\mathrm{Hl}\,b.\mathrm{Hl}\,c}{\sqrt{k'^3}},$$

$$\mathrm{lm}(a+b+c) = \frac{E}{K}\cdot\frac{(a+b+c)^2}{2} + \log\frac{\mathrm{Hl}(a+b+c)}{\sqrt{k'}},$$

also ist

$$\mathrm{lm}\,a + \mathrm{lm}\,b + \mathrm{lm}\,c + \mathrm{lm}(a+b+c)$$
$$= \frac{E}{K}(a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc) + \log\frac{\mathrm{Hl}\,a.\mathrm{Hl}\,b.\mathrm{Hl}\,c.\mathrm{Hl}(a+b+c)}{\sqrt{k'^4}}.$$

Addirt man ferner die drei Gleichungen

$$\mathrm{lm}(a+b) = \frac{E}{K}\cdot\frac{(a+b)^2}{2} + \log\left(\frac{\mathrm{Hl}(a+b)}{\sqrt{k'}}\right),$$
$$\mathrm{lm}(a+c) = \frac{E}{K}\cdot\frac{(a+c)^2}{2} + \log\left(\frac{\mathrm{Hl}(a+c)}{\sqrt{k'}}\right),$$
$$\mathrm{lm}(b+c) = \frac{E}{K}\cdot\frac{(b+c)^2}{2} + \log\left(\frac{\mathrm{Hl}(b+c)}{\sqrt{k'}}\right),$$

so erhält man

$$\mathrm{lm}(a+b) + \mathrm{lm}(a+c) + \mathrm{lm}(b+c)$$
$$= \frac{E}{K}(a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc) + \log\frac{\mathrm{Hl}(a+b).\mathrm{Hl}(a+c).\mathrm{Hl}(b+c)}{\sqrt{k'^3}}.$$

Wird von dieser Gleichung die obige subtrahirt, so erhält man, der Gleichung (10.) §. 73. gemäfs,

$$\log\frac{\sqrt{k'}.\mathrm{Hl}(a+b).\mathrm{Hl}(a+c).\mathrm{Hl}(b+c)}{\mathrm{Hl}\,a.\mathrm{Hl}\,b.\mathrm{Hl}\,c.\mathrm{Hl}(a+b+c)} = \log(1+k^2\,\mathrm{sn}\,a.\mathrm{sn}\,b.\mathrm{sn}\,c.\mathrm{sn}(a+b+c)),$$

oder auch

$$1.\quad\begin{cases} \mathrm{Hl}(a+b).\mathrm{Hl}(a+c).\mathrm{Hl}(b+c) \\ = \dfrac{\mathrm{Hl}\,a.\mathrm{Hl}\,b.\mathrm{Hl}\,c.\mathrm{Hl}(a+b+c)}{\sqrt{k'}}.(1+k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{sn}\,c.\mathrm{sn}(a+b+c) \quad \text{und} \\ \mathrm{Hl}(a+b).\mathrm{Hl}(a+c).\mathrm{Hl}(b+c) \\ = \dfrac{\mathrm{Hl}\,a.\mathrm{Hl}\,b.\mathrm{Hl}\,c.\mathrm{Hl}(a+b+c) + \mathrm{Al}\,a.\mathrm{Al}\,b.\mathrm{Al}\,c.\mathrm{Al}(a+b+c)}{\sqrt{k'}}. \end{cases}$$

Ganz eben so leiten wir aus der Formel (7.) §. 183. die Gleichung

$$\mathfrak{Bl}'(a+b).\mathfrak{Bl}'(a+c).\mathfrak{Bl}'(b+c)$$
$$= \frac{\mathfrak{Bl}'a.\mathfrak{Bl}'b.\mathfrak{Bl}'c.\mathfrak{Bl}'(a+b+c)}{\sqrt{k'}}.(1+k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{sn}\,c\,\mathrm{sn}(a+b+c))$$

her, welche sich, wenn man die conjugirten Moduln vertauscht und ferner ai statt a, bi statt b und ci statt c setzt, in

$$2.\quad\begin{cases} \mathrm{Bl}(a+b).\mathrm{Bl}(a+c).\mathrm{Bl}(b+c) \\ = \dfrac{\mathrm{Bl}\,a.\mathrm{Bl}\,b.\mathrm{Bl}\,c.\mathrm{Bl}(a+b+c)}{\sqrt{k}}.(1+k'^2\,\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{tn}\,b\,\mathrm{tn}\,c.\mathrm{tn}(a+b+c)) \quad \text{und} \\ \mathrm{Bl}(a+b).\mathrm{Bl}(a+c).\mathrm{Bl}(b+c) \\ = \dfrac{\mathrm{Bl}\,a.\mathrm{Bl}\,b.\mathrm{Bl}\,c.\mathrm{Bl}(a+b+c) + \mathrm{Al}\,a.\mathrm{Al}\,b.\mathrm{Al}\,c.\mathrm{Al}(a+b+c)}{\sqrt{k}} \end{cases}$$

verwandelt. Die in den vorstehenden Gleichungen auf der rechten Seite befindlichen zweigliedrigen Ausdrücke lassen sich noch auf andere Art darstellen. Da nämlich, der Formel (2.) §. 40. gemäfs,

$$1+k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{sn}\,c\,\mathrm{sn}(a+b+c)$$
$$=\frac{\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,b\,\mathrm{dn}\,c\,\mathrm{dn}(a+b+c)}{k'^2}-\frac{k^2}{k'^2}\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cn}\,b\,\mathrm{cn}\,c\,.\,\mathrm{cn}(a+b+c)$$

ist, so erhalten wir, wenn die Modular-Functionen durch die cyklischen Hülfs-Functionen ersetzt werden:

$$3.\quad\begin{cases}\mathrm{Hl}\,a.\mathrm{Hl}\,b.\mathrm{Hl}\,c.\mathrm{Hl}(a+b+c)+\mathrm{Al}\,a.\mathrm{Al}\,b.\mathrm{Al}\,c.\mathrm{Al}(a+b+c)\\ =\mathrm{Gl}\,a.\mathrm{Gl}\,b.\mathrm{Gl}\,c.\mathrm{Gl}(a+b+c)-\mathrm{Bl}\,a.\mathrm{Bl}\,b.\mathrm{Bl}\,c.\mathrm{Bl}(a+b+c),\text{ und}\\ \mathrm{Bl}\,a.\mathrm{Bl}\,b.\mathrm{Bl}\,c.\mathrm{Bl}(a+b+c)+\mathrm{Al}\,a.\mathrm{Al}\,b.\mathrm{Al}\,c.\mathrm{Al}(a+b+c)\\ =\mathrm{Gl}\,a.\mathrm{Gl}\,b.\mathrm{Gl}\,c.\mathrm{Gl}(a+b+c)-\mathrm{Hl}\,a.\mathrm{Hl}\,b.\mathrm{Hl}\,c.\mathrm{Hl}(a+b+c).\end{cases}$$

Zu denselben Resultaten gelangt man aber auch, wenn man in der Formel (1.) $K-a$ statt a, $K-b$ statt b und $K-c$ statt c setzt. Die Gleichung (2.) verwandelt sich aber wieder in sich selbst.

Zusatz. Setzt man in der Gleichung (3.) das Argument $c=o$, so hat man

$$\sqrt{k'}.\mathrm{Hl}a.\mathrm{Hl}b.\mathrm{Hl}(a+b)+\sqrt{k}.\mathrm{Bl}\,a.\mathrm{Bl}\,b.\mathrm{Bl}(a+b)=\mathrm{Gl}\,a.\mathrm{Gl}\,b.\mathrm{Gl}(a+b).$$

§. 193.

Reihen für die cyklischen und hyperbolischen Amplituden, welche nach Potenzial-Functionen der vervielfachten Arcus ηu und $\eta' u$ fortschreiten.

Integrirt man die mit ∂u multiplicirte Reihe (17.) §. 179., indem man sich erinnert, dafs $\partial\,\mathrm{am}\,u=\mathrm{dn}\,u.\partial u$ ist, so erhält man

$$1.\quad \mathrm{am}\,u=\eta u+\frac{\sin 2\eta u}{\mathfrak{Cos}2\eta K'}+\tfrac{1}{2}.\frac{\sin 4\eta u}{\mathfrak{Cos}4\eta K'}+\tfrac{1}{3}.\frac{\sin 6\eta u}{\mathfrak{Cos}6\eta K'}+\tfrac{1}{4}.\frac{\sin 8\eta u}{\mathfrak{Cos}8\eta K'}+\ldots.$$

Wird hierin $K-u$ statt u gesetzt, so verwandelt sich die Reihe in

$$2.\quad \mathrm{amc}\,u=\tfrac{1}{2}\pi-\eta u+\frac{\sin 2\eta u}{\mathfrak{Cos}2\eta K'}-\tfrac{1}{2}.\frac{\sin 4\eta u}{\mathfrak{Cos}4\eta K'}+\tfrac{1}{3}.\frac{\sin 6\eta u}{\mathfrak{Cos}6\eta K'}-\tfrac{1}{8}.\frac{\sin 8\eta u}{\mathfrak{Cos}8\eta K'}+\ldots.$$

Multiplicirt man die Reihe (19.) §. 179. mit ∂u, so giebt die Integration, wenn man sich erinnert, dafs $\partial l\varphi=\frac{\partial\varphi}{\mathfrak{Cos}\,\varphi}$ ist, die Reihe

$$3.\quad \mathrm{am}\,u=l(\eta' u)+2p.\frac{\mathfrak{Sin}\eta' u}{\mathfrak{Sin}\eta' K}-\frac{2p^3}{3}.\frac{\mathfrak{Sin}3\eta' u}{\mathfrak{Sin}3\eta' K}+\frac{2p^5}{5}.\frac{\mathfrak{Sin}5\eta' u}{\mathfrak{Sin}5\eta' K}-\frac{2p^7}{7}.\frac{\mathfrak{Sin}7\eta' u}{\mathfrak{Sin}7\eta' K}+-\ldots,$$

und die Integration der Reihe (20.) §. 179. giebt

$$4.\quad \operatorname{amc} u = \tfrac{1}{2}\pi - 2\cdot\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,\eta' K} + \tfrac{2}{3}\cdot\frac{\mathfrak{Sin}\,3\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,3\eta' K} - \tfrac{2}{5}\cdot\frac{\mathfrak{Sin}\,5\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,5\eta' K} + \tfrac{2}{7}\cdot\frac{\mathfrak{Sin}\,7\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,7\eta' K} - \tfrac{2}{9}\cdot\frac{\mathfrak{Sin}\,9\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,9\eta' K} + - \cdots$$

In der Reihe (3.) kann das Anfangsglied $l(\eta' u)$ auch nach der Formel $l(\eta' u) = \frac{1}{2}\pi - \operatorname{arctang}(e^{-\eta' u})$ berechnet werden.

Da $\partial \mathfrak{L} \operatorname{am} u = \frac{\partial \operatorname{am} u}{\operatorname{cn} u} = \frac{\partial u}{\operatorname{snc} u}$ ist, so erhält man durch die Integration der Reihe (6.) §. 179.

$$5.\quad \mathfrak{L}\operatorname{am} u = \mathfrak{L}(\eta u) + 2q\cdot\frac{\sin\eta u}{\mathfrak{Sin}\,\eta K'} - \frac{2q^3}{3}\cdot\frac{\sin 3\eta u}{\mathfrak{Sin}\,3\eta K'} + \frac{2q^5}{5}\cdot\frac{\sin 5\eta u}{\mathfrak{Sin}\,5\eta K'} - \frac{2q^7}{7}\cdot\frac{\sin 7\eta u}{\mathfrak{Sin}\,7\eta K'} + - \cdots, \text{ also}$$

$$6.\quad \mathfrak{L}\operatorname{amc} u = \mathfrak{L}(\tfrac{1}{2}\pi - \eta u) + 2q\cdot\frac{\cos\eta u}{\mathfrak{Sin}\,\eta K'} + \frac{2q^3}{3}\cdot\frac{\cos 3\eta u}{\mathfrak{Sin}\,3\eta K'} + \frac{2q^5}{5}\cdot\frac{\cos 5\eta u}{\mathfrak{Sin}\,5\eta K'} + \frac{2q^7}{7}\cdot\frac{\cos 7\eta u}{\mathfrak{Sin}\,7\eta K'} + \cdots$$

Die Reihe (8.) §. 179. giebt integrirt

$$7.\quad \mathfrak{L}\operatorname{am} u = \eta' u + \frac{\mathfrak{Sin}\,2\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta' K} + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\mathfrak{Sin}\,4\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta' K} + \tfrac{1}{3}\cdot\frac{\mathfrak{Sin}\,6\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,6\eta' K} + \tfrac{1}{4}\cdot\frac{\mathfrak{Sin}\,8\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,8\eta' K} + \cdots;$$

und die Integration der Reihe (7.) §. 179. giebt zunächst

$$\mathfrak{L}\operatorname{amc} u = \text{const.} - \log \mathfrak{Sin}\,\eta' u - p^2\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,2\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta' K} - \frac{p^4}{2}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,4\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta' K} - \frac{p^6}{3}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,6\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,6\eta' K} - \frac{p^8}{4}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,8\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,8\eta' K} - \cdots$$

Die Ermittelung der Constante erfordert eine besondere Untersuchung. Setzt man in der gefundenen Reihe $K-u$ statt u, so mufs die Reihe (7.) hervorgehen. Es sei wieder $e^{\eta' u} = x$, also

$$\mathfrak{L}\operatorname{amc} u = \text{const.} + \log\frac{2}{x-x^{-1}} - \frac{p^4(x^2+x^{-2})}{1+p^4} - \frac{p^8}{2}\cdot\frac{(x^4+x^{-4})}{1+p^8} - \frac{p^{12}}{3}\cdot\frac{x^6+x^{-6}}{1+p^{12}} - \cdots$$

Wird nun $K-u$ statt u gesetzt, wodurch sich x in $\frac{1}{px}$ verwandelt, so erhalten wir

$$\mathfrak{L}\operatorname{am} u = \text{const.} + \frac{2px}{1+p^2x^2} - \frac{p^2x^{-2}}{1+p^4} - \frac{p^4.x^{-4}}{2(1+p^8)} - \frac{p^6.x^{-6}}{3(1+p^{12})} - \cdots - \frac{p^6x^2}{1+p^4} - \frac{p^{12}.x^4}{2(1+p^8)} - \frac{p^{18}.x^6}{3(1+p^{12})} - \cdots,$$

Da $\log\left(\frac{2px}{1-p^2x^2}\right) = \log(2px) + p^2x^2 + \frac{p^4x^4}{2} + \frac{p^6x^6}{3} + \cdots$ und ferner

$p^2x^2 - \frac{p^6x^2}{1+p^4} = \frac{p^2x^2}{1+p^4}$, $\frac{p^4x^4}{2} - \frac{p^{12}x^4}{2(1+p^8)} = \frac{p^4x^4}{2(1+p^8)}$ u. s. w. ist, so entsteht die Reihe

$$\mathfrak{L}\,\mathrm{am}\,u = \mathrm{const.} + \log(2p) + \eta' u + \frac{\mathfrak{Sin}\,2\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta' K} + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\mathfrak{Sin}\,4\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta' K} + \ldots,$$

welche mit (7.) übereinstimmt, wenn const. $= -\log(2p)$ ist. Daher haben wir

$$8.\quad \mathfrak{L}\,\mathrm{amc}\,u = \log\left(\frac{1}{2p\,\mathfrak{Sin}\,\eta' u}\right) - p^2\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,2\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta' K} - \frac{p^4}{2}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,4\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta' K} - \frac{p^6}{3}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,6\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,6\eta' K} - \frac{p^8}{4}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,8\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,8\eta' K} - - \ldots$$

Da $\partial\,\mathfrak{L}(\frac{1}{2}\pi - \mathrm{amc}\,u) = -\frac{\partial\,\mathrm{amc}\,u}{\mathrm{snc}\,u} = \frac{k'\,\partial u}{\mathrm{cn}\,u}$ und $\partial\,\mathfrak{L}(\frac{1}{2}\pi - \mathrm{am}\,u) = -\frac{k'\,\partial u}{\mathrm{cnc}\,u}$ ist, so giebt die Integration der Reihe (13.) §. 179.

$$9.\quad \mathfrak{L}(\tfrac{1}{2}\pi - \mathrm{amc}\,u) = \mathfrak{L}(\eta u) - 2q\cdot\frac{\sin\eta u}{\mathfrak{Cos}\,\eta K'} + \frac{2q^3}{3}\cdot\frac{\sin 3\eta u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta K'} - \frac{2q^5}{5}\cdot\frac{\sin 5\eta u}{\mathfrak{Cos}\,5\eta K'} + \frac{2q^7}{7}\cdot\frac{\sin 7\eta u}{\mathfrak{Cos}\,7\eta K'} - + \ldots,$$

$$10.\quad \mathfrak{L}(\tfrac{1}{2}\pi - \mathrm{am}\,u) = \mathfrak{L}(\tfrac{1}{2}\pi - \eta u) - 2q\cdot\frac{\cos\eta u}{\mathfrak{Cos}\,\eta K'} - \frac{2q^3}{3}\cdot\frac{\cos 3\eta u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta K'} - \frac{2q^5}{5}\cdot\frac{\cos 5\eta u}{\mathfrak{Cos}\,5\eta K'} - \frac{2q^7}{7}\cdot\frac{\cos 7\eta u}{\mathfrak{Cos}\,7\eta K'} - - \ldots$$

Die Integration der Reihe (15.) §. 179. giebt

$$11.\quad \mathfrak{L}(\tfrac{1}{2}\pi - \mathrm{amc}\,u) = 2\cdot\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,\eta' K} + \tfrac{2}{3}\cdot\frac{\mathfrak{Sin}\,3\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta' K} + \tfrac{2}{5}\cdot\frac{\mathfrak{Sin}\,5\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,5\eta' K} + \tfrac{2}{7}\cdot\frac{\mathfrak{Sin}\,7\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,7\eta' K} + \ldots,$$

und durch dasselbe Verfahren, wie bei Herleitung der Reihe (8.), findet man hieraus

$$12.\quad \mathfrak{L}(\tfrac{1}{2}\pi - \mathrm{am}\,u) = \log\frac{1}{\mathfrak{Tang}\,\frac{1}{2}(\eta' u)} - 2p\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,\eta' K} - \frac{2p^3}{3}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,3\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta' K} - \frac{2p^5}{5}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,5\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,5\eta' K} - - \ldots$$

§. 194.

Da $\partial\,\mathrm{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = \mathrm{dn}\left(ku, \frac{1}{k}\right).k\,\partial u = k\,\mathrm{cn}\,u.\partial u$ ist, so giebt die Integration der Reihe (9.) §. 179.

$$13.\quad \mathrm{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = 2\cdot\frac{\sin\eta u}{\mathfrak{Cos}\,\eta K'} + \tfrac{2}{3}\cdot\frac{\sin 3\eta u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta K'} + \tfrac{2}{5}\cdot\frac{\sin 5\eta u}{\mathfrak{Cos}\,5\eta K'} + \tfrac{2}{7}\cdot\frac{\sin 7\eta u}{\mathfrak{Cos}\,7\eta K'} + \ldots,$$ also

$$14.\quad \mathrm{am}\left(k(K-u), \frac{1}{k}\right) = 2\cdot\frac{\cos\eta u}{\mathfrak{Cos}\,\eta K'} - \tfrac{2}{3}\cdot\frac{\cos 3\eta u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta K'} + \tfrac{2}{5}\cdot\frac{\cos 5\eta u}{\mathfrak{Cos}\,5\eta K'} - \tfrac{2}{7}\cdot\frac{\cos 7\eta u}{\mathfrak{Cos}\,7\eta K'} + - \ldots$$

Die Reihe (11.) §. 179. giebt

$$15.\quad \operatorname{am}\left(ku,\frac{1}{k}\right)=l(\eta'u)-2p.\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta'u}{\mathfrak{Cos}\,\eta'K}+\frac{2p^3}{3}.\frac{\mathfrak{Sin}\,3\eta'u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta'K}-\frac{2p^5}{5}.\frac{\mathfrak{Sin}\,5\eta'u}{\mathfrak{Cos}\,5\eta'K}+\frac{2p^7}{7}.\frac{\mathfrak{Sin}\,7\eta'u}{\mathfrak{Cos}\,7\eta'K}-+\ldots.$$

und die Integration von (12.) in §. 179. giebt, wenn die Constante auf ähnliche Art wie bei der Formel (8.) ermittelt wird,

$$16.\quad \operatorname{am}\left(k(K-u),\frac{1}{k}\right)=\tfrac{1}{2}\pi-2.\frac{\mathfrak{Cos}\,\eta'u}{\mathfrak{Cos}\,\eta'K}+\tfrac{2}{3}.\frac{\mathfrak{Cos}\,3\eta'u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta'K}-\tfrac{2}{5}.\frac{\mathfrak{Cos}\,5\eta'u}{\mathfrak{Cos}\,5\eta'K}+\tfrac{2}{7}.\frac{\mathfrak{Cos}\,7\eta'u}{\mathfrak{Cos}\,7\eta'K}-+\ldots.$$

Die Constante läfst sich hier auch leicht dadurch bestimmen, dafs man $u=K$ setzt.

$$\text{Da}\quad \partial\,\mathfrak{L}\operatorname{am}\left(ku,\frac{1}{k}\right)=\frac{\partial\operatorname{am}\left(ku,\frac{1}{k}\right)}{\operatorname{cn}\left(ku,\frac{1}{k}\right)}=\frac{k\operatorname{cn}u\,.\,\partial u}{\operatorname{dn}u}=k\operatorname{snc}u\,.\,\partial u\quad\text{ist,}$$

so erhält man

$$17.\quad \mathfrak{L}\operatorname{am}\left(ku,\frac{1}{k}\right)=2.\frac{\sin\eta u}{\mathfrak{Sin}\,\eta K'}-\tfrac{2}{3}.\frac{\sin 3\eta u}{\mathfrak{Sin}\,3\eta K'}+\tfrac{2}{5}.\frac{\sin 5\eta u}{\mathfrak{Sin}\,5\eta K'}-\tfrac{2}{7}.\frac{\sin 7\eta u}{\mathfrak{Sin}\,7\eta K'}+-\ldots.\quad\text{und}$$

$$18.\quad \mathfrak{L}\operatorname{am}\left(k(K-u),\frac{1}{k}\right)=2.\frac{\cos\eta u}{\mathfrak{Sin}\,\eta K'}+\tfrac{2}{3}.\frac{\cos 3\eta u}{\mathfrak{Sin}\,3\eta K'}+\tfrac{2}{5}.\frac{\cos 5\eta u}{\mathfrak{Sin}\,5\eta K'}+\tfrac{2}{7}.\frac{\cos 7\eta u}{\mathfrak{Sin}\,7\eta K'}++\ldots,$$

$$19.\quad \mathfrak{L}\operatorname{am}\left(ku,\frac{1}{k}\right)=\eta'u-\frac{\mathfrak{Sin}\,2\eta'u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta'K}+\tfrac{1}{2}.\frac{\mathfrak{Sin}\,4\eta'u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta'K}-\tfrac{1}{3}.\frac{\mathfrak{Sin}\,6\eta'u}{\mathfrak{Cos}\,6\eta'K}+\tfrac{1}{4}.\frac{\mathfrak{Sin}\,8\eta'u}{\mathfrak{Cos}\,8\eta'K}-+\ldots,$$

$$20.\quad \mathfrak{L}\operatorname{am}\left(k(K-u),\frac{1}{k}\right)=\log\left(\frac{1}{2p\,\mathfrak{Cos}\,\eta'u}\right)+p^2.\frac{\mathfrak{Cos}\,2\eta'u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta'K}-\frac{p^4}{2}.\frac{\mathfrak{Cos}\,4\eta'u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta'K}+\frac{p^6}{3}.\frac{\mathfrak{Cos}\,6\eta'u}{\mathfrak{Cos}\,6\eta'K}-\frac{p^8}{4}.\frac{\mathfrak{Cos}\,8\eta'u}{\mathfrak{Cos}\,8\eta'K}+-\ldots.$$

Die Constante $\log\frac{1}{2p}$ findet sich, indem man $u=K$ setzt.

$$\text{Da}\quad \partial\,\mathfrak{L}\left(\tfrac{1}{2}\pi-\operatorname{am}\left(k(K-u),\frac{1}{k}\right)\right)=-\frac{\partial\operatorname{am}\left(k(K-u),\frac{1}{k}\right)}{\operatorname{sn}\left(k(K-u),\frac{1}{k}\right)}=\frac{k\operatorname{cnc}u\,.\,\partial u}{k\operatorname{snc}u}$$

$=\frac{\partial u}{\operatorname{tnc}u}=k'\operatorname{tn}u.\partial u$ ist, so findet sich

$$\mathfrak{L}\left(\tfrac{1}{4}\pi - \mathrm{am}\left(k(K-u), \frac{1}{k}\right)\right)$$
$$= C + \log\frac{1}{\cos\eta u} + q^2 \cdot \frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\, 2\eta K'} - \frac{q^4}{2} \cdot \frac{\cos 4\eta u}{\mathfrak{Cos}\, 4\eta K'} + \frac{q^6}{3} \cdot \frac{\cos 6\eta u}{\mathfrak{Cos}\, 6\eta K'} - + \ldots .$$

Da $\mathfrak{L}\left(\frac{1}{2}\pi - \mathrm{am}\left(k(K-u), \frac{1}{k}\right)\right) = \log\sqrt{\frac{1+\mathrm{dnc}\, u}{1-\mathrm{dnc}\, u}}$ ist, so erhält man zur Bestimmung der Constante C die Gleichung

$$\log\sqrt{\frac{1+k'}{1-k'}} = C + \frac{2q^4}{1+q^4} - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{q^8}{1+q^8} + \tfrac{1}{3} \cdot \frac{q^{12}}{1+q^{12}} - \ldots ,$$

welche aber noch einfacher dargestellt werden kann. Nach Formel (10.) §. 175. ist für $u = o$

$$\log\sqrt{\frac{1}{k}} = \log\frac{1}{2\sqrt{q}} + \frac{2q^2}{1+q^2} - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{q^4}{1+q^4} + \tfrac{1}{3} \cdot \frac{q^6}{1+q^6} + \ldots .$$

Setzt man hierin q^2 statt q, wodurch sich der Modul k in den kleineren $\frac{1-k'}{1+k'}$ verwandelt, so entsteht

$$\log\sqrt{\frac{1+k'}{1-k'}} = \log\frac{1}{2q} + \frac{2q^4}{1+q^4} - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{q^8}{1+q^8} + \tfrac{1}{3} \cdot \frac{q^{12}}{1+q^{12}} - \tfrac{1}{4} \cdot \frac{q^{16}}{1+q^{16}} \ldots ,$$

woraus zu ersehen, daſs $C = \log\frac{1}{2q}$ ist. Daher ist

$$21. \quad \mathfrak{L}\left(\tfrac{1}{2}\pi - \mathrm{am}\left(k(K-u), \frac{1}{k}\right)\right) = \log\left(\frac{1}{2q\cos\eta u}\right) + \frac{q^2 \cos 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\, 2\eta K'} - \frac{q^4}{2} \cdot \frac{\cos 4\eta u}{\mathfrak{Cos}\, 4\eta K'}$$
$$+ \frac{q^6}{3} \cdot \frac{\cos 6\eta u}{\mathfrak{Cos}\, 6\eta K'} - \frac{q^8}{4} \cdot \frac{\cos 8\eta u}{\mathfrak{Cos}\, 8\eta K'} + \ldots \text{ und}$$

$$22. \quad \mathfrak{L}\left(\tfrac{1}{2}\pi - \mathrm{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right)\right) = \log\left(\frac{1}{2q\sin\eta u}\right) - q^2 \cdot \frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\, 2\eta K'} - \frac{q^4}{2} \cdot \frac{\cos 4\eta u}{\mathfrak{Cos}\, 4\eta K'}$$
$$- \frac{q^6}{3} \cdot \frac{\cos 6\eta u}{\mathfrak{Cos}\, 6\eta K'} - \frac{q^8}{4} \cdot \frac{\cos 8\eta u}{\mathfrak{Cos}\, 8\eta K'} - \ldots ,$$

Auſserdem finden sich noch die Reihen

$$23. \quad \mathfrak{L}\left(\tfrac{1}{2}\pi - \mathrm{am}\left(k(K-u), \frac{1}{k}\right)\right) = 2 \cdot \frac{\mathfrak{Cos}\, \eta' u}{\mathfrak{Sin}\, \eta' K} + \tfrac{2}{3} \cdot \frac{\mathfrak{Cos}\, 3\eta' u}{\mathfrak{Sin}\, 3\eta' K} + \tfrac{2}{5} \cdot \frac{\mathfrak{Cos}\, 5\eta' u}{\mathfrak{Sin}\, 5\eta' K}$$
$$+ \tfrac{2}{7} \cdot \frac{\mathfrak{Cos}\, 7\eta' u}{\mathfrak{Cos}\, 7\eta' K} + \ldots$$

$$24. \quad \mathfrak{L}\left(\tfrac{1}{2}\pi - \mathrm{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right)\right) = \log\frac{1}{\mathfrak{Tang}\frac{\eta' u}{2}} + 2p \cdot \frac{\mathfrak{Cos}\, \eta' u}{\mathfrak{Sin}\, \eta' K} + \frac{2p^3}{3} \cdot \frac{\mathfrak{Cos}\, 3\eta' u}{\mathfrak{Sin}\, 3\eta' K}$$
$$+ \frac{2p^5}{5} \cdot \frac{\mathfrak{Cos}\, 5\eta' u}{\mathfrak{Sin}\, 5\eta' K} + \ldots .$$

Um zu beweisen, daſs in der Formel (23.) die Constante $= o$ ist, dient die Gleichung

$$\log\sqrt{\frac{1+k'}{1-k'}} = \frac{4p}{1-p^2} + \tfrac{4}{3} \cdot \frac{p^3}{1-p^6} + \tfrac{4}{5} \cdot \frac{p^5}{1-p^{10}} + \ldots .$$

Die Reihe (24.) läfst sich auch aus der Reihe (12.) §. 193. dadurch herleiten, dafs man ku für u und $\frac{1}{k}$ statt des Moduls k setzt.

§. 195.

Die cyklischen und hyperbolischen Amplituden dargestellt als unendliche Reihen von Arcus.

Da

$$\operatorname{am} u = \eta u + \frac{2q^2 \sin 2\eta u}{1+q^4} + \tfrac{2}{2}.\frac{q^4 \sin 4\eta u}{1+q^8} + \tfrac{2}{3}.\frac{q^6 \sin 6\eta u}{1+q^{12}} + \tfrac{2}{4}.\frac{q^8 \sin 8\eta u}{1+q^{16}} + \ldots.$$

ist, so erhält man, weil $\frac{q^2}{1+q^4} = q^2 - q^6 + q^{10} - q^{14} \ldots.$ ist,

$$\begin{aligned}\operatorname{am} u = \eta u &+ 2q^2 \sin 2\eta u + \tfrac{2}{2}q^4 \sin 4\eta u + \tfrac{2}{3}q^6 \sin 6\eta u \ldots.,\\ &- 2q^6 \sin 2\eta u + \tfrac{2}{2}q^{12} \sin 4\eta u - \tfrac{2}{3}q^{18} \sin 6\eta u \ldots.,\\ &+ 2q^{10} \sin 2\eta u + \tfrac{2}{2}q^{20} \sin 4\eta u + \tfrac{2}{3}q^{30} \sin 6\eta u \ldots.,\\ &- 2q^{14} \sin 2\eta u - \tfrac{2}{2}q^{28} \sin 4\eta u - \tfrac{2}{3}q^{42} \sin 6\eta u \ldots.,\\ &\text{u. s. w.}\end{aligned}$$

Die einzelnen Horizontal-Reihen lassen sich nach §. 56. des ersten Theiles summiren. Es ist namentlich

$$2q^2 \sin 2\eta u + \tfrac{2}{2}q^4 \sin 4\eta u + \tfrac{2}{3}q^6 \sin 6\eta u \ldots. = 2 \operatorname{arctang}\left(\frac{q^2 \sin 2\eta u}{1-q^2 \cos 2\eta u}\right),$$

und also

$$1. \quad \operatorname{am} u = \eta u + 2 \operatorname{arctang}\left(\frac{q^2 \sin 2\eta u}{1-q^2 \cos 2\eta u}\right) - 2 \operatorname{arctang}\left(\frac{q^6 \sin 2\eta u}{1-q^6 \cos 2\eta u}\right)$$
$$+ 2 \operatorname{arctang}\left(\frac{q^{10} \sin 2\eta u}{1-q^{10} \cos 2\eta u}\right) - 2 \operatorname{arctang}\left(\frac{q^{14} \sin 2\eta u}{1-q^{14} \cos 2\eta u}\right) + - \ldots. \quad \text{und}$$

$$2. \quad \operatorname{amc} u = \tfrac{1}{2}\pi - \eta u + 2 \operatorname{arctang}\left(\frac{q^2 \sin 2\eta u}{1+q^2 \cos 2\eta u}\right) - 2 \operatorname{arctang}\left(\frac{q^6 \sin 2\eta u}{1+q^6 \cos 2\eta u}\right)$$
$$+ 2 \operatorname{arctang}\left(\frac{q^{10} \sin 2\eta u}{1+q^{10} \cos 2\eta u}\right) - + \ldots.$$

Die Reihe (1.) formen wir noch um. Es ist

$$\frac{q^2 \sin 2\eta u}{1-q^2 \cos 2\eta u} = \frac{2q^2 \sin \eta u \cos \eta u}{(1-q^2)\cos^2 \eta u + (1+q^2)\sin^2 \eta u} = \frac{2q^2 \operatorname{tang} \eta u}{1-q^2 + (1+q^2)\operatorname{tang}^2 \eta u}.$$

Setzt man $\frac{2q^2 \operatorname{tang} \eta u}{1-q^2 + (1+q^2)\operatorname{tang}^2 \eta u} = \operatorname{tang} A$, so ist $\operatorname{tang}(A + \eta u) = \frac{1+q^2}{1-q^2} \operatorname{tang} \eta u = \frac{\operatorname{tang} \eta u}{\mathfrak{Tang}\, \eta K'}$, also $A = \operatorname{arctang}\left(\frac{\operatorname{tang} \eta u}{\mathfrak{Tang}\, \eta K'}\right) - \eta u$. Auf gleiche Weise können auch die folgenden Glieder umgeformt werden, und es ist also

$$\begin{aligned}\operatorname{am} u = \eta u &+ 2 \operatorname{arctang}\left(\frac{\operatorname{tang} \eta u}{\mathfrak{Tang}\, \eta K'}\right) - 2 \operatorname{arctang}\left(\frac{\operatorname{tang} \eta u}{\mathfrak{Tang}\, 3\eta K'}\right)\\ &- 2\eta u \qquad\qquad\qquad\quad + 2\eta u\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + 2 \operatorname{arctang}\left(\frac{\operatorname{tang} \eta u}{\mathfrak{Tang}\, 5\eta K'}\right) - + \ldots.\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\quad - 2\eta u \qquad\qquad\qquad + - \ldots.\end{aligned}$$

Diese Reihe kann wie folgt dargestellt werden:

$$3.\quad \operatorname{am} u = \pm \eta u + 2\operatorname{arctang}\left(\frac{\operatorname{tang}\eta u}{\mathfrak{Tang}\,\eta K'}\right) - 2\operatorname{arctang}\left(\frac{\operatorname{tang}\eta u}{\mathfrak{Tang}\,3\eta K'}\right) + 2\operatorname{arctang}\left(\frac{\operatorname{tang}\eta u}{\mathfrak{Tang}\,5\eta K'}\right) - + \ldots,$$

wenn $\pm$ in $-$ verwandelt wird, falls das letzte Glied der Reihe positiv ist, hingegen $\pm$ in $+$, wenn das letzte Glied der Reihe, welches in Rechnung gezogen wird, negativ ist. Hiernach läſst sich also $\operatorname{am} u$ aus u noch bequemer berechnen, als nach der Reihe (1.) oder (2.).

Da

$$\operatorname{am} u = l(\eta' u) + \frac{4p^2}{1-p^2}\mathfrak{Sin}\,\eta' u - \frac{4p^6}{3(1-p^6)}\mathfrak{Sin}\,3\eta' u + \frac{4p^{10}}{5(1-p^{10})}\mathfrak{Sin}\,5\eta' u - + \ldots$$

ist; ferner $\frac{4p^2}{1-p^2} = 4p^2 + 4p^4 + 4p^6 + \ldots$: so erhält man durch Entwickelung der einzelnen Glieder:

$$\begin{aligned}\operatorname{am} u = l(\eta' u) &+ 4p^2\,\mathfrak{Sin}\,\eta' u - \tfrac{4}{3}p^6\,\mathfrak{Sin}\,3\eta' u + \tfrac{4}{5}p^{10}\,\mathfrak{Sin}\,5\eta' u - + \ldots\\ &+ 4p^4\,\mathfrak{Sin}\,\eta' u - \tfrac{4}{3}p^{12}\,\mathfrak{Sin}\,3\eta' u + \tfrac{4}{5}p^{20}\,\mathfrak{Sin}\,5\eta' u - + \ldots\\ &+ 4p^6\,\mathfrak{Sin}\,\eta' u - \tfrac{4}{3}p^{18}\,\mathfrak{Sin}\,3\eta' u + \tfrac{4}{5}p^{30}\,\mathfrak{Sin}\,5\eta' u - + \ldots\end{aligned}$$

u. s. w.

Da aber $4p^2\,\mathfrak{Sin}\,\eta' u - \frac{4}{3}p^6\,\mathfrak{Sin}\,3\eta' u + \frac{4}{5}p^{10}\,\mathfrak{Sin}\,5\eta' u - \frac{4}{7}p^{14}\,\mathfrak{Sin}\,7\eta' u + - \ldots = 2\operatorname{arctang}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta' K}\right)$ ist, so erhält man durch Summation der einzelnen Horizontal-Reihen:

$$4.\quad \operatorname{am} u = l(\eta' u) + 2\operatorname{arctang}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta' K}\right) + 2\operatorname{arctang}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta' K}\right) + 2\operatorname{arctang}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,6\eta' K}\right) + \ldots$$

Da dem Zusatze zu §. 23. gemäſs

$$l(2\eta' K + \eta' u) - l(2\eta' K - \eta' u) = 2\operatorname{arctang}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta' K}\right)$$

ist, so kann die vorige Reihe auch also dargestellt werden:

$$\begin{aligned}5.\quad \operatorname{am} u = {} & l(\eta' u) + l(2\eta' K + \eta' u) + l(4\eta' K + \eta' u) + l(6\eta' K + \eta' u) + l(8\eta' K + \eta' u) + + \ldots\\ & - l(2\eta' K - \eta' u) - l(4\eta' K - \eta' u) - l(6\eta' K - \eta' u) - l(8\eta' K - \eta' u) - - \ldots\end{aligned}$$

Die Entwickelung der Reihe (4.) §. 193. giebt

$$\begin{aligned}\operatorname{amc} u = \tfrac{1}{2}\pi &- 4p\,\mathfrak{Sin}\,\eta' u + \tfrac{4}{3}p^3\,\mathfrak{Sin}\,3\eta' u - \tfrac{4}{5}p^5\,\mathfrak{Sin}\,5\eta' u + - \ldots\\ &- 4p^3\,\mathfrak{Sin}\,\eta' u + \tfrac{4}{3}p^9\,\mathfrak{Sin}\,3\eta' u - \tfrac{4}{5}p^{15}\,\mathfrak{Sin}\,5\eta' u + - \ldots\\ &- 4p^5\,\mathfrak{Sin}\,\eta' u + \tfrac{4}{3}p^{15}\,\mathfrak{Sin}\,3\eta' u - \tfrac{4}{5}p^{25}\,\mathfrak{Sin}\,5\eta' u + - \ldots\end{aligned}$$

u. s. w.,

und die Summation der einzelnen Horizontal-Reihen giebt

$$6. \quad \operatorname{amc} u = \tfrac{1}{2}\pi - 2\operatorname{arctang}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,\eta' K}\right) - 2\operatorname{arctang}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta' K}\right)$$
$$- 2\operatorname{arctang}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,5\eta' K}\right) - 2\operatorname{arctang}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,7\eta' K}\right) - - \dots$$

Durch Anwendung der Longitudinal-Function kann diese Reihe einfacher also dargestellt werden:

$$7. \quad \operatorname{amc} u =$$
$$\tfrac{1}{2}\pi - l(\eta' K + \eta' u) - l(3\eta' K + \eta' u) - l(5\eta' K + \eta' u) - l(7\eta' K + \eta' u) - - \dots$$
$$- l(\eta' K - \eta' u) + l(3\eta' K - \eta' u) + l(5\eta' K - \eta' u) + l(7\eta' K - \eta' u) + + \dots$$

Vertauscht man in der Reihe (4.) die beiden conjugirten Moduln und setzt ui statt u, so entsteht

$$8. \quad \mathfrak{L}\operatorname{am} u = \mathfrak{L}(\eta u) + 2\,\mathfrak{Arc}\mathfrak{Tang}\left(\frac{\sin \eta u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta K'}\right) + 2\,\mathfrak{Arc}\mathfrak{Tang}\left(\frac{\sin \eta u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta K'}\right)$$
$$+ 2\,\mathfrak{Arc}\mathfrak{Tang}\left(\frac{\sin \eta u}{\mathfrak{Cos}\,6\eta K'}\right) + \dots$$

und

$$9. \quad \mathfrak{L}\operatorname{amc} u = \mathfrak{L}(\tfrac{1}{2}\pi - \eta u) + 2\,\mathfrak{Arc}\mathfrak{Tang}\left(\frac{\cos \eta u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta K'}\right) + 2\,\mathfrak{Arc}\mathfrak{Tang}\left(\frac{\cos \eta u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta K'}\right)$$
$$+ 2\,\mathfrak{Arc}\mathfrak{Tang}\left(\frac{\cos \eta u}{\mathfrak{Cos}\,6\eta K'}\right) + \dots$$

Durch dasselbe Verfahren verwandelt sich die Reihe (3.) in

$$10. \quad \mathfrak{L}\operatorname{am} u = \pm \eta' u + 2\,\mathfrak{Arc}\mathfrak{Tang}\left(\frac{\mathfrak{Tang}\,\eta' u}{\mathfrak{Tang}\,\eta' K}\right) - 2\,\mathfrak{Arc}\mathfrak{Tang}\left(\frac{\mathfrak{Tang}\,\eta' u}{\mathfrak{Tang}\,3\eta' K}\right)$$
$$+ \mathfrak{Arc}\mathfrak{Tang}\left(\frac{\mathfrak{Tang}\,\eta' u}{\mathfrak{Tang}\,3\eta' K}\right) - + \dots;$$

und in Beziehung auf das Vorzeichen $\pm$ gilt dieselbe Bemerkung, wie bei der Formel (3.). Es ist übrigens auch

$$11. \quad \mathfrak{L}\operatorname{am} u = \eta' u + 2\,\mathfrak{Arc}\mathfrak{Tang}\left(\frac{p^2\,\mathfrak{Sin}\,2\eta' u}{1 - p^2\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u}\right) - 2\,\mathfrak{Arc}\mathfrak{Tang}\left(\frac{p^4\,\mathfrak{Sin}\,4\eta' u}{1 - p^4\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u}\right)$$
$$+ 2\,\mathfrak{Arc}\mathfrak{Tang}\left(\frac{p^6\,\mathfrak{Sin}\,6\eta' u}{1 - p^6\,\mathfrak{Cos}\,6\eta' u}\right) - + \dots$$

Stellen wir die Reihe (8.) §. 193, entwickelt also dar:

$$\mathfrak{L}\operatorname{amc} u = \log\left(\frac{1}{2p\,\mathfrak{Sin}\,\eta' u}\right) - 2p^4\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u - \frac{2p^8}{2}\,\mathfrak{Cos}\,4\eta' u - \frac{2p^{12}}{3}\,\mathfrak{Cos}\,6\eta' u - \dots$$
$$+ 2p^8\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u + \frac{2p^{16}}{2}\,\mathfrak{Cos}\,4\eta' u + \frac{2p^{24}}{3}\,\mathfrak{Cos}\,6\eta' u + \dots$$
$$- 2p^{12}\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u - \frac{2p^{24}}{2}\,\mathfrak{Cos}\,4\eta' u - \frac{2p^{36}}{3}\,\mathfrak{Cos}\,6\eta' u - \dots$$

u. s. w.

und benutzen die Formel

$$-2p^4\,\mathfrak{Cos}2\eta'u-\frac{2p^8}{2}\mathfrak{Cos}4\eta'u-\frac{2p^{12}}{3}\mathfrak{Cos}6\eta'u-\ldots=\log(1-2p^4\mathfrak{Cos}2\eta'u+p^8),$$

so entsteht die Reihe

12. $\mathfrak{L}\,\mathrm{amc}\,u=$

$$\log\left\{\frac{1}{2p\,\mathfrak{Sin}\eta'u}\cdot\frac{1-2p^4\mathfrak{Cos}2\eta'u+p^8}{1-2p^8\mathfrak{Cos}2\eta'u+p^{16}}\cdot\frac{1-2p^{12}\mathfrak{Cos}2\eta'u+p^{24}}{1-2p^{16}\mathfrak{Cos}2\eta'u+p^{32}}\cdot\frac{1-2p^{20}\mathfrak{Cos}2\eta'u+p^{40}}{1-2p^{24}\mathfrak{Cos}2\eta'u+p^{48}}\cdots\right\}.$$

Da $\mathfrak{L}\,\mathrm{amc}\,u=\log\sqrt{\frac{1+\mathrm{snc}\,u}{1-\mathrm{snc}\,u}}$ ist, so erhält man, wenn $u=iK'$, also $\eta'u=\frac{1}{2}\pi i$ gesetzt wird,

$$\log\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}=\log\left\{\frac{1}{2p}\cdot\frac{1+2p^4+p^8}{1+2p^8+p^{16}}\cdot\frac{1+2p^{12}+p^{24}}{1+2p^{16}+p^{32}}\cdot\frac{1+2p^{20}+p^{40}}{1+2p^{24}+p^{48}}\cdots\right\}.$$

Wird diese Gleichung von der vorigen subtrahirt, so entsteht, da

$$\frac{1-2p^4\,\mathfrak{Cos}^2\eta'u+p^8}{1+2p^4+p^8}=1-\frac{4p^4\,\mathfrak{Cos}^2\eta'u}{(1+p^4)^2}=1-\frac{\mathfrak{Cos}^2\eta'u}{\mathfrak{Cos}^2 2\eta'K}$$

ist, durch eine gleichmäſsige Umformung aller Factoren:

13. $\mathfrak{L}\,\mathrm{amc}\,u=$

$$\log\left\{\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}\cdot\frac{1}{\mathfrak{Sin}\eta'u}\cdot\frac{1-\frac{\mathfrak{Cos}^2\eta'u}{\mathfrak{Cos}^2 2\eta'K}}{1-\frac{\mathfrak{Cos}^2\eta'u}{\mathfrak{Cos}^2 4\eta'K}}\cdot\frac{1-\frac{\mathfrak{Cos}^2\eta'u}{\mathfrak{Cos}^2 6\eta'K}}{1-\frac{\mathfrak{Cos}^2\eta'u}{\mathfrak{Cos}^2 8\eta'K}}\cdot\frac{1-\frac{\mathfrak{Cos}^2\eta'u}{\mathfrak{Cos}^2 10\eta'K}}{1-\frac{\mathfrak{Cos}^2\eta'u}{\mathfrak{Cos}^2 12\eta'K}}\cdots\right\}.$$

Setzt man in der Reihe (8.) noch $k'u$ statt u und $\frac{ik}{k'}$ statt des Moduls k, so verwandelt sich $\mathrm{am}\,u$ in $\frac{1}{2}\pi-\mathrm{amc}\,u$, und es ist also

14. $$\mathfrak{L}(\tfrac{1}{2}\pi-\mathrm{amc}\,u)=\mathfrak{L}(\eta u)-2\,\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\left(\frac{\sin\eta u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta K'}\right)+2\,\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\left(\frac{\sin\eta u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta K'}\right)$$
$$-2\,\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\left(\frac{\sin\eta u}{\mathfrak{Cos}\,6\eta K'}\right)+-\ldots,$$

15. $$\mathfrak{L}(\tfrac{1}{2}\pi-\mathrm{am}\,u)=\mathfrak{L}(\tfrac{1}{2}\pi-\eta u)-2\,\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\left(\frac{\cos\eta u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta K'}\right)+2\,\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\left(\frac{\cos\eta u}{\mathfrak{Cos}\,6\eta K'}\right)$$
$$-2\,\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\left(\frac{\cos\eta u}{\mathfrak{Cos}\,6\eta K'}\right)+-\ldots.$$

Da nach Formel (11.) §. 193.

$$\mathfrak{L}(\tfrac{1}{2}\pi-\mathrm{amc}\,u)=\frac{4p\,\mathfrak{Sin}\,\eta'u}{1+p^2}+\tfrac{4}{3}\cdot\frac{p^3\,\mathfrak{Sin}\,3\eta'u}{1+p^6}+\tfrac{4}{5}\cdot\frac{p^5\,\mathfrak{Sin}\,5\eta'u}{1+p^{10}}+\ldots.$$

ist, so erhält man durch Entwicklung

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}(\tfrac{1}{2}\pi-\mathrm{amc}\,u)=\;&4p\;\mathfrak{Sin}\,\eta'u+\tfrac{4}{3}p^3\;\mathfrak{Sin}\,3\eta'u+\tfrac{4}{5}p^5\;\mathfrak{Sin}\,5\eta'u+\ldots.\\&-4p^3\,\mathfrak{Sin}\,\eta'u-\tfrac{4}{3}p^9\;\mathfrak{Sin}\,3\eta'u-\tfrac{4}{5}p^{15}\,\mathfrak{Sin}\,5\eta'u-\ldots.\\&+4p^5\,\mathfrak{Sin}\,\eta'u+\tfrac{4}{3}p^{15}\,\mathfrak{Sin}\,3\eta'u+\tfrac{4}{5}p^{25}\,\mathfrak{Sin}\,5\eta'u+\ldots;\end{aligned}$$

u. s. w.

und da $2p\,\mathfrak{Sin}\,\eta'u+\frac{2}{3}p^3\,\mathfrak{Sin}3\eta'u+\frac{2}{5}p^5\,\mathfrak{Sin}\,5\eta'u+\ldots=\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta'u}{\mathfrak{Sin}\,\eta'K}\right)$

ist, so erhält man durch Summation der einzelnen Horizontal-Reihen

$$16.\quad \mathfrak{L}(\tfrac{1}{2}\pi - \mathrm{amc}\,u) =$$

$$2\,\mathrm{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{Sin}\,\eta' u}{\mathrm{Sin}\,\eta' K}\right) - 2\,\mathrm{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{Sin}\,\eta' u}{\mathrm{Sin}\,3\eta' K}\right) + 2\,\mathrm{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{Sin}\,\eta' u}{\mathrm{Sin}\,5\eta' K}\right) - 2\,\mathrm{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{Sin}\,\eta' u}{\mathrm{Sin}\,7\eta' K}\right) + - \ldots$$

Da der Formel (12.) §. 193. gemäfs

$$\mathfrak{L}(\tfrac{1}{2}\pi - \mathrm{am}\,u) = \log\frac{1}{\mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}(\eta' u)} - \frac{4p^2\,\mathrm{Cos}\,\eta' u}{1+p^2} - \frac{4p^6\,\mathrm{Cos}\,3\eta' u}{3(1+p^6)} - \frac{4p^{10}\,\mathrm{Cos}\,5\eta' u}{5(1+p^{10})} - \ldots$$

ist, so erhält man durch Entwickelung zunächst

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}(\tfrac{1}{2}\pi - \mathrm{am}\,u) = \log\frac{1}{\mathrm{Tang}\frac{1}{2}(\eta' u)} &- 4p^2\,\mathrm{Cos}\,\eta' u - \tfrac{4}{3}p^6\,\mathrm{Cos}\,3\eta' u - \tfrac{4}{5}p^{10}\,\mathrm{Cos}\,5\eta' u - \ldots\\ &+ 4p^4\,\mathrm{Cos}\,\eta' u + \tfrac{4}{3}p^{12}\,\mathrm{Cos}\,3\eta' u + \tfrac{4}{5}p^{20}\,\mathrm{Cos}\,5\eta' u + \ldots\\ &- 4p^6\,\mathrm{Cos}\,\eta' u - \tfrac{4}{3}p^{18}\,\mathrm{Cos}\,3\eta' u - \tfrac{4}{5}p^{30}\,\mathrm{Cos}\,5\eta' u - \ldots\end{aligned}$$

u. s. w.

Da aber

$$2p^2\,\mathrm{Cos}\,\eta' u + \tfrac{2}{3}p^6\,\mathrm{Cos}\,3\eta' u + \tfrac{2}{5}p^{10}\,\mathrm{Cos}\,5\eta' u + \ldots = \mathrm{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{Cos}\,\eta' u}{\mathrm{Cos}\,2\eta' K}\right) \text{ und}$$

$$\log\frac{1}{\mathrm{Tang}\,\frac{1}{2}(\eta' u)} = \log\frac{1+e^{-\eta' u}}{1-e^{-\eta' u}} = 2\,\mathrm{Arc\,Tang}(e^{-\eta' u})$$

ist, so erhält man die Reihe

$$17.\quad \mathfrak{L}(\tfrac{1}{2}\pi - \mathrm{am}\,u)$$

$$= 2\,\mathrm{Arc\,Tang}(e^{-\eta' u}) - 2\,\mathrm{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{Cos}\,\eta' u}{\mathrm{Cos}\,2\eta' K}\right) + 2\,\mathrm{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{Cos}\,\eta' u}{\mathrm{Cos}\,4\eta' K}\right) - 2\,\mathrm{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{Cos}\,\eta' u}{\mathrm{Cos}\,6\eta' K}\right) + - \ldots$$

Da $\mathfrak{L}(\frac{1}{2}\pi - x) = \log\frac{1+e^{-\mathfrak{L}x}}{1-e^{-\mathfrak{L}x}}$, also $\mathfrak{L}(\frac{1}{2}\pi - lx) = \log\frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}}$ ist, so kann auch $\mathfrak{L}(\frac{1}{2}\pi - l(\eta' u))$ für das Anfangsglied $2\,\mathrm{Arc\,Tang}(e^{-\eta' u})$ gesetzt werden.

§. 196.

Nach Formel (13.) §. 194. ist

$$\mathrm{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = \frac{4q\sin\eta u}{1+q^2} + \tfrac{4}{3}\cdot\frac{q^3\sin 3\eta u}{1+q^6} + \tfrac{4}{5}\cdot\frac{q^5\sin 5\eta u}{1+q^{10}} + \ldots,$$

und also

$$\begin{aligned}\mathrm{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = \;& 4q\sin\eta u + \tfrac{4}{3}q^3\sin 3\eta u + \tfrac{4}{5}q^5\sin 5\eta u + \ldots\\ &- 4q^3\sin\eta u - \tfrac{4}{3}q^9\sin 3\eta u - \tfrac{4}{5}q^{15}\sin 5\eta u - \ldots\\ &+ 4q^5\sin\eta u + \tfrac{4}{3}q^{15}\sin 3\eta u + \tfrac{4}{5}q^{25}\sin 5\eta u + \ldots\end{aligned}$$

u. s. w.

Da aber $2q\sin\eta u + \frac{2}{3}q^3\sin 3\eta u + \frac{2}{5}q^5\sin 5\eta u + \ldots = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\sin\eta u}{\mathfrak{Sin}\,\eta K'}\right)$ ist, so erhält man

$$18.\quad \operatorname{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right)$$
$$= 2\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\sin\eta u}{\mathfrak{Sin}\,\eta K'}\right) - 2\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\sin\eta u}{\mathfrak{Sin}\,3\eta K'}\right) + 2\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\sin\eta u}{\mathfrak{Sin}\,5\eta K'}\right)$$
$$- 2\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\sin\eta u}{\mathfrak{Sin}\,7\eta K'}\right) + - \ldots,$$

$$19.\quad \operatorname{am}\left(k(K-u), \frac{1}{k}\right)$$
$$= 2\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\cos\eta u}{\mathfrak{Sin}\,\eta K'}\right) - 2\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\cos\eta u}{\mathfrak{Sin}\,3\eta K'}\right) + 2\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\cos\eta u}{\mathfrak{Sin}\,5\eta K'}\right)$$
$$- 2\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\cos\eta u}{\mathfrak{Sin}\,7\eta K'}\right) + - \ldots.$$

Nach Formel (15.) §. 194. ist

$$\operatorname{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = l(\eta' u) - \frac{4p^2}{1+p^2}\mathfrak{Sin}\,\eta' u + \frac{4p^6}{3(1+p^6)}\mathfrak{Sin}\,3\eta' u$$
$$- \frac{4p^{10}}{5(1+p^{10})}\mathfrak{Sin}\,5\eta' u + - \ldots,$$

und folglich

$$\operatorname{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = l(\eta' u) - 4p^2\mathfrak{Sin}\,\eta' u + \tfrac{4}{3}p^6\mathfrak{Sin}\,3\eta' u - \tfrac{4}{5}p^{10}\mathfrak{Sin}\,5\eta' u + - \ldots$$
$$+ 4p^4\mathfrak{Sin}\,\eta' u - \tfrac{4}{3}p^{12}\mathfrak{Sin}\,3\eta' u + \tfrac{4}{5}p^{20}\mathfrak{Sin}\,5\eta' u - + \ldots,$$
$$- 4p^6\mathfrak{Sin}\,\eta' u + \tfrac{4}{3}p^{18}\mathfrak{Sin}\,3\eta' u - \tfrac{4}{5}p^{30}\mathfrak{Sin}\,5\eta' u + - \ldots,$$

u. s. w.

Werden die einzelnen Horizontal-Reihen summirt, so erhält man

20.
$$\operatorname{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = l(\eta' u) - 2\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta' K}\right) + 2\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta' K}\right)$$
$$- 2\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,6\eta' K}\right) + - \ldots,$$

oder auch nach §. 22.

$$\operatorname{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = l(\eta' u) - l(2\eta' K + \eta' u) + l(4\eta' K + \eta' u) - l(6\eta' K + \eta' u) + - \ldots$$
$$+ l(2\eta' K - \eta' u) - l(4\eta' K - \eta' u) + l(6\eta' K - \eta' u) - + \ldots$$

Auf ähnliche Art findet man

$$21.\quad \operatorname{am}\left(k(K-u), \frac{1}{k}\right) = \tfrac{1}{2}\pi - 2\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\mathfrak{Cos}\,\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,\eta' K}\right) + 2\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\mathfrak{Cos}\,\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,3\eta' K}\right)$$
$$- 2\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\mathfrak{Cos}\,\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,5\eta' K}\right) + - \ldots.$$

Da

$$2\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\mathfrak{Cos}\,\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,\eta' K}\right) = \pi - 2\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta' K}{\mathfrak{Cos}\,\eta' u}\right) = \pi - \{l(\eta' K + \eta' u) + l(\eta' K + \eta' u)\}$$

ist, so kann man die vorige Reihe auch also darstellen:

$$\text{am}\left(k(K-u),\frac{1}{k}\right) = \pm\tfrac{1}{2}\pi + l(\eta'K+\eta'u) - l(3\eta'K+\eta'u) + l(5\eta'K+\eta'u) - + \ldots$$
$$+ l(\eta'K-\eta'u) - l(3\eta'K-\eta'u) + l(5\eta'K-\eta'u) - + \ldots;$$

und in dieser Reihe mufs das obere Zeichen vor dem Anfangsgliede $\pm\frac{1}{2}\pi$ genommen werden, wenn man die Reihe mit zwei negativen Gliedern abbricht: hingegen das untere Zeichen, wenn man die Reihe mit zwei positiven Gliedern abbricht. Die einzelnen Glieder in der vorstehenden Reihe, wie auch in den Reihen (4.), (7.) und (20.) können auch entweder nach der Formel

$$l\varphi = \tfrac{1}{2}\pi - 2\,\text{arctang}(e^{-\varphi}), \text{ oder nach der Formel}$$
$$l\varphi = 2\,\text{arctang}(\mathfrak{Tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi)$$

berechnet werden. Will man nur logarithmische Tafeln, nicht also die der cyklischen und hyperbolischen Functionen anwenden, so kann man, zumal dann, wenn φ ziemlich grofs ist, auch von der Reihe

$$l\varphi = \tfrac{1}{2}\pi - \frac{2}{e^{\varphi}} + \frac{2}{3.e^{3\varphi}} - \frac{2}{5.e^{5\varphi}} + \frac{2}{7.e^{7\varphi}} - + \ldots$$

Gebrauch machen, da dieselbe so sehr rasch convergirt.

Auf gleiche Art findet man noch die Reihen

$$22.\left\{\begin{aligned} \mathfrak{L}\,\text{am}\left(ku,\frac{1}{k}\right) &= 2\,\mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\sin\eta u}{\mathfrak{Cos}\,\eta K'}\right) + 2\,\mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\sin\eta u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta K'}\right) \\ &\quad + 2\,\mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\sin\eta u}{\mathfrak{Cos}\,5\eta K'}\right) + \ldots \\ \mathfrak{L}\,\text{am}\left(k(K-u)\frac{1}{k}\right) &= 2\,\mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\cos\eta u}{\mathfrak{Cos}\,\eta K'}\right) + 2\,\mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\cos\eta u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta K'}\right) \\ &\quad + 2\,\mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\cos\eta u}{\mathfrak{Cos}\,5\eta K'}\right) + \ldots \end{aligned}\right.$$

$$23.\quad \mathfrak{L}\,\text{am}\left(ku,\frac{1}{k}\right) =$$
$$\eta'u - 2\,\mathfrak{ArcTang}\left(\frac{p^2\,\mathfrak{Sin}\,2\eta'u}{1+p^2\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'u}\right) + 2\,\mathfrak{ArcTang}\left(\frac{p^6\,\mathfrak{Sin}\,2\eta'u}{1+p^6\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'u}\right)$$
$$- 2\,\mathfrak{ArcTang}\left(\frac{p^{10}\,\mathfrak{Sin}\,2\eta'u}{1+p^{10}\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'u}\right) + - \ldots$$

Da

$$\frac{p^2\,\mathfrak{Sin}2\eta'u}{1+p^2\mathfrak{Cos}2\eta'u} = \frac{2p^2\,\mathfrak{Sin}\,\eta'u\,\mathfrak{Cos}\,\eta'u}{(1+p^2)\mathfrak{Cos}^2\eta'u-(1-p^2)\mathfrak{Sin}^2\eta'u} = \frac{2p^2\,\mathfrak{Tang}\,\eta'u}{1+p^2-(1-p^2)\mathfrak{Tang}^2\eta'u}$$
$$= \frac{\left(1-\frac{1-p^2}{1+p^2}\right)\mathfrak{Tang}\,\eta'u}{1-\frac{1-p^2}{1+p^2}\mathfrak{Tang}^2\,\eta'u} = \mathfrak{Tang}\left(\eta'u - \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{1-p^2}{1+p^2}\mathfrak{Tang}\,\eta'u\right)\right)$$

ist, so ist auch

$$\mathfrak{L}\,\mathrm{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right) =$$

$$\eta' u - 2\eta' u + 2\,\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\left(\frac{\mathfrak{Tang}\,\eta' u}{\mathfrak{Cot}\,\eta' K}\right) + 2\eta' u - 2\,\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\left(\frac{\mathfrak{Tang}\,\eta' u}{\mathfrak{Cot}\,3\eta' K}\right) + - \ldots \text{ oder}$$

$$24.\quad \mathfrak{L}\,\mathrm{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = \pm\eta' u + 2\,\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\left(\frac{\mathfrak{Tang}\,\eta' u}{\mathfrak{Cot}\,\eta' K}\right) - 2\,\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\left(\frac{\mathfrak{Tang}\,\eta' u}{\mathfrak{Cot}\,3\eta' K}\right)$$
$$+ 2\,\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\left(\frac{\mathfrak{Tang}\,\eta' u}{\mathfrak{Cot}\,5\eta' K}\right) - + \ldots.$$

In der folgenden Gleichung gilt das obere Vorzeichen des Anfangsgliedes $\pm\eta' u$, wenn man die Reihe mit einem negativen Gliede abbricht, und das untere Vorzeichen, wenn man die Reihe mit einem positiven Gliede abbricht:

$$25.\quad \mathfrak{L}\,\mathrm{am}\left(k(K-u), \frac{1}{k}\right) =$$

$$\log\left\{\frac{1}{2p\,\mathfrak{Cos}\,\eta' u}\cdot\frac{1+2p^4\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u+p^8}{1+2p^8\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u+p^{16}}\cdot\frac{1+2p^{12}\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u+p^{24}}{1+2p^{16}\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u+p^{32}}\cdot\frac{1+2p^{20}\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u+p^{40}}{1+2p^{24}\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u+p^{48}}\cdots\right\},$$

$$26.\ \begin{cases} \mathfrak{L}\left(\frac{1}{2}\pi - \mathrm{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right)\right) = \\ \log\left(\frac{1}{2q\,\sin\eta u}\cdot\frac{1-2q^4\cos 2\eta u+q^8}{1-2q^8\cos 2\eta u+q^{16}}\cdot\frac{1-2q^{12}\cos 2\eta u+q^{24}}{1-2q^{16}\cos 2\eta u+q^{32}}\cdot\frac{1-2q^{20}\cos 2\eta u+q^{40}}{1-2q^{24}\cos 2\eta u+q^{48}}\cdots\right), \\ \mathfrak{L}\left(\frac{1}{2}\pi - \mathrm{am}\left(k(K-u), \frac{1}{k}\right)\right) = \\ \log\left(\frac{1}{2q\cos\eta u}\cdot\frac{1+2q^4\cos 2\eta u+q^8}{1+2q^8\cos 2\eta u+q^{16}}\cdot\frac{1+2q^{12}\cos 2\eta u+q^{24}}{1+2q^{16}\cos 2\eta u+q^{32}}\cdot\frac{1+2q^{20}\cos 2\eta u+q^{40}}{1+2q^{24}\cos 2\eta u+q^{48}}\cdots\right), \end{cases}$$

$$27.\quad \mathfrak{L}\left(\frac{1}{2}\pi - \mathrm{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right)\right) =$$

$$2\,\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\left(e^{-\eta' u}\right) + 2\,\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\left(\frac{\mathfrak{Cos}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta' K}\right) + 2\,\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\left(\frac{\mathfrak{Cos}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta' K}\right)$$
$$+ 2\,\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\left(\frac{\mathfrak{Cos}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,6\eta' K}\right) + \ldots,$$

$$28.\quad \mathfrak{L}\left(\frac{1}{2}\pi = \mathrm{am}\left(k(K-u), \frac{1}{k}\right)\right) =$$

$$2\,\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\left(\frac{\mathfrak{Cos}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,\eta' K}\right) + 2\,\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\left(\frac{\mathfrak{Cos}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta' K}\right) + 2\,\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\left(\frac{\mathfrak{Cos}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,5\eta' K}\right) + \ldots$$

§. 197.

Die Amplituden als Arcus, deren Tangenten Brüche sind, mit unendlichen Reihen für den Zähler und Nenner.

Da $\mathfrak{L}\,\mathrm{amc}\,u = \log\sqrt{\frac{1+\mathrm{snc}\,u}{1-\mathrm{snc}\,u}}$, $\mathfrak{L}\left(\frac{1}{2}\pi - \eta u\right) = \log\sqrt{\frac{1+\cos\eta u}{1-\cos\eta u}} = \log\mathrm{cotg}\,\frac{\eta u}{2}$ und $2\,\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\left(\frac{\cos\eta u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta K'}\right) = \log\frac{1+2q^2\cos\eta u+q^4}{1-2q^2\cos\eta u+q^4}$ ist, so ist nach For-

mel (9.) §. 195.

$$\sqrt{\frac{1+\mathrm{snc}\,u}{1-\mathrm{snc}\,u}} = \cot\tfrac{1}{2}(\eta u).\frac{1+2q^2\cos\eta u+q^4}{1-2q^2\cos\eta u+q^4}.\frac{1+2q^4\cos\eta u+q^8}{1-2q^4\cos\eta u+q^8}.\frac{1+2q^6\cos\eta u+q^{12}}{1-2q^6\cos\eta u+q^{12}}\cdots$$

Setzt man in der Formel (8.) §. 189. $\sqrt{q}$ statt p und $\frac{1}{2}(\eta u i)$ statt u, so erhält man

$$2\sqrt[4]{q}.\cos\tfrac{1}{2}(\eta u).(1+2q^2\cos\eta u+q^4)(1+2q^4\cos\eta u+q^8)(1+2q^6\cos\eta u+q^{12})\cdots$$
$$= \frac{2q^{\frac{1}{4}}\cos\frac{1}{2}(\eta u)+2q^{\frac{9}{4}}\cos\frac{1}{2}(3\eta u)+2q^{\frac{25}{4}}\cos\frac{1}{2}(5\eta u)+2q^{\frac{49}{4}}\cos\frac{1}{2}(7\eta u)\cdots}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\cdots}.$$

Setzt man hierin $\pi-\eta u$ statt ηu, so erhält man eine ähnliche Gleichung; die Division giebt also

$$\sqrt{\frac{1+\mathrm{snc}\,u}{1-\mathrm{snc}\,u}} = \frac{q^{\frac{1}{4}}\cos\frac{1}{2}(\eta u)+q^{\frac{9}{4}}\cos\frac{1}{2}(3\eta u)+q^{\frac{25}{4}}\cos\frac{1}{2}(5\eta u)+q^{\frac{49}{4}}\cos\frac{1}{2}(7\eta u)++\cdots}{q^{\frac{1}{4}}\sin\frac{1}{2}(\eta u)-q^{\frac{9}{4}}\sin\frac{1}{2}(3\eta u)+q^{\frac{25}{4}}\sin\frac{1}{2}(5\eta u)+q^{\frac{49}{4}}\sin\frac{1}{2}(7\eta u)+-\cdots}.$$

Setzt man hierin $K-u$ statt u, so erhält man

$$\sqrt{\frac{1+\mathrm{sn}\,u}{1-\mathrm{sn}\,u}} = \frac{q^{\frac{1}{4}}\cos(\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}(\eta u))+q^{\frac{9}{4}}\cos\frac{3}{2}(\frac{1}{2}\pi-\eta u)+q^{\frac{25}{4}}\cos\frac{5}{2}(\frac{1}{2}\pi-\eta u)\cdots}{q^{\frac{1}{2}}\sin\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi-\eta u)-q^{\frac{9}{2}}\sin\frac{3}{2}(\frac{1}{2}\pi-\eta u)+q^{\frac{25}{4}}\sin\frac{5}{2}(\frac{1}{2}\pi-\eta u)\cdots}.$$

Bezeichnet man diesen Bruch durch $\frac{P+Q}{P-Q}$, so ist $\mathfrak{L}\,\mathrm{am}\,u = \log\frac{P+Q}{P-Q} = 2\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{Q}{P}\right)$, also

$$1.\quad \mathfrak{L}\,\mathrm{am}\,u =$$
$$2\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{q^{\frac{1}{4}}\sin\frac{1}{2}(\eta u)+q^{\frac{9}{4}}\sin\frac{1}{2}(3\eta u)-q^{\frac{25}{4}}\sin\frac{1}{2}(5\eta u)-q^{\frac{49}{4}}\sin\frac{1}{2}(7\eta u)++--\cdots}{q^{\frac{1}{4}}\cos\frac{1}{2}(\eta u)-p^{\frac{9}{4}}\cos\frac{1}{2}(3\eta u)-q^{\frac{25}{4}}\cos\frac{1}{2}(5\eta u)+q^{\frac{49}{4}}\cos\frac{1}{2}(7\eta u)+--\cdots}\right).$$

Setzt man qi statt q, so erhält man

$$\sqrt{\frac{1+\mathrm{cn}\,u}{1-\mathrm{cn}\,u}} = \cot\tfrac{1}{2}(\eta u)\frac{1-2q^2\cos\eta u+q^4}{1+2q^2\cos\eta u+q^4}.\frac{1+2q^4\cos\eta u+q^8}{1-2q^4\cos\eta u+q^8}.\frac{1-2q^6\cos\eta u+q^{12}}{1+2q^6\cos\eta u+q^{12}}\cdots$$

und die Formel (1.) verwandelt sich in

$$2.\quad \mathfrak{L}(\tfrac{1}{2}\pi-\mathrm{amc}\,u) =$$
$$2\,\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{q^{\frac{1}{4}}\sin\frac{1}{2}(\eta u)-q^{\frac{9}{4}}\sin\frac{1}{2}(3\eta u)+q^{\frac{25}{4}}\sin\frac{1}{2}(5\eta u)-q^{\frac{49}{4}}\sin\frac{1}{2}(7\eta u)+-\cdots}{q^{\frac{1}{4}}\cos\frac{1}{2}(\eta u)+q^{\frac{9}{4}}\cos\frac{1}{2}(3\eta u)+q^{\frac{25}{4}}\cos\frac{1}{2}(5\eta u)+q^{\frac{49}{4}}\cos\frac{1}{2}(7\eta u)+\cdots}\right).$$

Die Formel (12.) §. 195. kann auch wie folgt dargestellt werden:

$$\sqrt{\frac{1+\mathrm{snc}\,u}{1-\mathrm{snc}\,u}} = \frac{1}{2p\,\mathfrak{Sin}\,\eta' u}.\frac{1-2p^4\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u+p^8}{1-2p^8\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u+p^{16}}.\frac{1-2p^{12}\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u+p^{24}}{1-2p^{16}\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u+p^{32}}\cdots$$

Da aber nach Formel (10.) §. 189.

$$(1-2p^4\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u+p^8)(1-2p^{12}\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u+p^{24})(1-2p^{20}\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u+p^{40})\cdots$$
$$= \frac{1-2p^4\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u+2p^{16}\,\mathfrak{Cos}\,4\eta' u-2p^{36}\,\mathfrak{Cos}\,6\eta' u+-\cdots}{(1-p^8)(1-p^{16})(1-p^{24})\cdots}$$

und nach Formel (7.) §. 189.

$$2p\,\mathfrak{Sin}\,\eta'u(1-2p^8\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'u+p^{16})(1-2p^{16}\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'u+p^{32})(1-2p^{24}\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'u+p^{48})\dots.$$
$$=\frac{2p\,\mathfrak{Sin}\,\eta'u-2p^9\,\mathfrak{Sin}\,3\eta'u+2p^{25}\,\mathfrak{Sin}\,5\eta'u+2p^{49}\,\mathfrak{Sin}\,7\eta'u\dots.}{(1-p^8)(1-p^{16})(1-p^{24})\dots.}$$

ist, so erhält man

$$3.\quad \mathfrak{L}\,\mathrm{amc}\,u=\log\sqrt{\frac{1+\mathrm{snc}\,u}{1-\mathrm{snc}\,u}}$$
$$=\log\frac{1-2p^4\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'u+2p^{16}\,\mathfrak{Cos}\,4\eta'u-2p^{36}\,\mathfrak{Cos}\,6\eta'u+2p^{64}\,\mathfrak{Cos}\,8\eta'u-+\dots.}{2p\,\mathfrak{Sin}\,\eta'u-2p^9\,\mathfrak{Sin}\,3\eta'u+2p^{25}\,\mathfrak{Sin}\,5\eta'u-2p^{49}\,\mathfrak{Sin}\,7\eta'u+-\dots.}.$$

Die Formel (10.) §. 195. läſst sich wie folgt darstellen:

$$\sqrt{\frac{1+\mathrm{sn}\,u}{1-\mathrm{sn}\,u}}=\sqrt{\frac{1\pm\mathfrak{Tang}\,\eta'u}{1\mp\mathfrak{Tang}\,\eta'u}}\cdot\frac{\mathfrak{Tang}\,\eta'K+\mathfrak{Tang}\,\eta'u}{\mathfrak{Tang}\,\eta'K-\mathfrak{Tang}\,\eta'u}\cdot\frac{\mathfrak{Tang}\,3\eta'K-\mathfrak{Tang}\,\eta'u}{\mathfrak{Tang}\,3\eta'K+\mathfrak{Tang}\,\eta'u}\cdot\frac{\mathfrak{Tang}\,5\eta'K+\mathfrak{Tang}\,\eta'u}{\mathfrak{Tang}\,5\eta'K-\mathfrak{Tang}\,\eta'u}\dots$$

Da hier die Factoren nicht nach dem früheren Verfahren vereinigt werden können, so formen wir die Formel um, indem wir sie zunächst wie folgt darstellen:

$$\mathfrak{L}\,\mathrm{amc}\,u=\log\frac{1-p^4(x^2+x^{-2})+p^{16}(x^4+x^{-4})-p^{36}(x^6+x^{-6})+-\dots.}{p(x-x^{-1})-p^9(x^3-x^{-3})+p^{25}(x^5-x^{-5})-+\dots.},$$

$e^{\eta'u}=x$ setzend. Wird nun $K-u$ für u, also $\frac{1}{px}$ für x gesetzt, so erhält man

$$\mathfrak{L}\,\mathrm{am}\,u=$$
$$\eta'u+\log\left\{\frac{1-2p^4\,\mathfrak{Cos}(2\eta'K-2\eta'u)+2p^{16}\,\mathfrak{Cos}(4\eta'K-4\eta'u)-2p^{36}\,\mathfrak{Cos}(6\eta'K-6\eta'u)+-\dots.}{1-2p^4\,\mathfrak{Cos}(2\eta'K+2\eta'u)+2p^{16}\,\mathfrak{Cos}(4\eta'K+4\eta'u)-2p^{36}\,\mathfrak{Cos}(6\eta'K+6\eta'u)+-\dots.}\right\}.$$

Diese Formel läſst sich auch also darstellen:

$$\mathfrak{L}\,\mathrm{am}\,u=$$
$$\eta'u+2\,\mathfrak{ArcTang}\left\{\frac{2p^4\,\mathfrak{Sin}\,2\eta'K.\,\mathfrak{Sin}\,2\eta'u-2p^{16}\,\mathfrak{Sin}\,4\eta'K.\,\mathfrak{Sin}\,4\eta'u+2p^{36}\,\mathfrak{Sin}\,6\eta'K.\,\mathfrak{Sin}\,6\eta'u-+\dots.}{1-2p^4\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'K.\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'u+2p^{16}\,\mathfrak{Cos}\,4\eta'K.\,\mathfrak{Cos}\,4\eta'u-2p^{36}\,\mathfrak{Cos}\,6\eta'K.\,\mathfrak{Cos}\,6\eta'u+-\dots.}\right\},$$

oder auch

$$4.\quad \mathfrak{L}\,\mathrm{am}\,u=$$
$$\eta'u+2\,\mathfrak{ArcTang}\left\{\frac{p^2(1-p^4)\,\mathfrak{Sin}\,2\eta'u-p^{12}(1-p^8)\,\mathfrak{Sin}\,4\eta'u+p^{30}(1-p^{12})\,\mathfrak{Sin}\,6\eta'u-+\dots.}{1-p^2(1+p^4)\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'u+p^{12}(1+p^8)\,\mathfrak{Cos}\,4\eta'u-p^{30}(1+p^{12})\,\mathfrak{Cos}\,6\eta'u+-\dots.}\right\}.$$

Es ist der Formel (16.) §. 195. gemäſs

$$\sqrt{\frac{1+\mathrm{cnc}\,u}{1-\mathrm{cnc}\,u}}=\frac{1+2p\,\mathfrak{Sin}\,\eta'u-p^2}{1-2p\,\mathfrak{Sin}\,\eta'u-p^2}\cdot\frac{1-2p^3\,\mathfrak{Sin}\,\eta'u-p^6}{1+2p^3\,\mathfrak{Sin}\,\eta'u-p^6}\cdot\frac{1+2p^5\,\mathfrak{Sin}\,\eta'u-p^{10}}{1-2p^5\,\mathfrak{Sin}\,\eta'u-p^{10}}\dots;$$

ferner ist nach Formel (10.) §. 189.

$$(1-2p\,\mathfrak{Cos}\,u+p^2)(1-2p^3\,\mathfrak{Cos}\,u+p^6)(1-2p^5\,\mathfrak{Cos}\,u+p^{10})\dots.$$
$$=\frac{1-2p\,\mathfrak{Cos}\,u+2p^4\,\mathfrak{Cos}\,2u-2p^9\,\mathfrak{Cos}\,3u+p^{16}\,\mathfrak{Cos}\,4u-+\dots.}{(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\dots.}.$$

Setzt man in dieser Formel pi statt p und $\eta'u+\frac{1}{2}\pi i$ statt u, wodurch sich $\mathfrak{Cos}\,u$ in $i\,\mathfrak{Sin}\,\eta'u$ verwandelt, so erhält man

$$(1+2p\,\mathrm{Sin}\,\eta' u-p^2)(1-2p^3\,\mathrm{Sin}\,\eta' u-p^6)(1+2p^5\,\mathrm{Sin}\,\eta' u-p^{10})\ldots$$
$$=\frac{1+2p\,\mathrm{Sin}\,\eta' u-2p^4\,\mathrm{Cos}\,2\eta' u-2p^9\,\mathrm{Sin}\,3\eta u+p^{16}\,\mathrm{Cos}\,4\eta' u+p^{25}\,\mathrm{Sin}\,5\eta' u--\ldots}{(1+p^2)(1-p^4)(1+p^6)\ldots}.$$

Setzt man in dieser Formel $-u$ statt u, und dividirt die vorige Formel durch die neue, so erhält man

$$\mathfrak{L}(\tfrac{1}{2}\pi-\mathrm{amc}\,u)=$$
$$\log\frac{1+2p\,\mathrm{Sin}\,\eta' u-2p^4\,\mathrm{Cos}\,2\eta' u-2p^9\,\mathrm{Sin}\,3\eta' u+2p^{16}\,\mathrm{Cos}\,4\eta' u+2p^{25}\,\mathrm{Sin}\,5\eta' u--++\ldots}{1-2p\,\mathrm{Sin}\,\eta' u-2p^4\,\mathrm{Cos}\,2\eta' u+2p^9\,\mathrm{Sin}\,3\eta' u+2p^{16}\,\mathrm{Cos}\,4\eta' u-2p^{25}\,\mathrm{Sin}\,5\eta' u-\ldots}.$$

Stellt man das Glied auf der rechten Seite durch $\log\frac{P+Q}{P-Q}$ vor, so hat man

$$5.\quad \mathfrak{L}(\tfrac{1}{2}\pi-\mathrm{amc}\,u)=$$
$$2\,\mathrm{ArcTang}\left(\frac{2p\,\mathrm{Sin}\,\eta' u-2p^9\,\mathrm{Sin}\,3\eta' u+2p^{25}\,\mathrm{Sin}\,5\eta' u-2p^{49}\,\mathrm{Sin}\,7\eta' u+-\ldots}{1-2p^4\,\mathrm{Cos}\,2\eta' u+2p^{16}\,\mathrm{Cos}\,4\eta' u-2p^{36}\,\mathrm{Cos}\,6\eta' u+2p^{64}\,\mathrm{Cos}\,8\eta' u-+\ldots}\right).$$

Die Formel (17.) §. 195. läfst sich also darstellen:

$$\sqrt{\frac{1+\mathrm{cn}\,u}{1-\mathrm{cn}\,u}}=\mathrm{Cot}\,\tfrac{1}{2}(\eta u).\frac{1-2p^2\,\mathrm{Cos}\,\eta' u+p^4}{1+2p^2\,\mathrm{Cos}\,\eta' u+p^4}.\frac{1+2p^4\,\mathrm{Cos}\,\eta' u+p^8}{1-2p^4\,\mathrm{Cos}\,\eta' u+p^8}.\frac{1-2p^6\,\mathrm{Cos}\,\eta' u+p^{12}}{1+2p^6\,\mathrm{Cos}\,\eta' u+p^{12}}\ldots$$

Da aber nach dem Zusatze zu §. 189.

$$2\sqrt[4]{p}.\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(\eta u).(1+2p^2\,\mathrm{Cos}\,\eta' u+p^4)(1+2p^4\,\mathrm{Cos}\,\eta' u+p^8)(1+2p^6\,\mathrm{Cos}\,\eta' u+p^{12})\ldots$$
$$=\frac{2p^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(\eta' u)+2p^{\frac{9}{4}}\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(3\eta' u)+2p^{\frac{25}{4}}\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(5\eta' u)+\ldots}{(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\ldots}\quad\text{und}$$
$$2\sqrt[4]{p}.\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(\eta' u).(1-2p^2\,\mathrm{Cos}\,\eta' u+p^4)(1-2p^4\,\mathrm{Cos}\,\eta' u+p^8)(1-2p^6\,\mathrm{Cos}\,\eta' u+p^{12})\ldots$$
$$=\frac{2p^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(\eta' u)-2p^{\frac{9}{4}}\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(3\eta' u)+2p^{\frac{25}{4}}\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(5\eta' u)-+\ldots}{(1-p^2)(1-p^4)(1-p^6)\ldots}$$

ist, so erhält man, wenn man die erste Gleichung durch die zweite dividirt, und dann pi für p setzt,

$$6.\quad \mathfrak{L}(\tfrac{1}{2}\pi-\mathrm{am}\,u)=\log\sqrt{\frac{1+\mathrm{cn}\,u}{1-\mathrm{cn}\,u}}=$$
$$\log\left\{\frac{p^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(\eta' u)-p^{\frac{9}{4}}\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(3\eta' u)-p^{\frac{25}{4}}\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(5\eta' u)+p^{\frac{49}{4}}\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(7\eta' u)+--\ldots}{p^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(\eta' u)+p^{\frac{9}{4}}\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(3\eta' u)-p^{\frac{25}{4}}\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(5\eta' u)-p^{\frac{49}{4}}\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(7\eta' u)++\ldots}\right\},$$

oder auch

$$\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\mathrm{am}\,u$$
$$=\frac{p^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(\eta' u)+p^{\frac{9}{4}}\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(3\eta' u)-p^{\frac{25}{4}}\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(5\eta' u)-p^{\frac{49}{4}}\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(7\eta' u)++--\ldots}{p^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(\eta' u)-p^{\frac{9}{4}}\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(3\eta' u)-p^{\frac{25}{4}}\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(5\eta' u)+p^{\frac{49}{4}}\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(7\eta' u)+--\ldots};$$

und diese Formel verwandelt sich, wenn ui statt u gesetzt wird, und die beiden conjugirten Moduln mit einander vertauscht werden, in

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\operatorname{am}u$$
$$=\frac{q^{\frac{1}{4}}\sin\frac{1}{2}(\eta u)+q^{\frac{9}{4}}\sin\frac{1}{2}(3\eta u)-q^{\frac{25}{4}}\sin\frac{1}{2}(5\eta u)-q^{\frac{49}{4}}\sin\frac{1}{2}(7\eta u)++\ldots}{q^{\frac{1}{4}}\cos\frac{1}{2}(\eta u)-q^{\frac{9}{4}}\cos\frac{1}{2}(3\eta u)-q^{\frac{25}{4}}\cos\frac{1}{2}(5\eta u)-q^{\frac{49}{4}}\cos\frac{1}{2}(7\eta u)+--\ldots}.$$

Stellt man die obige Formel (5.) durch $\mathfrak{L}(\frac{1}{2}\pi-\operatorname{amc}u)=2\,\mathfrak{Arc\,Tang}(U)$ vor, so ist rückwärts $U=\mathfrak{Tang}\,\frac{1}{2}\mathfrak{L}(\frac{1}{2}\pi-\operatorname{amc}u)=\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi-\operatorname{amc}u)$, daher ist

$$\operatorname{tang}(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}\operatorname{amc}u)$$
$$=\frac{2p\,\mathfrak{Sin}\,\eta'u-2p^{9}\,\mathfrak{Sin}\,3\eta'u+2p^{25}\,\mathfrak{Sin}\,5\eta'u-2p^{49}\,\mathfrak{Sin}\,7\eta'u+-\ldots}{1-2p^{4}\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'u+2p^{16}\,\mathfrak{Cos}\,4\eta'u-2p^{36}\,\mathfrak{Cos}\,6\eta'u+2p^{64}\,\mathfrak{Cos}\,8\eta'u-+\ldots},$$

und die Formel (2.) kann noch also dargestellt werden:

$$\operatorname{tang}(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}\operatorname{amc}u)$$
$$=\frac{q^{\frac{1}{4}}\sin\frac{1}{2}(\eta u)-q^{\frac{9}{4}}\sin\frac{1}{2}(3\eta u)+q^{\frac{25}{4}}\sin\frac{1}{2}(5\eta u)-q^{\frac{49}{4}}\sin\frac{1}{2}(7\eta u)+-\ldots}{q^{\frac{1}{4}}\cos\frac{1}{2}(\eta u)+q^{\frac{9}{4}}\cos\frac{1}{2}(3\eta u)+q^{\frac{25}{4}}\cos\frac{1}{2}(5\eta u)+q^{\frac{49}{4}}\cos\frac{1}{2}(7\eta u)+-\ldots}.$$

Daher ist rückwärts

7. $\operatorname{amc}u=$
$$\tfrac{1}{2}\pi-2\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{q^{\frac{1}{4}}\sin\frac{1}{2}(\eta u)-q^{\frac{9}{4}}\sin\frac{1}{2}(3\eta u)+q^{\frac{25}{4}}\sin\frac{1}{2}(5\eta u)-q^{\frac{49}{4}}\sin\frac{1}{2}(7\eta u)+-\ldots}{q^{\frac{1}{4}}\cos\frac{1}{2}(\eta u)+q^{\frac{9}{4}}\cos\frac{1}{2}(3\eta u)+q^{\frac{25}{4}}\cos\frac{1}{2}(5\eta u)+q^{\frac{49}{4}}\cos\frac{1}{2}(7\eta u)+-\ldots}\right),$$

8. $\operatorname{amc}u=$
$$\tfrac{1}{2}\pi-2\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{2p\,\mathfrak{Sin}\,\eta'u-2p^{9}\,\mathfrak{Sin}3\eta'u+2p^{25}\mathfrak{Sin}5\eta'u-2p^{49}\mathfrak{Sin}7\eta'u+-\ldots}{1-2p^{4}\,\mathfrak{Cos}2\eta'u+2p^{16}\,\mathfrak{Cos}4\eta'u-2p^{36}\,\mathfrak{Cos}6\eta'u+2p^{64}\,\mathfrak{Cos}8\eta'u-+\ldots}\right),$$

9. $\operatorname{am}u=$
$$2\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{q^{\frac{1}{4}}\sin\frac{1}{2}(\eta u)+q^{\frac{9}{4}}\sin\frac{1}{2}(3\eta u)-q^{\frac{25}{4}}\sin\frac{1}{2}(5\eta u)-q^{\frac{49}{4}}\sin\frac{1}{2}(7\eta u)++\ldots}{q^{\frac{1}{4}}\cos\frac{1}{2}(\eta u)-q^{\frac{9}{4}}\cos\frac{1}{2}(3\eta u)-q^{\frac{25}{4}}\cos\frac{1}{2}(5\eta u)+q^{\frac{49}{4}}\cos\frac{1}{2}(7\eta u)+-\ldots}\right),$$

10. $\operatorname{am}u=$
$$2\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{p^{\frac{1}{4}}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{1}{2}(\eta'u)+p^{\frac{9}{4}}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{1}{2}(3\eta'u)-p^{\frac{25}{4}}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{1}{2}(5\eta'u)-p^{\frac{49}{4}}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{1}{2}(7\eta'u)++\ldots}{p^{\frac{1}{4}}\,\mathfrak{Cos}\,\frac{1}{2}(\eta'u)-p^{\frac{9}{4}}\,\mathfrak{Cos}\,\frac{1}{2}(3\eta'u)-p^{\frac{25}{4}}\,\mathfrak{Cos}\,\frac{1}{2}(5\eta'u)+p^{\frac{49}{4}}\,\mathfrak{Cos}\,\frac{1}{2}(7\eta'u)+-\ldots}\right).$$

Für $\operatorname{am}u=2\operatorname{arc\,tang}(U)$ kann auch $\mathfrak{L}\operatorname{am}u=2\,\mathfrak{Arc\,Tang}(U)$ geschrieben werden: daher dienen die Formeln (9.) und (10.) auch zur Bestimmung von $\mathfrak{L}\operatorname{am}u$, wenn man nur die Vorsylben arc tang in $\mathfrak{Arc\,Tang}$ abändert.

Da $\mathfrak{L}(\frac{1}{2}\pi-\operatorname{amc}u)=\log\sqrt{\frac{1+\operatorname{cnc}u}{1-\operatorname{cnc}u}}=\log\cot\frac{1}{2}\operatorname{amc}u$ ist, so kann statt der Formel (8.) auch genommen werden

$$\operatorname{amc}u=$$
$$2\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{1-2p\,\mathfrak{Sin}\eta'u-2p^{4}\mathfrak{Cos}2\eta'u+2p^{9}\mathfrak{Sin}3\eta'u+2p^{16}\mathfrak{Cos}4\eta'u-2p^{25}\mathfrak{Sin}5\eta'u\ldots}{1+2p\,\mathfrak{Sin}\eta'u-2p^{4}\mathfrak{Cos}2\eta'u-2p^{9}\,\mathfrak{Sin}3\eta'u+2p^{16}\mathfrak{Cos}4\eta'u+2p^{25}\mathfrak{Sin}5\eta'u\ldots}\right).$$

§. 198.

Setzt man in der Formel (10.) pi statt p, so erhält man

$$11. \quad \mathrm{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right) =$$

$$2 \operatorname{arc tang}\left(\frac{p^{\frac{1}{4}} \mathfrak{Sin}\,\frac{1}{2}(\eta' u) - p^{\frac{9}{4}} \mathfrak{Sin}\,\frac{1}{2}(3\eta' u) + p^{\frac{25}{4}} \mathfrak{Sin}\,\frac{1}{2}(5\eta' u) - p^{\frac{49}{4}} \mathfrak{Sin}\,\frac{1}{2}(7\eta' u) + - \ldots}{p^{\frac{1}{4}} \mathfrak{Cos}\,\frac{1}{2}(\eta' u) + p^{\frac{9}{4}} \mathfrak{Cos}\,\frac{1}{2}(3\eta' u) + p^{\frac{25}{4}} \mathfrak{Cos}\,\frac{1}{2}(5\eta' u) + p^{\frac{49}{4}} \mathfrak{Cos}\,\frac{1}{2}(7\eta' u) + + \ldots}\right),$$

und auf der linken Seite kann man $\mathfrak{L}\,\mathrm{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right)$ statt $\mathrm{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right)$ setzen, wenn man auf der rechten Seite die Vorsylben arc tang in $\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}$ verwandelt. Vertauscht man in der Formel (8.) die conjugirten Moduln mit einander, indem man ui statt i setzt, so erhält man

$$\mathfrak{L}\,\mathrm{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right) =$$

$$2\,\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\left(\frac{2q \sin\eta u - 2q^9 \sin 3\eta u + 2q^{25} \sin 5\eta u - 2q^{49} \sin 7\eta u + - \ldots}{1 - 2q^4 \cos 2\eta u + 2q^{16} \cos 4\eta u - 2q^{36} \cos 6\eta u + 2q^{64} \cos 8\eta u - + \ldots}\right),$$

oder auch

$$12. \quad \mathrm{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right) =$$

$$2 \operatorname{arc tang}\left(\frac{2q \sin\eta u - 2q^9 \sin 3\eta u + 2q^{25} \sin 5\eta u - 2q^{49} \sin 7\eta u + - \ldots}{1 - 2q^4 \cos 2\eta u + 2q^{16} \cos 4\eta u - 2q^{36} \cos 6\eta u + 2q^{64} \cos 8\eta u - + \ldots}\right).$$

Es kann aber die vorhergehende Formel auch also dargestellt werden:

$$\sqrt{\left(\frac{1 + k \operatorname{sn} u}{1 - k \operatorname{sn} u}\right)} = \operatorname{tang}\left(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\mathrm{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right)\right)$$

$$= \frac{1 + 2q \sin\eta u - 2q^4 \cos 2\eta u - 2q^9 \sin 3\eta u + 2q^{16} \cos 4\eta u + 2q^{25} \sin 5\eta u \ldots}{1 - 2q \sin\eta u - 2q^4 \cos 2\eta u + 2q^9 \sin 3\eta u + 2q^{16} \cos 4\eta u - 2q^{25} \sin 5\eta u \ldots},$$

oder

$$13. \quad \sqrt{\frac{1 + k \operatorname{snc} u}{1 - k \operatorname{snc} u}}$$

$$= \frac{1 + 2q \cos\eta u + 2q^4 \cos 2\eta u + 2q^9 \cos 3\eta u + 2q^{16} \cos 4\eta u + 2q^{25} \cos 5\eta u \ldots}{1 - 2q \cos\eta u + 2q^4 \cos 2\eta u - 2q^9 \cos 3\eta u + 2q^{16} \cos 4\eta u - 2q^{25} \cos 5\eta u \ldots}$$

$$= \operatorname{tang}\left(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\mathrm{am}\left(k(K - u), \frac{1}{k}\right)\right).$$

Da $\sqrt{\frac{1 - \operatorname{dn} u}{1 + \operatorname{dn} u}} = \operatorname{tang} \frac{1}{2}\mathrm{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right)$ ist, so kann die Formel (11.) auch also dargestellt werden:

$$14. \quad \sqrt{\frac{1 - \operatorname{dn} u}{1 + \operatorname{dn} u}}$$

$$= \frac{p^{\frac{1}{4}} \mathfrak{Sin}\,\frac{1}{2}(\eta' u) - p^{\frac{9}{4}} \mathfrak{Sin}\,\frac{1}{2}(3\eta' u) + p^{\frac{25}{4}} \mathfrak{Sin}\,\frac{1}{2}(5\eta' u) - p^{\frac{49}{4}} \mathfrak{Sin}\,\frac{1}{2}(7\eta' u) + - \ldots}{p^{\frac{1}{4}} \mathfrak{Cos}\,\frac{1}{2}(\eta' u) + p^{\frac{9}{4}} \mathfrak{Cos}\,\frac{1}{2}(3\eta' u) + p^{\frac{25}{4}} \mathfrak{Cos}\,\frac{1}{2}(5\eta' u) + p^{\frac{49}{4}} \mathfrak{Cos}\,\frac{1}{2}(7\eta' u) + + \ldots},$$

und eben so verwandelt sich (12.) in

$$15.\quad \sqrt{\frac{1-\mathrm{dn}\,u}{1+\mathrm{dn}\,u}} = \frac{2q\ \sin\eta u - 2q^9\ \sin 3\eta u + 2q^{25}\ \sin 5\eta u - 2q^{49}\ \sin 7\eta u + - \ldots}{1-2q^4\cos 2\eta u + 2q^{16}\cos 4\eta u - 2q^{36}\cos 6\eta u + 2q^{64}\cos 8\eta u - + \ldots}.$$

Setzt man in (13.) ui statt u, indem man die conjugirten Moduln vertauscht, so erhält man

$$16.\quad \sqrt{\frac{1-\mathrm{dnc}\,u}{1+\mathrm{dnc}\,u}} = \frac{1-2p\,\mathfrak{Cos}\,\eta' u + 2p^4\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u - 2p^9\,\mathfrak{Cos}\,3\eta' u + 2p^{16}\,\mathfrak{Cos}\,5\eta' u - + \ldots}{1+2p\,\mathfrak{Cos}\,\eta' u + 2p^4\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u + 2p^9\,\mathfrak{Cos}\,3\eta' u + 2p^{16}\,\mathfrak{Cos}\,5\eta' u + + \ldots},$$

und da $\log\sqrt{\frac{1+\mathrm{dnc}\,u}{1-\mathrm{dnc}\,u}} = \mathfrak{L}\left(\frac{1}{2}\pi - \mathrm{am}\left(k(K-u), \frac{1}{k}\right)\right)$ ist, so ist

$$\mathfrak{L}\left(\tfrac{1}{2}\pi - \mathrm{am}\left(k(K-u), \frac{1}{k}\right)\right)$$

$$= 2\,\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\left(\frac{2p\ \mathfrak{Cos}\ \eta' u + 2p^9\ \mathfrak{Cos}\,3\eta' u + 2p^{25}\,\mathfrak{Cos}\,5\eta' u + \ldots}{1+2p^4\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u + 2p^{16}\,\mathfrak{Cos}\,4\eta' u + 2p^{36}\,\mathfrak{Cos}\,6\eta' u + \ldots}\right),$$

oder auch

$$17.\quad \mathrm{am}\left(k(K-u), \frac{1}{k}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi - 2\,\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{2p\ \mathfrak{Cos}\ \eta' u + 2p^0\ \mathfrak{Cos}\,3\eta' u + 2p^{25}\,\mathfrak{Cos}\,5\eta' u + \ldots}{1+2p^4\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' u + 2p^{16}\,\mathfrak{Cos}\,4\eta' u + 2p^{36}\,\mathfrak{Cos}\,6\eta' u + \ldots}\right).$$

§. 199.

Zweite Darstellung der Modular-Functionen in unendlichen Reihen.

Da $\partial\mathfrak{L}\,\mathrm{am}\left(k(K-u), \frac{1}{k}\right) = -k\,\mathrm{sn}\,u.\partial u$ ist, so erhält man, wenn man die Formel (22.) §. 196. differenziirt, die Reihe

$$1.\quad k\,\mathrm{sn}\,u = \frac{2\eta\,\mathfrak{Cos}\,\eta K'.\sin\eta u}{\mathfrak{Cos}^2\,\eta K' - \cos^2\eta u} + \frac{2\eta\,\mathfrak{Cos}\,3\eta K'.\sin\eta u}{\mathfrak{Cos}^2\,5\eta K' - \cos^2\eta u} + \frac{2\eta\,\mathfrak{Cos}\,5\eta K'.\sin\eta u}{\mathfrak{Cos}^2\,5\eta K' - \cos^2\eta u} + \ldots$$

Die Formeln (25.) und (24.) §. 196. geben, differenziirt,

$$2.\quad k\,\mathrm{sn}\,u =$$

$$\eta'\,\mathfrak{Tang}\,\eta' u - \frac{2\eta'\,\mathfrak{Sin}\,2\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta' K + \mathfrak{Cos}\,2\eta' u} + \frac{2\eta'\,\mathfrak{Sin}\,2\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,8\eta' K + \mathfrak{Cos}\,2\eta' u} - \frac{2\eta'\,\mathfrak{Sin}\,2\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,12\eta' K + \mathfrak{Cos}\,2\eta' u} + - \ldots,$$

$$3.\quad k\,\mathrm{snc}\,u =$$

$$\pm\eta' + \frac{2\eta'\,\mathfrak{Sin}\,2\eta' K}{\mathfrak{Cos}\,2\eta' K + \mathfrak{Cos}\,2\eta' u} - \frac{2\eta'\,\mathfrak{Sin}\,6\eta' K}{\mathfrak{Cos}\,6\eta' K + \mathfrak{Cos}\,2\eta' u} + \frac{2\eta'\,\mathfrak{Sin}\,10\eta' K}{\mathfrak{Cos}\,10\eta' K + \mathfrak{Cos}\,2\eta' u} - + \ldots,$$

und in dieser Reihe gilt das obere Vorzeichen vor $\pm\eta$, wenn man die Reihe mit einem negativen Gliede, und das untere Vorzeichen, wenn man sie mit einem positiven Gliede abbricht. Da $\partial\log\sqrt{\frac{1+\mathrm{snc}\,u}{1-\mathrm{snc}\,u}} = \partial\mathfrak{L}\,\mathrm{amc}\,u = -\frac{\partial u}{\mathrm{sn}\,u}$ ist, so geben die Formeln (9.), (12.) und (10.) §. 195., differenziirt,

$$4.\quad \frac{1}{\operatorname{sn} u} = \frac{\eta}{\sin \eta u} + \frac{2\eta\,\mathfrak{Cos}\,2\eta K'.\sin\eta u}{\mathfrak{Cos}^2\,2\eta K' - \cos^2\eta u} + \frac{2\eta\,\mathfrak{Cos}\,4\eta K'.\sin\eta u}{\mathfrak{Cos}^2\,4\eta K' - \cos^2\eta u} + \frac{2\eta\,\mathfrak{Cos}\,6\eta K'.\sin\eta u}{\mathfrak{Cos}^2\,6\eta K' - \cos^2\eta u} + \ldots,$$

$$5.\quad \frac{1}{\operatorname{sn} u} = \frac{\eta'}{\mathfrak{Tang}\,\eta' u} + \frac{2\eta'\,\mathfrak{Sin}\,2\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta' K - \mathfrak{Cos}\,2\eta' u} - \frac{2\eta'\,\mathfrak{Sin}\,2\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,8\eta' K - \mathfrak{Cos}\,2\eta' u} + \frac{2\eta'\,\mathfrak{Sin}\,2\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,12\eta' K - \mathfrak{Cos}\,2\eta' u} - + \ldots;$$

$$6.\quad \frac{1}{\operatorname{snc} u} = \pm\eta' + \frac{\eta'\,\mathfrak{Sin}\,2\eta' K}{\mathfrak{Sin}(\eta' K+\eta' u)\,\mathfrak{Sin}(\eta' K-\eta' u)} - \frac{\eta'\,\mathfrak{Sin}\,6\eta' K}{\mathfrak{Sin}(3\eta' K+\eta' u)\,\mathfrak{Sin}(3\eta' K-\eta' u)} + \frac{\eta'\,\mathfrak{Sin}\,10\eta' K}{\mathfrak{Sin}(5\eta' K+\eta' u)\,\mathfrak{Sin}(5\eta' K-\eta' u)} - + \ldots$$

Auch in dieser Reihe muſs das Vorzeichen vor dem Anfangsgliede η' immer dem Vorzeichen des Gliedes entgegengesetzt sein, mit welchem man die Reihe abbricht. Die Reihen (2.), (3.), (5.) gestatten noch eine einfachere Darstellung, da man ihre Nenner in Producte verwandeln kann. Es ist

$$k \operatorname{sn} u = \eta'\,\mathfrak{Tang}\,\eta' u - \frac{\eta'\,\mathfrak{Sin}\,2\eta' u}{\mathfrak{Cos}(2\eta' K+\eta' u)\,\mathfrak{Cos}(2\eta' K-\eta' u)} + \frac{\eta'\,\mathfrak{Sin}\,2\eta' u}{\mathfrak{Cos}(4\eta' K+\eta' u)\,\mathfrak{Cos}(4\eta' K-\eta' u)} - \frac{\eta'\,\mathfrak{Sin}\,2\eta' u}{\mathfrak{Cos}(6\eta' K+\eta' u)\,\mathfrak{Cos}(6\eta' K-\eta' u)} + - \ldots,$$

$$k \operatorname{snc} u = \pm\eta' + \frac{\eta'\,\mathfrak{Sin}\,2\eta' K}{\mathfrak{Cos}(\eta' K+\eta' u)\,\mathfrak{Cos}(\eta' K-\eta' u)} - \frac{\eta'\,\mathfrak{Sin}\,6\eta' K}{\mathfrak{Cos}(3\eta' K+\eta' u)\,\mathfrak{Cos}(3\eta' K-\eta' u)} + \frac{\eta'\,\mathfrak{Sin}\,10\eta' K}{\mathfrak{Cos}(5\eta' K+\eta' u)\,\mathfrak{Cos}(5\eta' K-\eta' u)} - + \ldots,$$

$$\frac{1}{\operatorname{sn} u} = \frac{\eta'}{\mathfrak{Tang}\,\eta' u} + \frac{\eta'\,\mathfrak{Sin}\,2\eta' u}{\mathfrak{Sin}(2\eta' K+\eta' u)\,\mathfrak{Sin}(2\eta' K-\eta' u)} - \frac{\eta'\,\mathfrak{Sin}\,2\eta' u}{\mathfrak{Sin}(4\eta' K+\eta' u)\,\mathfrak{Sin}(4\eta' K-\eta' u)} + \frac{\eta'\,\mathfrak{Sin}\,2\eta' u}{\mathfrak{Sin}(6\eta' K+\eta' u)\,\mathfrak{Cos}(6\eta' K-\eta' u)} - + \ldots$$

Da $\partial \operatorname{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = k \operatorname{cn} u.\partial u$ ist, so geben die Reihen (18.), (20.) und (21.) §. 195., differenziirt,

$$7.\quad k \operatorname{cn} u = \frac{2\eta\,\mathfrak{Sin}\,\eta K'.\cos\eta u}{\mathfrak{Sin}^2\eta K' + \sin^2\eta u} - \frac{2\eta\,\mathfrak{Sin}\,3\eta K'.\cos\eta u}{\mathfrak{Sin}^2\,3\eta K' + \sin^2\eta u} + \frac{2\eta\,\mathfrak{Sin}\,5\eta K'.\cos\eta u}{\mathfrak{Sin}^2\,6\eta K' + \sin^2\eta u} - + \ldots,$$

$$8.\quad k \operatorname{cn} u = \frac{\eta'}{\mathfrak{Cos}\,\eta' u} + \frac{2\eta'\,\mathfrak{Cos}\,2\eta' K.\,\mathfrak{Cos}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}(2\eta' K+\eta' u)\,\mathfrak{Cos}(2\eta' K-\eta' u)} + \frac{2\eta'\,\mathfrak{Cos}\,4\eta' K.\,\mathfrak{Cos}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}(4\eta' K+\eta' u)\,\mathfrak{Cos}(4\eta' K-\eta' u)} - \frac{2\eta'\,\mathfrak{Cos}\,6\eta' K.\,\mathfrak{Cos}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}(6\eta' K+\eta' u)\,\mathfrak{Cos}(6\eta' K-\eta' u)} + - \ldots,$$

$$9.\quad k \operatorname{cnc} u = \frac{2\eta'\,\mathfrak{Sin}\,\eta' K.\,\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}(\eta' K+\eta' u)\,\mathfrak{Cos}(\eta' K-\eta' u)} - \frac{2\eta'\,\mathfrak{Sin}\,3\eta' K.\,\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}(3\eta' K+\eta' u)\,\mathfrak{Cos}(3\eta' K-\eta' u)} + \frac{2\eta'\,\mathfrak{Sin}\,5\eta' K.\,\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}(5\eta' K+\eta' u)\,\mathfrak{Cos}(5\eta' K-\eta' u)} - + \ldots$$

Da $\partial\,\mathfrak{L}(\frac{1}{2}\pi-\mathrm{amc}\,u)=\frac{k'}{\mathrm{cn}\,u}.\partial u$ ist, so geben die Reihen (14.), (16.) und (17.) §. 195., differenzirt,

$$10.\quad \frac{k'}{\mathrm{cn}\,u}=\frac{\eta}{\cos\eta u}-\frac{2\eta\,\mathfrak{Cos}\,2\eta K'.\cos\eta u}{\mathfrak{Cos}^2\,2\eta K'-\sin^2\eta u}+\frac{2\eta\,\mathfrak{Cos}\,4\eta K'.\cos\eta u}{\mathfrak{Cos}^2\,4\eta K'-\sin^2\eta u}-\frac{2\eta\,\mathfrak{Cos}\,6\eta K'.\cos\eta u}{\mathfrak{Cos}^2\,6\eta K'-\sin^2\eta u}+-\ldots,$$

$$11.\quad \frac{k'}{\mathrm{cn}\,u}=\frac{2\eta'\,\mathfrak{Sin}\,\eta'K.\,\mathfrak{Cos}\,\eta'u}{\mathfrak{Sin}(\eta'K+\eta'u)\,\mathfrak{Sin}(\eta'K-\eta'u)}-\frac{2\eta'\,\mathfrak{Sin}\,3\eta'K.\,\mathfrak{Cos}\,\eta'u}{\mathfrak{Sin}(3\eta'K+\eta'u)\,\mathfrak{Sin}(3\eta'K-\eta'u)}+\frac{2\eta'\,\mathfrak{Sin}\,5\eta'K.\,\mathfrak{Cos}\,\eta'u}{\mathfrak{Sin}(5\eta'K+\eta'u)\,\mathfrak{Sin}(5\eta'K-\eta'u)}-+\ldots,$$

$$12.\quad \frac{k'}{\mathrm{cnc}\,u}=\frac{\eta'}{\mathfrak{Sin}\,\eta'u}+\frac{2\eta'\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'K.\,\mathfrak{Sin}\,\eta'u}{\mathfrak{Sin}(2\eta'K+\eta'u)\,\mathfrak{Sin}(2\eta'K-\eta'u)}-\frac{2\eta'\,\mathfrak{Cos}\,4\eta'K.\,\mathfrak{Sin}\,\eta'u}{\mathfrak{Sin}(4\eta'K+\eta'u)\,\mathfrak{Sin}(4\eta'K-\eta'u)}-\frac{2\eta'\,\mathfrak{Cos}\,6\eta'K.\,\mathfrak{Sin}\,\eta'u}{\mathfrak{Sin}(6\eta'K+\eta'u)\,\mathfrak{Sin}(6\eta'K-\eta'u)}+-\ldots,$$

Differenzirt man die Formeln (3.), (4.) und (6.) §. 195., so erhält man

$$13.\quad \mathrm{dn}\,u=\pm\eta+\frac{\eta\,\mathfrak{Sin}\,2\eta K'}{\mathfrak{Sin}^2\,\eta K'+\sin^2\eta u}-\frac{\eta\,\mathfrak{Sin}\,6\eta K'}{\mathfrak{Sin}^2\,3\eta K'+\sin^2\eta u}+\frac{\eta\,\mathfrak{Sin}\,10\eta K'}{\mathfrak{Sin}^2\,5\eta K'+\sin^2\eta u}-+\ldots,$$

$$14.\quad \mathrm{dn}\,u=\frac{\eta'}{\mathfrak{Cos}\,\eta'u}+\frac{2\eta'\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'K.\,\mathfrak{Cos}\,\eta'u}{\mathfrak{Cos}(2\eta'K+\eta'u)\,\mathfrak{Cos}(2\eta'K-\eta'u)}+\frac{2\eta'\,\mathfrak{Cos}\,4\eta'K.\,\mathfrak{Cos}\,\eta'u}{\mathfrak{Cos}(4\eta'K+\eta'u)\,\mathfrak{Cos}(4\eta'K-\eta'u)}+\frac{2\eta'\,\mathfrak{Cos}\,6\eta'K.\,\mathfrak{Cos}\,\eta'u}{\mathfrak{Cos}(6\eta'K+\eta'u)\,\mathfrak{Cos}(6\eta'K-\eta'u)}+\ldots,$$

$$15.\quad \mathrm{dnc}\,u=\frac{2\,\mathfrak{Cos}\,\eta'K.\,\mathfrak{Cos}\,\eta'u}{\mathfrak{Cos}(\eta'K+\eta'u)\,\mathfrak{Cos}(\eta'K-\eta'u)}+\frac{2\,\mathfrak{Cos}\,3\eta'K.\,\mathfrak{Cos}\,\eta'u}{\mathfrak{Cos}(3\eta'K+\eta'u)\,\mathfrak{Cos}(3\eta'K-\eta'u)}+\frac{2\,\mathfrak{Cos}\,5\eta'K.\,\mathfrak{Cos}\,\eta'u}{\mathfrak{Cos}(5\eta'K+\eta'u)\,\mathfrak{Cos}(5\eta'K-\eta'u)}+\ldots,$$

Da endlich $\partial\log\sqrt{\frac{1+\mathrm{dnc}\,u}{1-\mathrm{dnc}\,u}}=\mathfrak{L}\left(\frac{1}{2}\pi-\mathrm{am}\left(k(K-u),\frac{1}{k}\right)\right)=k'\,\mathrm{tn}\,u.\,\partial u$ ist, so erhalten wir

$$16.\quad k'\,\mathrm{tn}\,u=\eta\,\mathrm{tang}\,\eta u-\frac{2\eta\sin 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta K'+\cos 2\eta u}+\frac{2\eta\sin 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,8\eta K'+\cos 2\eta u}-\frac{2\eta\sin 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,12\eta K'+\cos 2\eta u}+-\ldots,$$

$$17.\quad k'\,\mathrm{tn}\,u=\frac{2\eta'\,\mathfrak{Cos}\,\eta'K.\,\mathfrak{Sin}\,\eta'u}{\mathfrak{Sin}(\eta'K+\eta'u)\,\mathfrak{Sin}(\eta'K-\eta'u)}+\frac{2\eta'\,\mathfrak{Cos}\,3\eta'K.\,\mathfrak{Sin}\,\eta'u}{\mathfrak{Sin}(3\eta'K+\eta'u)\,\mathfrak{Sin}(3\eta'K-\eta'u)}+\frac{2\eta'\,\mathfrak{Cos}\,5\eta'K.\,\mathfrak{Sin}\,\eta'u}{\mathfrak{Sin}(5\eta'K+\eta'u)\,\mathfrak{Sin}(5\eta'K-\eta'u)}+\ldots,$$

$$18.\quad k'\,\mathrm{tnc}\,u=\frac{\eta'}{\mathfrak{Sin}\,\eta'u}-\frac{2\,\mathfrak{Cos}\,2\eta'K.\,\mathfrak{Sin}\,\eta'u}{\mathfrak{Sin}(2\eta'K+\eta'u)\,\mathfrak{Sin}(2\eta'K-\eta'u)}-\frac{2\,\mathfrak{Cos}\,4\eta'K.\,\mathfrak{Sin}\,\eta'u}{\mathfrak{Sin}(4\eta'K+\eta'u)\,\mathfrak{Sin}(4\eta'K-\eta'u)}-\frac{2\,\mathfrak{Cos}\,6\eta'K.\,\mathfrak{Sin}\,\eta'u}{\mathfrak{Sin}(6\eta'K+\eta'u)\,\mathfrak{Sin}(6\eta'K-\eta'u)}-\ldots$$

§. 200.

Die Differenzial-Verhältnisse der Logarithmen der acht Hülfs-Functionen, als eben so viele neue oder abgeleitete Functionen.

Da $\mathrm{Al}\,o = o$ und $\mathrm{Al}(K) = \sqrt{k}$ ist, so wächst $\mathrm{Al}(u)$ und mithin auch $\log\mathrm{Al}(u)$ zwischen den Grenzen $u = o$ und $u = K$ gleichzeitig mit u; und gleichzeitig nimmt $\mathrm{Bl}(u)$ und mithin auch $\log\mathrm{Bl}(u)$ ab. Hieraus folgt, dafs $\frac{\partial \log \mathrm{Al}\,u}{\partial u}$ zwischen den genannten Grenzen positiv und $\frac{\partial \log \mathrm{Bl}(u)}{\partial u}$ zwischen denselben Grenzen negativ ist. Wir setzen also

$$1.\quad \begin{cases} \mathrm{A}(u) = \dfrac{\partial \log \mathrm{Al}\,u}{\partial u} = \dfrac{1}{\mathrm{Al}\,u}.\dfrac{\partial\,\mathrm{Al}\,u}{\partial u}, \\ \mathrm{B}(u) = -\dfrac{\partial \log \mathrm{Bl}\,u}{\partial u} = \dfrac{-1}{\mathrm{Bl}\,u}.\dfrac{\partial\,\mathrm{Bl}\,u}{\partial u}. \end{cases}$$

Da $\mathrm{Hl}\,o = \sqrt{k'}$ und $\mathrm{Hl}(K) = 1$ ist, so wächst also $\log\mathrm{Hl}\,u$ zwischen den genannten Grenzen, und $\mathrm{Gl}(u)$ nimmt gleichzeitig ab. Daher setzen wir

$$2.\quad \begin{cases} \mathrm{G}(u) = -\dfrac{\partial \log \mathrm{Gl}(u)}{\partial u} = -\dfrac{1}{\mathrm{Gl}\,u}.\dfrac{\partial\,\mathrm{Gl}\,u}{\partial u}, \\ \mathrm{H}(u) = \dfrac{\partial \log \mathrm{Hl}(u)}{\partial u} = \dfrac{1}{\mathrm{Hl}\,u}.\dfrac{\partial\,\mathrm{Hl}\,u}{\partial u}. \end{cases}$$

Die Reihen (6.) §. 174. geben hiernach

$$3.\quad \begin{cases} \mathrm{A}(u) = \dfrac{\eta}{\mathrm{tang}\,\eta u} + \dfrac{2\eta^2.q^2.\sin 2\eta u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta K'} + \dfrac{2\eta q^4.\sin 4\eta u}{\mathfrak{Sin}\,4\eta K'} + \dfrac{2\eta q^6.\sin 6\eta u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta K'} + \dfrac{2\eta q^8.\sin 8\eta u}{\mathfrak{Sin}\,8\eta K'} + \dots, \\ \mathrm{B}(u) = \eta\,\mathrm{tang}\,\eta u + \dfrac{2\eta q^2.\sin 2\eta u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta K'} - \dfrac{2\eta q^4.\sin 4\eta u}{\mathfrak{Sin}\,4\eta K'} + \dfrac{2\eta q^6.\sin 6\eta u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta K'} - \dfrac{2\eta q^8.\sin 8\eta u}{\mathfrak{Sin}\,8\eta K'} + - \dots, \\ \mathrm{G}(u) = \dfrac{2\eta \sin 2\eta u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta K'} - \dfrac{2\eta \sin 4\eta u}{\mathfrak{Sin}\,4\eta K'} + \dfrac{2\eta \sin 6\eta u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta K'} - \dfrac{2\eta \sin 8\eta u}{\mathfrak{Sin}\,8\eta K'} + - \dots, \\ \mathrm{H}(u) = \dfrac{2\eta \sin 2\eta u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta K'} + \dfrac{2\eta \sin 4\eta u}{\mathfrak{Sin}\,4\eta K'} + \dfrac{2\eta \sin 6\eta u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta K'} + \dfrac{2\eta \sin 8\eta u}{\mathfrak{Sin}\,8\eta K'} + + \dots, \end{cases}$$

so dafs wieder $\mathrm{A}(K-u) = \mathrm{B}(u)$, $\mathrm{B}(K-u) = \mathrm{A}(u)$, $\mathrm{G}(K-u) = \mathrm{H}(u)$ und $\mathrm{H}(K-u) = \mathrm{G}(u)$ ist. Die Formeln (1.), (2.), (3.), (4.) §. 187. geben

$$4.\quad \begin{cases} \mathrm{A}(u) = \dfrac{\eta}{\mathrm{tang}\,\eta u} + \dfrac{2\eta \sin 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta K' - \cos 2\eta u} + \dfrac{2\eta \sin 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,8\eta K' - \cos 2\eta u} \\ \qquad\qquad + \dfrac{2\eta \sin 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,12\eta K' - \cos 2\eta u} + \dots, \\ \mathrm{B}(u) = \eta\,\mathrm{tang}\,\eta u + \dfrac{2\eta \sin 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta K' + \cos 2\eta u} + \dfrac{2\eta \sin 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,8\eta K' + \cos 2\eta u} \\ \qquad\qquad + \dfrac{2\eta \sin 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,12\eta K' + \cos 2\eta u} + \dots, \\ \mathrm{G}(u) = \dfrac{2\eta \sin 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta K' + \cos 2\eta u} + \dfrac{2\eta \sin 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,6\eta K' + \cos 2\eta u} + \dfrac{2\eta \sin 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,10\eta K' + \cos 2\eta u} + \dots, \\ \mathrm{H}(u) = \dfrac{2\eta \sin 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta K' - \cos 2\eta u} + \dfrac{2\eta \sin 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,6\eta K' - \cos 2\eta u} + \dfrac{2\eta \sin 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,10\eta K' - \cos 2\eta u} + \dots \end{cases}$$

Die Formeln (3.) und (4.) §. 189. und die Formeln (5.) und (6.) §. 188. geben

$$5.\quad \begin{cases} \mathrm{A}(u) = \dfrac{\eta\,(q^{\frac{1}{2}}\cos\eta u - 3q^{\frac{9}{2}}\cos 3\eta u + 5q^{\frac{25}{2}}\cos 5\eta u - 7q^{\frac{49}{2}}\cos 7\eta u + 9q^{\frac{81}{2}}\cos 9\eta u - + \ldots)}{q^{\frac{1}{2}}\sin\eta u - q^{\frac{9}{2}}\sin 3\eta u + q^{\frac{25}{2}}\sin 5\eta u - q^{\frac{49}{2}}\sin 7\eta u + q^{\frac{81}{2}}\sin 9\eta u - + \ldots}, \\[2ex] \mathrm{B}(u) = \dfrac{\eta\,(q^{\frac{1}{2}}\sin\eta u + 3q^{\frac{9}{2}}\sin 3\eta u + 5q^{\frac{25}{2}}\sin 5\eta u + 7q^{\frac{49}{2}}\sin 7\eta u + 9q^{\frac{81}{2}}\sin 9\eta u + \ldots)}{q^{\frac{1}{2}}\cos\eta u + q^{\frac{9}{2}}\cos 3\eta u + q^{\frac{25}{2}}\cos 5\eta u + q^{\frac{49}{2}}\cos 7\eta u + q^{\frac{81}{2}}\cos 9\eta u + \ldots}, \\[2ex] \mathrm{G}(u) = \dfrac{2\eta\,(2q^{2}\sin 2\eta u + 4q^{8}\sin 4\eta u + 6q^{18}\sin 6\eta u + 8q^{32}\sin 8\eta u + 10q^{50}\sin 10\eta u + \ldots)}{1 + 2q^{2}\cos 2\eta u + 2q^{4}\cos 4\eta u + 2q^{18}\cos 6\eta u + 2q^{32}\cos 8\eta u + 2q^{50}\cos 10\eta u + \ldots}, \\[2ex] \mathrm{H}(u) = \dfrac{2\eta\,(2q^{2}\sin 2\eta u - 4q^{8}\sin 4\eta u + 6q^{18}\sin 6\eta u - 8q^{32}\sin 8\eta u + 10q^{50}\sin 10\eta u - + \ldots)}{1 - 2q^{2}\cos 2\eta u + 2q^{4}\cos 4\eta u - 2q^{18}\cos 6\eta u + 2q^{32}\cos 8\eta u - 2q^{50}\cos 10\eta u + - \ldots}. \end{cases}$$

Die drei Functionen $\mathfrak{Al}'u$, $\mathfrak{Bl}'u$ und $\mathfrak{Gl}'u$ wachsen gleichzeitig mit u; da aber $\mathfrak{Hl}'o = \sqrt{k}$ und $\mathfrak{Hl}'K = o$ ist, so nimmt $\mathfrak{Hl}'u$ ab, wenn u wächst. Aus dem angeführten Grunde setzen wir

$$6.\quad \begin{cases} \mathfrak{A}'(u) = \dfrac{\partial \log \mathfrak{Al}'u}{\partial u} = \dfrac{1}{\mathfrak{Al}'u}\cdot\dfrac{\partial\,\mathfrak{Al}'u}{\partial u}, \\[2ex] \mathfrak{B}'(u) = \dfrac{\partial \log \mathfrak{Bl}'u}{\partial u} = \dfrac{1}{\mathfrak{Bl}'u}\cdot\dfrac{\partial\,\mathfrak{Bl}'u}{\partial u}, \\[2ex] \mathfrak{G}'(u) = \dfrac{\partial \log \mathfrak{Gl}'u}{\partial u} = \dfrac{1}{\mathfrak{Gl}'u}\cdot\dfrac{\partial\,\mathfrak{Gl}'u}{\partial u}, \\[2ex] \mathfrak{H}'(u) = -\dfrac{\partial \log \mathfrak{Hl}'u}{\partial u} = -\dfrac{1}{\mathfrak{Hl}'u}\cdot\dfrac{\partial\,\mathfrak{Hl}'u}{\partial u}. \end{cases}$$

Wird der Modul mit dem conjugirten vertauscht, so ändern wir $\mathfrak{A}'(u)$, $\mathfrak{B}'(u)$, $\mathfrak{G}'(u)$ und $\mathfrak{H}'(u)$ in $\mathfrak{A}(u)$, $\mathfrak{B}(u)$, $\mathfrak{G}(u)$, $\mathfrak{H}(u)$ ab. Aus den Reihen (5.) §. 174. leiten wir nun her:

$$7.\quad \begin{cases} \mathfrak{A}'(u) = \dfrac{\eta'}{\mathfrak{Tang}\,\eta' u} - \dfrac{2\eta' p^{2}\,\mathfrak{Sin}2\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta' K} - \dfrac{2\eta' p^{4}\,\mathfrak{Sin}4\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,4\eta' K} + \dfrac{2\eta' p^{6}\,\mathfrak{Sin}6\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta' K} \\ \qquad\qquad - \dfrac{2\eta' p^{8}\,\mathfrak{Sin}8\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,8\eta' K} - \ldots, \\[2ex] \mathfrak{B}'(u) = \eta'\,\mathfrak{Tang}\,\eta' u + \dfrac{2\eta' p^{2}\,\mathfrak{Sin}2\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta' K} - \dfrac{2\eta' p^{4}\,\mathfrak{Sin}4\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,4\eta' K} + \dfrac{2\eta' p^{6}\,\mathfrak{Sin}6\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta' K} \\ \qquad\qquad - \dfrac{2\eta' p^{8}\,\mathfrak{Sin}8\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,8\eta' K} + - \ldots, \\[2ex] \mathfrak{G}'(u) = \dfrac{2\eta'\,\mathfrak{Sin}2\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta' K} - \dfrac{2\eta'\,\mathfrak{Sin}4\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,4\eta' K} + \dfrac{2\eta'\,\mathfrak{Sin}6\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta' K} - \dfrac{2\eta'\,\mathfrak{Sin}8\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,8\eta' K} + - \ldots, \\[2ex] \mathfrak{H}'(u) = \dfrac{2\eta'\,\mathfrak{Sin}2\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta' K} + \dfrac{2\eta'\,\mathfrak{Sin}4\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,4\eta' K} + \dfrac{2\eta'\,\mathfrak{Sin}6\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta' K} + \dfrac{2\eta'\,\mathfrak{Sin}8\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,8\eta' K} + + \ldots \end{cases}$$

Differenzirt man aber die Formeln (5.) bis (8.) §. 187. logarithmisch, so erhält man

$$8.\quad\begin{cases}
\mathfrak{A}'(u) = \eta'\,\mathrm{Cot}\,\eta' u - \dfrac{\eta'\,\mathrm{Sin}\,2\eta' u}{\mathrm{Sin}(2\eta' K+\eta' u)\,\mathrm{Sin}(2\eta' K-\eta' u)} \\
\qquad - \dfrac{\eta'\,\mathrm{Sin}\,2\eta' u}{\mathrm{Sin}(4\eta' K+\eta' u)\,\mathrm{Sin}(4\eta' K-\eta' u)} - \dfrac{\eta'\,\mathrm{Sin}\,2\eta' u}{\mathrm{Sin}(6\eta' K+\eta' u)\,\mathrm{Sin}(6\eta' K-\eta' u)} - \ldots, \\
\mathfrak{B}'(u) = \eta'\,\mathrm{Tang}\,\eta' u + \dfrac{\eta'\,\mathrm{Sin}\,2\eta' u}{\mathrm{Cos}\,(2\eta' K+\eta' u)\,\mathrm{Cos}\,(2\eta' K-\eta' u)} \\
\qquad + \dfrac{\eta'\,\mathrm{Sin}\,2\eta' u}{\mathrm{Cos}\,(4\eta' K+\eta' u)\,\mathrm{Cos}\,(4\eta' K-\eta' u)} + \dfrac{\eta'\,\mathrm{Sin}\,2\eta' u}{\mathrm{Cos}\,(6\eta' K+\eta' u)\,\mathrm{Cos}\,(6\eta' K-\eta' u)} + \ldots, \\
\mathfrak{G}'(u) = \dfrac{\eta'\,\mathrm{Sin}\,2\eta' u}{\mathrm{Cos}\,(\eta' K+\eta' u)\,\mathrm{Cos}\,(\eta' K-\eta' u)} + \dfrac{\eta'\,\mathrm{Sin}\,2\eta' u}{\mathrm{Cos}\,(3\eta' K+\eta' u)\,\mathrm{Cos}\,(3\eta' K-\eta' u)} \\
\qquad + \dfrac{\eta'\,\mathrm{Sin}\,2\eta' u}{\mathrm{Cos}\,(5\eta' K+\eta' u)\,\mathrm{Cos}\,(5\eta' K-\eta' u)} + \ldots, \\
\mathfrak{H}'(u) = \dfrac{\eta'\,\mathrm{Sin}\,2\eta' u}{\mathrm{Cos}\,(\eta' K+\eta' u)\,\mathrm{Sin}(\eta' K-\eta' u)} + \dfrac{\eta'\,\mathrm{Sin}\,2\eta' u}{\mathrm{Sin}(3\eta' K+\eta' u)\,\mathrm{Sin}(3\eta' K-\eta' u)} \\
\qquad + \dfrac{\eta'\,\mathrm{Sin}\,2\eta' u}{\mathrm{Sin}(5\eta' K+\eta u)\,\mathrm{Sin}(5\eta' K-\eta' u)} + \ldots
\end{cases}$$

Die Formeln (1.) und (2.) §. 189. und die Formeln (3.) und (4.) §. 188. geben jetzt

$$9.\quad\begin{cases}
\mathfrak{A}'(u) = \dfrac{\eta'(p^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{Cos}\,\eta' u - 3p^{\frac{9}{2}}\,\mathrm{Cos}\,3\eta' u + 5p^{\frac{25}{2}}\,\mathrm{Cos}\,5\eta' u - 7p^{\frac{49}{2}}\,\mathrm{Cos}\,7\eta' u + - \ldots)}{p^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{Sin}\,\eta' u - p^{\frac{9}{2}}\,\mathrm{Sin}3\eta' u + 5p^{\frac{25}{2}}\,\mathrm{Sin}5\eta' u - p^{\frac{49}{2}}\,\mathrm{Sin}7\eta' u + - \ldots}, \\
\mathfrak{B}'(u) = \dfrac{\eta'(p^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{Sin}\,\eta' u + 3p^{\frac{9}{2}}\,\mathrm{Sin}3\eta' u + 5p^{\frac{25}{2}}\,\mathrm{Sin}5\eta' u + 7p^{\frac{49}{2}}\,\mathrm{Sin}7\eta' u + \ldots)}{p^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{Cos}\,\eta' u + p^{\frac{9}{2}}\,\mathrm{Cos}\,3\eta' u + p^{\frac{25}{2}}\,\mathrm{Cos}\,5\eta' u + p^{\frac{49}{2}}\,\mathrm{Cos}\,7\eta' u + \ldots}, \\
\mathfrak{G}'(u) = \dfrac{2\eta'(2p^2\,\mathrm{Sin}\,2\eta' u + 4p^8\,\mathrm{Sin}\,4\eta' u + 6p^{18}\,\mathrm{Sin}\,6\eta' u + 8p^{32}\,\mathrm{Sin}\,8\eta' u + \ldots)}{1 + 2p^2\,\mathrm{Cos}\,2\eta' u + 2p^8\,\mathrm{Cos}\,4\eta' u + 2p^{18}\,\mathrm{Cos}\,6\eta' u + 2p^{32}\,\mathrm{Cos}\,8\eta' u + \ldots}, \\
\mathfrak{H}'(u) = \dfrac{2\eta'(2p^2\,\mathrm{Sin}\,2\eta' u - 4p^8\,\mathrm{Sin}\,4\eta' u + 6p^{18}\,\mathrm{Sin}\,6\eta' u - 8p^{32}\,\mathrm{Sin}\,8\eta' u + - \ldots)}{1 - 2p^2\,\mathrm{Cos}\,2\eta' u + 2p^8\,\mathrm{Cos}\,4\eta' u - 2p^{18}\,\mathrm{Cos}\,6\eta' u + 2p^{32}\,\mathrm{Cos}\,8\eta' u - + \ldots}.
\end{cases}$$

Alle acht Functionen $\mathrm{A}(u)$, $\mathrm{B}(u)$, $\mathrm{G}(u)$, $\mathrm{H}(u)$, $\mathfrak{A}'(u)$, $\mathfrak{B}'(u)$, $\mathfrak{G}'(u)$ und $\mathfrak{H}'(u)$ ändern ihre Gröſse nicht, sondern ihr Vorzeichen, wenn $-u$ statt u gesetzt wird. Ferner ist

$$\mathrm{A}o = \mathfrak{A}'o = \tfrac{1}{0}$$

und $\mathrm{B}o = \mathrm{G}o = \mathrm{H}o = \mathfrak{B}'o = \mathfrak{G}'o = \mathfrak{H}'o = o$. Auſserdem ist

$$10.\quad\begin{cases}
\mathrm{A}(ui) = \dfrac{\mathfrak{A}(u)}{i}, & \text{so wie umgekehrt}\quad \mathfrak{A}(ui) = \dfrac{\mathrm{A}(u)}{i}, \\
\mathrm{B}(ui) = i.\mathfrak{B}(u), & \text{- - - -}\quad \mathfrak{B}(ui) = i.\mathrm{B}(u), \\
\mathrm{G}(ui) = i.\mathfrak{G}(u), & \text{- - - -}\quad \mathfrak{G}(ui) = i.\mathrm{G}(u), \\
\mathrm{H}(ui) = i.\mathfrak{H}(u), & \text{- - - -}\quad \mathfrak{H}(ui) = i.\mathrm{H}(u).
\end{cases}$$

Die Formeln (3.) §. 170. geben, logarithmisch differenziirt,

$$11.\quad \begin{cases} \mathfrak{A}'(K-u) = \eta' + \mathfrak{H}'(u), & \text{also}\quad \mathfrak{A}'(K+u) = \eta' - \mathfrak{H}'(u), \\ \mathfrak{H}'(K-u) = -\eta' + \mathfrak{A}'(u), & -\quad \mathfrak{H}'(K+u) = -\eta' - \mathfrak{A}'(u), \\ \mathfrak{B}'(K-u) = \eta' - \mathfrak{G}'(u), & -\quad \mathfrak{B}'(K+u) = \eta' + \mathfrak{G}'(u), \\ \mathfrak{G}'(K-u) = \eta' - \mathfrak{B}'(u), & -\quad \mathfrak{G}'(K+u) = \eta' + \mathfrak{B}'(u). \end{cases}$$

Hieraus folgt, wenn $u = 0$ gesetzt wird, da

$$12.\quad \begin{cases} \mathfrak{A}'0 = \tfrac{1}{0}, \quad \mathfrak{B}'0 = 0, \quad \mathfrak{G}'0 = 0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{H}'0 = 0 \quad \text{ist:} \\ \mathfrak{A}'(K) = \eta', \quad \mathfrak{B}'(K) = \eta', \quad \mathfrak{G}'(K) = \eta' \quad \text{und} \quad \mathfrak{H}'(K) = \tfrac{1}{0}. \end{cases}$$

Ausserdem hat man dem §. 190. gemäfs

$$13.\quad \mathrm{A}(\tfrac{1}{2}K) = \mathrm{B}(\tfrac{1}{2}K) = \frac{1+k'}{2}, \quad \mathrm{G}(\tfrac{1}{2}K) = \mathrm{H}(\tfrac{1}{2}K) = \frac{1-k'}{2},$$

und noch

$$14.\quad \begin{cases} \mathfrak{A}'(\tfrac{1}{2}K) = \dfrac{1+k'}{2} + \tfrac{1}{2}\eta', & \mathfrak{G}'(\tfrac{1}{2}K) = \tfrac{1}{2}\eta' - \dfrac{1-k'}{2}, \\ \mathfrak{B}'(\tfrac{1}{2}K) = \dfrac{1-k'}{2} + \tfrac{1}{2}\eta', & \mathfrak{H}'(\tfrac{1}{2}K) = \dfrac{1+k'}{2} - \tfrac{1}{2}\eta'. \end{cases}$$

Die Formeln (2.) §. 185. geben, logarithmisch differenziirt,

$$15.\quad \begin{cases} \mathfrak{A}'(u) = \dfrac{\pi u}{2KK'} + \mathrm{A}(u) = \dfrac{\eta' u}{K} + \mathrm{A}(u), & \text{oder}\quad \mathfrak{A}'(ui) = \dfrac{\eta' u i}{K} - i\,\mathfrak{A}(u), \\ \mathfrak{B}'(u) = \dfrac{\pi u}{2KK'} + \mathrm{H}(u) = \dfrac{\eta' u}{K} + \mathrm{H}(u), & \text{oder}\quad \mathfrak{B}'(ui) = \dfrac{\eta' u i}{K} + i\,\mathfrak{H}(u), \\ \mathfrak{G}'(u) = \dfrac{\pi u}{2KK'} - \mathrm{G}(u) = \dfrac{\eta' u}{K} - \mathrm{G}(u), & \text{oder}\quad \mathfrak{G}'(ui) = \dfrac{\eta' u i}{K} - i\,\mathfrak{G}(u), \\ \mathfrak{H}'(u) = -\dfrac{\pi u}{2KK'} + \mathrm{B}(u) = -\dfrac{\eta' u}{K} + \mathrm{B}(u), & \text{oder}\quad \mathfrak{H}'(ui) = -\dfrac{\eta' u i}{K} + i\,\mathfrak{B}(u). \end{cases}$$

Aus den Formeln (14.) sieht man zugleich, dafs η' immer zwischen den Grenzen $1-k'$, $1+k'$, also η zwischen $1-k$ und $1+k$ enthalten ist.

Setzt man in den Formeln $\mathrm{A}(K-u) = \mathrm{B}(u)$, $\mathrm{B}(K-u) = \mathrm{A}(u)$, $\mathrm{G}(K-u) = \mathrm{H}(u)$ und $\mathrm{H}(K-u) = \mathrm{H}(u)$, $-u$ statt $+u$, so hat man

$$16.\quad \begin{cases} \mathrm{A}(K+u) = -\mathrm{B}(u), & \text{also ist}\quad \mathrm{A}(2K+u) = \mathrm{A}(u), \\ \mathrm{B}(K+u) = -\mathrm{A}(u), & -\quad -\quad \mathrm{B}(2K+u) = \mathrm{B}(u), \\ \mathrm{G}(K+u) = -\mathrm{H}(u), & -\quad -\quad \mathrm{G}(2K+u) = \mathrm{G}(u), \\ \mathrm{H}(K+u) = -\mathrm{G}(u), & -\quad -\quad \mathrm{H}(2K+u) = \mathrm{H}(u). \end{cases}$$

Die Functionen $\mathrm{A}(u)$, $\mathrm{B}(u)$, $\mathrm{G}(u)$ und $\mathrm{H}(u)$ leiden also keine Aenderung, wenn das Argument u beliebig oft um $2K$ vermehrt oder auch vermindert wird. Setzt man also in den Formeln (15.) $u+2mK$ statt u, so erhält man, wenn m eine ganze Zahl vorstellt:

$$\mathfrak{A}'(u+2mK) = \frac{\eta'(u+2mK)}{K} + \mathrm{A}(u),$$
$$\mathfrak{B}'(u+2mK) = \frac{\eta'(u+2mK)}{K} + \mathrm{H}(u),$$
$$\mathfrak{G}'(u+2mK) = \frac{\eta'(u+2mK)}{K} - \mathrm{G}(u),$$
$$\mathfrak{H}'(u+2mK) = -\frac{\eta'(u+2mK)}{K} + \mathrm{B}(u);$$

und werden hiervon die anfänglichen Gleichungen subtrahirt, so erhält man

$$17. \quad \begin{cases} \mathfrak{A}'(u+2mK) = 2m\eta' + \mathfrak{A}'(u), \\ \mathfrak{B}'(u+2mK) = 2m\eta' + \mathfrak{B}'(u), \\ \mathfrak{G}'(u+2mK) = 2m\eta' + \mathfrak{G}'(u), \\ \mathfrak{H}'(u+2mK) = -2m\eta' + \mathfrak{H}'(u). \end{cases}$$

Zusatz 1. Differenziirt man die Gleichungen (8.) bis (11.) §. 171., so erhält man zunächst

$$\mathrm{Al}u.\partial\,\mathrm{Al}u + k'.\mathrm{Bl}u.\partial\,\mathrm{Bl}u = k.\mathrm{Hl}u.\partial\,\mathrm{Hl}u,$$
$$\mathrm{Bl}u.\partial\,\mathrm{Bl}u + k'.\mathrm{Al}u.\partial\,\mathrm{Al}u = k.\mathrm{Gl}u.\partial\,\mathrm{Gl}u,$$
$$k'.\mathrm{Gl}u.\partial\,\mathrm{Gl}u + k.\mathrm{Al}u.\partial\,\mathrm{Al}u = \mathrm{Hl}u.\partial\,\mathrm{Hl}u,$$
$$k'.\mathrm{Hl}u.\partial\,\mathrm{Hl}u + k.\mathrm{Bl}u.\partial\,\mathrm{Bl}u = \mathrm{Gl}u.\partial\,\mathrm{Gl}u;$$

und substituirt man hierin die Werthe $\partial\,\mathrm{Al}u = \mathrm{Al}u.\mathrm{A}u.\partial u$, $\partial\,\mathrm{Bl}u = -\mathrm{Bl}u.\mathrm{B}u.\partial u$, $\partial\,\mathrm{Gl}u = -\mathrm{Gl}u.\mathrm{G}u.\partial u$, $\partial\,\mathrm{Hl}u = \mathrm{Hl}u.\mathrm{H}u.\partial u$, so verwandeln sie sich in

$$\mathrm{Al}^2u.\mathrm{A}u - k'.\mathrm{Bl}^2u.\mathrm{B}u = k.\mathrm{Hl}^2u.\mathrm{H}u,$$
$$-\mathrm{Bl}^2u.\mathrm{B}u + k'.\mathrm{Al}^2u.\mathrm{A}u = -k.\mathrm{Gl}^2u.\mathrm{G}u,$$
$$-k'.\mathrm{Gl}^2u.\mathrm{G}u + k.\mathrm{Al}^2u.\mathrm{A}u = \mathrm{Hl}^2u.\mathrm{H}u,$$
$$k'.\mathrm{Hl}^2u.\mathrm{H}u - k.\mathrm{Bl}^2u.\mathrm{B}u = -\mathrm{Gl}^2u.\mathrm{G}u.$$

Dividirt man nun die erste Gleichung durch $k.\mathrm{Hl}^2u$, so verwandelt sie sich in

$$18. \quad \begin{cases} \mathrm{sn}^2u.\mathrm{A}(u) - \mathrm{cn}^2u.\mathrm{B}(u) = \mathrm{H}(u), \text{ also} \\ \mathrm{snc}^2u.\mathrm{B}(u) - \mathrm{cnc}^2u.\mathrm{A}(u) = \mathrm{G}(u); \text{ eben so findet man} \\ k^2\,\mathrm{sn}^2u.\mathrm{A}(u) - \mathrm{dn}^2u.\mathrm{G}(u) = \mathrm{H}(u) \text{ und} \\ k^2\,\mathrm{snc}^2u.\mathrm{B}(u) - \mathrm{dnc}^2u.\mathrm{H}(u) = \mathrm{G}(u). \end{cases}$$

Setzt man in diesen Formeln ui statt u, indem man den Modul mit dem conjugirten vertauscht, so erhält man

$$19. \quad \begin{cases} \mathrm{sn}^2u.\mathfrak{A}'(u) - \mathrm{cn}^2u.\mathfrak{H}'(u) = \mathfrak{B}'(u), \\ \mathrm{dn}^2u.\mathfrak{G}'(u) + k^2\,\mathrm{sn}^2u.\mathfrak{A}'(u) = \mathfrak{B}'(u), \\ \mathrm{cnc}^2u.\mathfrak{A}'(u) - \mathrm{snc}^2u.\mathfrak{H}'(u) = \mathfrak{G}'(u), \\ \mathrm{dn}^2u.\mathfrak{G}'(u) + k^2\,\mathrm{cn}^2u.\mathfrak{H}'(u) = k'^2\,\mathfrak{B}'(u), \text{ oder} \\ \quad \mathfrak{G}'(u) + k^2\,\mathrm{snc}^2u.\mathfrak{H}'(u) = \mathrm{dnc}^2u.\mathfrak{B}'(u). \end{cases}$$

Differenziirt man die Formeln (6.) §. 171. logarithmisch, so erhält man die Formeln

$$20.\quad \begin{cases} \mathrm{A}(u) - \mathrm{H}(u) = \dfrac{\mathrm{dn}\, u}{\mathrm{tn}\, u} = \dfrac{k' \,\mathrm{cn}\, u}{\mathrm{cnc}\, u}, \\ \mathrm{B}(u) + \mathrm{H}(u) = \mathrm{tn}\, u\; \mathrm{dn}\, u = \dfrac{\mathrm{sn}\, u}{\mathrm{snc}\, u}, \\ \mathrm{G}(u) + \mathrm{H}(u) = k^2 \,\mathrm{sn}\, u\; \mathrm{snc}\, u, \\ \mathrm{A}(u) + \mathrm{B}(u) = \dfrac{1}{\mathrm{sn}\, u\; \mathrm{snc}\, u}, \\ \mathrm{B}(u) - \mathrm{G}(u) = \dfrac{k' \,\mathrm{cnc}\, u}{\mathrm{cn}\, u} = \dfrac{k'^2 \,\mathrm{sn}\, u}{\mathrm{dn}\, u\; \mathrm{cn}\, u}, \\ \mathrm{A}(u) + \mathrm{G}(u) = \dfrac{\mathrm{snc}\, u}{\mathrm{sn}\, u} = \dfrac{1}{\mathrm{tn}\, u\; \mathrm{dn}\, u}. \end{cases}$$

Vertauscht man hierin die beiden conjugirten Modul, und setzt ui statt u, so erhält man noch

$$21.\quad \begin{cases} \mathfrak{A}'(u) + \mathfrak{H}'(u) = \dfrac{1}{\mathrm{sn}\, u\; \mathrm{snc}\, u}, \\ \mathfrak{B}'(u) + \mathfrak{H}'(u) = \mathrm{tn}\, u\; \mathrm{dn}\, u = \dfrac{\mathrm{sn}\, u}{\mathrm{snc}\, u}, \\ \mathfrak{G}'(u) + \mathfrak{H}'(u) = \dfrac{k'^2 \,\mathrm{tn}\, u}{\mathrm{dn}\, u} = \dfrac{\mathrm{dnc}\, n}{\mathrm{tnc}\, u} = \dfrac{k' \,\mathrm{cnc}\, u}{\mathrm{cn}\, u}, \\ \mathfrak{A}'(u) - \mathfrak{B}'(u) = \dfrac{\mathrm{dn}\, u}{\mathrm{tn}\, u}, \\ \mathfrak{B}'(u) - \mathfrak{G}'(u) = k^2 \,\mathrm{sn}\, u\; \mathrm{snc}\, u, \\ \mathfrak{A}'(u) - \mathfrak{G}'(u) = \dfrac{\mathrm{snc}\, u}{\mathrm{sn}\, u}. \end{cases}$$

Zusatz 2. Da $\mathrm{Cot}(a-b) - \mathrm{Cot}(a+b) = \dfrac{\mathrm{Sin}\, 2b}{\mathrm{Sin}(a+b)\, \mathrm{Sin}(a-b)}$ und $\mathrm{Tang}(a+b) - \mathrm{Tang}(a-b) = \dfrac{\mathrm{Sin}\, 2b}{\mathrm{Cos}(a+b)\, \mathrm{Cos}(a-b)}$ ist, so können die Formeln (8.) auch also dargestellt werden:

$$\mathfrak{A}'(u) =$$
$$\eta' \,\mathrm{Cot}\, \eta' u + \eta' \,\mathrm{Cot}(2\eta' K + \eta' u) + \eta' \,\mathrm{Cot}(4\eta' K + \eta' u) + \eta' \,\mathrm{Cot}(6\eta' K + \eta' u) + \ldots$$
$$- \eta' \,\mathrm{Cot}(2\eta' K - \eta' u) - \eta' \,\mathrm{Cot}(4\eta' K - \eta' u) - \eta' \,\mathrm{Cot}(6\eta' K - \eta' u) - \ldots,$$

$$\mathfrak{B}'(u) =$$
$$\eta' \,\mathrm{Tang}\, \eta' u + \eta' \,\mathrm{Tang}(2\eta' K + \eta' u) + \eta' \,\mathrm{Tang}(4\eta' K + \eta' u) + \eta' \,\mathrm{Tang}(6\eta' K + \eta' u) + \ldots$$
$$- \eta' \,\mathrm{Tang}(2\eta' K - \eta' u) - \eta' \,\mathrm{Tang}(4\eta' K - \eta' u) - \eta' \,\mathrm{Tang}(6\eta' K - \eta' u) - \ldots,$$

$$\mathfrak{G}'(u) = \eta' \,\mathrm{Tang}(\eta' K + \eta' u) + \eta' \,\mathrm{Tang}(3\eta' K + \eta' u) + \eta' \,\mathrm{Tang}(5\eta' K + \eta' u) + \ldots$$
$$- \eta' \,\mathrm{Tang}(\eta' K - \eta' u) - \eta' \,\mathrm{Tang}(3\eta' K - \eta' u) - \eta' \,\mathrm{Tang}(5\eta' K - \eta' u) + \ldots,$$

$$\mathfrak{H}'(u) = \eta' \,\mathrm{Cot}(\eta' K - \eta' u) + \eta' \,\mathrm{Cot}(3\eta' K - \eta' u) + \eta' \,\mathrm{Cot}(5\eta' K - \eta' u) + \ldots$$
$$- \eta' \,\mathrm{Cot}(\eta' K + \eta' u) - \eta' \,\mathrm{Cot}(3\eta' K + \eta' u) - \eta' \,\mathrm{Cot}(5\eta' K + \eta' u) - \ldots$$

Hiernach lassen sich also die Gröfsen $\mathfrak{A}'(u)$, $\mathfrak{B}'(u)$, $\mathfrak{G}'(u)$ und $\mathfrak{H}'(u)$ noch leichter berechnen, als die gleichlautenden cyklischen Functionen $\mathrm{A}(u)$, $\mathrm{B}(u)$, $\mathrm{G}(u)$ und $\mathrm{H}(u)$.

§. 201.

Allgemeine Relationen unter jenen Functionen.

Differenziirt man die Formeln (5.) bis (8.) §. 183., so erhält man

$$1.\quad \mathrm{el}\,u = \frac{E}{K}u + \mathrm{H}(u),$$

$$2.\quad \mathrm{elc}\,u = E - \frac{E}{K}u + \mathrm{G}(u),$$

$$3.\quad \mathrm{el}\,u = \left(1 - \frac{E'}{K'}\right)u + \mathfrak{B}'(u),$$

$$4.\quad \mathrm{elc}\,u = E - \left(1 - \frac{E'}{K'}\right)u - \mathfrak{G}'(u).$$

Substituirt man in der Formel $\mathrm{el}(a+u) = \mathrm{el}\,a + \mathrm{el}\,u - k^2 \,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}(a+u)$ §. 65. die Werthe $\mathrm{el}(a+u) = \frac{E}{K}(a+u) + \mathrm{H}(a+u)$, $\mathrm{el}\,a = \frac{E}{K}a + \mathrm{H}(a)$ und $\mathrm{el}\,u = \frac{E}{K}u + \mathrm{H}(u)$, so reducirt sie sich auf

$$5.\quad \begin{cases} \mathrm{H}(a+u) = \mathrm{H}(a) + \mathrm{H}(u) - k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}(a+u), \text{ also} \\ \mathrm{H}(a-u) = \mathrm{H}(a) - \mathrm{H}(u) + k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}(a-u). \end{cases}$$

Auf gleiche Weise erhält man

$$6.\quad \begin{cases} \mathfrak{B}'(a+u) = \mathfrak{B}'(a) + \mathfrak{B}'(u) - k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}(a+u), \\ \mathfrak{B}'(a-u) = \mathfrak{B}'(a) + \mathfrak{B}'(u) + k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}(a-u). \end{cases}$$

Vertauscht man in den Formeln (5.) und (6.) die conjugirten Modul, indem man ai und ui statt a und u setzt, so erhält man

$$7.\quad \begin{cases} \mathfrak{H}'(a+u) = \mathfrak{H}'(a) + \mathfrak{H}'(u) + k'^2\,\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{tn}\,u\,\mathrm{tn}(a+u), \\ \mathfrak{H}'(a-u) = \mathfrak{H}'(a) - \mathfrak{H}'(u) - k'^2\,\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{tn}\,u\,\mathrm{tn}(a-u), \end{cases}$$

und

$$8.\quad \begin{cases} \mathrm{B}(a+u) = \mathrm{B}(a) + \mathrm{B}(u) + k'^2\,\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{tn}\,u\,\mathrm{tn}(a+u), \\ \mathrm{B}(a-u) = \mathrm{B}(a) - \mathrm{B}(u) - k'^2\,\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{tn}\,u\,\mathrm{tn}(a-u). \end{cases}$$

Aus den Formeln (5.) und (6.) §. 65. können eben so noch allgemeinere Relationen hergeleitet werden.

Funfzehnter Abschnitt.

§. 202.

Ausdruck der Modular-Integrale der zweiten Art und zweiten Classe durch die Hülfs-Functionen und die davon abgeleiteten Functionen.

Nach §. 116. ist $\mathfrak{S}(u,a) = u.\mathrm{el}\,a - \frac{\mathrm{lm}(a+u)-\mathrm{lm}(a-u)}{2}$. Da nun nach §. 183.

$$\mathrm{lm}(a+u) = \frac{E}{K}.\frac{(a+u)^2}{2} + \log\left(\frac{\mathrm{Hl}(a+u)}{\sqrt{k'}}\right) \text{ und}$$

$$\mathrm{lm}(a-u) = \frac{E}{K}.\frac{(a-u)^2}{2} + \log\left(\frac{\mathrm{Hl}(a-u)}{\sqrt{k'}}\right)$$

ist, so erhält man durch Subtraction

$$\frac{\mathrm{lm}(a+u)-\mathrm{lm}(a-u)}{2} = \frac{E}{K}.au + \log\sqrt{\frac{\mathrm{Hl}(a+u)}{\mathrm{Hl}(a-u)}}.$$

Ferner ist nach §. 201. auch $\mathrm{el}\,a = \frac{E}{K}.a + \mathrm{H}(a)$, also $u.\mathrm{el}\,a = \frac{E}{K}.au + u.\mathrm{H}(a)$. Werden diese Werthe substituirt, so erhält man sofort für das Sinus-Integral den Ausdruck

$$1.\quad \mathfrak{S}(u,a) = u.\mathrm{H}(a) - \log\sqrt{\frac{\mathrm{Hl}(a+u)}{\mathrm{Hl}(a-u)}}.$$

Das Cosinus-Integral wird nach §. 116. angegeben durch

$$\mathfrak{C}(u,a) = -u(E - \mathrm{elc}\,a) + \frac{\mathrm{lm}(a+u)-\mathrm{lm}(a-u)}{2};$$

und, da nach §. 201. $E - \mathrm{elc}\,a = \frac{E}{K}.a - \mathrm{G}(a)$ ist, so findet sich

$$2.\quad \mathfrak{C}(u,a) = u.\mathrm{G}(a) + \log\sqrt{\frac{\mathrm{Hl}(a+u)}{\mathrm{Hl}(a-u)}}.$$

Für das Differente-Integral wurde in §. 116.

$$\mathfrak{D}(u,a) = u(\mathfrak{El}'a - a) + \frac{\mathrm{lm}(a+u)-\mathrm{lm}(a-u)}{2}$$

gefunden. Setzt man aber in der Formel (3.) §. 201. ai statt a, indem man die beiden conjugirten Modul mit einander vertauscht, so erhält man

$$\mathfrak{El}'a = \left(1-\frac{E}{K}\right).a + B(a) \quad \text{oder}$$

$$\mathfrak{El}'a - a = -\frac{E}{K}.a + B(a).$$

Wird dieser Werth substituirt, so findet sich

$$3.\quad \mathfrak{D}(u, a) = u \,.\, \mathrm{B}(a) + \log\sqrt{\frac{\mathrm{Hl}(a+u)}{\mathrm{Hl}(a-u)}}.$$

Da nach Formel (7.) §. 183.

$$\mathrm{lm}(a \pm u) = \left(1 - \frac{E'}{K'}\right) . \frac{(a \pm u)^2}{2} + \log \frac{\mathfrak{Bl}'(a \pm u)}{\sqrt{k'}}$$

ist, so findet man auch

$$\frac{\mathrm{lm}(a+u) - \mathrm{lm}(a-u)}{2} = \left(1 - \frac{E'}{K'}\right) . au + \log\sqrt{\frac{\mathfrak{Bl}'(a+u)}{\mathfrak{Bl}'(a-u)}}.$$

Ferner ist nach §. 201.

$$u \,.\, \mathrm{el}\, a = \left(1 - \frac{E'}{K'}\right) . au + u \,.\, \mathfrak{B}'a:$$

also haben wir für das Sinus-Integral noch den zweiten Ausdruck

$$4.\quad \mathfrak{S}(u, a) = u \,.\, \mathfrak{B}'(a) - \log\sqrt{\frac{\mathfrak{Bl}'(a+u)}{\mathfrak{Bl}'(a-u)}},$$

und da nach §. 201. $E - \mathrm{elc}\, a = \left(1 - \frac{E'}{K'}\right) a + \mathfrak{G}'(a)$ ist, so ist der zweite Ausdruck für das Cosinus-Integral

$$5.\quad \mathfrak{C}(u, a) = -u \,.\, \mathfrak{G}'(a) + \log\sqrt{\frac{\mathfrak{Bl}'(a+u)}{\mathfrak{Bl}'(a-u)}}.$$

Aus der Formel (1.) §. 201. folgt $\mathfrak{El}'a = \frac{E'}{K'} . a + \mathfrak{H}'(a)$, oder auch $\mathfrak{El}'a - a = -\left(1 - \frac{E'}{K'}\right) a + \mathfrak{H}'(a)$, und wird dieser Werth benutzt, so entsteht auch für das Differente-Integral der zweite Ausdruck

$$6.\quad \mathfrak{D}(u, a) = u \,.\, \mathfrak{H}'(a) + \log\sqrt{\frac{\mathfrak{Bl}'(a+u)}{\mathfrak{Bl}'(a-u)}}.$$

Setzen wir in den Formeln (1. 2. 3.) $K - a$ statt a, so werden sie

$$7.\quad \begin{cases} \mathfrak{S}(u, K-a) = u \,.\, \mathrm{G}(a) - \log\sqrt{\frac{\mathrm{Gl}(a-u)}{\mathrm{Gl}(a+u)}}, \\ \mathfrak{C}(u, K-a) = u \,.\, \mathrm{H}(a) + \log\sqrt{\frac{\mathrm{Gl}(a-u)}{\mathrm{Gl}(a+u)}}, \\ \mathfrak{D}(u, K-a) = u \,.\, \mathrm{A}(a) + \log\sqrt{\frac{\mathrm{Gl}(a-u)}{\mathrm{Gl}(a+u)}}. \end{cases}$$

Setzen wir auch in den Formeln (3. 4. 5.) $K - a$ statt a, so ist nach §. 170.

$$\log \mathfrak{Bl}'(K - a + u) = \eta'(\tfrac{1}{2}K - a + u) + \log \mathfrak{Gl}'(a - u) \text{ und}$$
$$\log \mathfrak{Bl}'(K - a - u) = \eta'(\tfrac{1}{2}K - a - u) + \log \mathfrak{Gl}'(a + u),$$

also

$$\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Bl}'(K-a+u)}{\mathfrak{Bl}'(K-a-u)}} = \eta' u - \log\sqrt{\frac{\mathfrak{Gl}'(a+u)}{\mathfrak{Gl}'(a-u)}}.$$

Werden aufserdem die Formeln (11. §. 200.) benutzt, so erhält man

$$8.\quad \begin{cases} \mathfrak{S}(u,K-a) = -u\,.\,\mathfrak{G}'(a)+\log\sqrt{\dfrac{\mathfrak{Gl}'(a+u)}{\mathfrak{Gl}'(a-u)}}, \\ \mathfrak{C}(u,K-a) = u\,.\,\mathfrak{B}'(a)-\log\sqrt{\dfrac{\mathfrak{Gl}'(a+u)}{\mathfrak{Gl}'(a-u)}}, \\ \mathfrak{D}(u,K-a) = u\,.\,\mathfrak{A}'(a)-\log\sqrt{\dfrac{\mathfrak{Gl}'(a+u)}{\mathfrak{Gl}'(a-u)}}. \end{cases}$$

Zusatz 1. Setzt man in den Formeln (1. 2. 3.) den Parameter $a=\frac{1}{2}K$, so ist nach §. 190.

$$\log\sqrt{\frac{\mathrm{Hl}(\frac{1}{2}K+u)}{\mathrm{Hl}(\frac{1}{2}K-u)}} = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{Arc\,Tang}\,((1-k')\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u),$$

also

$$9.\quad \begin{cases} \mathfrak{S}(u,\frac{1}{2}K) = \dfrac{u(1-k')}{2}-\tfrac{1}{2}\,\mathfrak{Arc\,Tang}\,((1-k')\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u), \\ \mathfrak{C}(u,\frac{1}{2}K) = \dfrac{u(1-k')}{2}+\tfrac{1}{2}\,\mathfrak{Arc\,Tang}\,((1-k')\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u), \\ \mathfrak{D}(u,\frac{1}{2}K) = \dfrac{u(1+k')}{2}+\tfrac{1}{2}\,\mathfrak{Arc\,Tang}\,((1-k')\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u). \end{cases}$$

Setzt man aber in den Formeln $u=\frac{1}{2}K$, so erhält man

$$10.\quad \begin{cases} \mathfrak{S}(\frac{1}{2}K,a) = \frac{1}{2}K\,.\,\mathrm{H}(a)-\frac{1}{2}\,\mathfrak{Arc\,Tang}\,((1-k')\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a), \\ \mathfrak{C}(\frac{1}{2}K,a) = \frac{1}{2}K\,.\,\mathrm{G}(a)+\frac{1}{2}\,\mathfrak{Arc\,Tang}\,((1-k')\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a), \\ \mathfrak{D}(\frac{1}{2}K,a) = \frac{1}{2}K\,.\,\mathrm{B}(a)+\frac{1}{2}\,\mathfrak{Arc\,Tang}\,((1-k')\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a). \end{cases}$$

Zusatz 2. Differenziirt man die Formeln (1. 2. 3.), so erhält man

$$11.\quad \begin{cases} \dfrac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}^2 u}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u} = \mathrm{H}(a)-\dfrac{\mathrm{H}(a+u)-\mathrm{H}(u-a)}{2} = \mathfrak{B}'(a)-\dfrac{\mathfrak{B}'(u+a)-\mathfrak{B}'(u-a)}{2}, \\ \dfrac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{cn}^2 u}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u} = \mathrm{G}(a)+\dfrac{\mathrm{H}(a+u)-\mathrm{H}(u-a)}{2} = -\mathfrak{G}'(a)+\dfrac{\mathfrak{B}'(u+a)-\mathfrak{B}'(u-a)}{2}, \\ \dfrac{\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}^2 u}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u} = \mathrm{B}(a)+\dfrac{\mathrm{H}(u+a)-\mathrm{H}(u-a)}{2} = \mathfrak{H}'(a)+\dfrac{\mathfrak{B}'(u+a)-\mathfrak{B}'(u-a)}{2}. \end{cases}$$

Eben so erhält man aus den Formeln (7. und 8.)

$$12.\quad \begin{cases} \dfrac{k^2\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{cnc}\,a\,\mathrm{dnc}\,a\,\mathrm{sn}^2 u}{1-k^2\,\mathrm{snc}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u} = \mathrm{G}(a)-\dfrac{\mathrm{G}(u+a)-\mathrm{G}(u-a)}{2} = -\mathfrak{G}'(a)+\dfrac{\mathfrak{G}'(u+a)-\mathfrak{G}'(u-a)}{2}, \\ \dfrac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{cn}^2 u}{1-k^2\,\mathrm{snc}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u} = \mathrm{H}(a)+\dfrac{\mathrm{G}(u+a)-\mathrm{G}(u-a)}{2} = \mathfrak{B}'(a)-\dfrac{\mathfrak{G}'(u+a)-\mathfrak{G}'(u-a)}{2}, \\ \dfrac{\mathrm{tnc}\,a\,\mathrm{dnc}\,a\,\mathrm{dn}^2 u}{1-k^2\,\mathrm{snc}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u} = \mathrm{A}(a)+\dfrac{\mathrm{G}(u+a)-\mathrm{G}(u-a)}{2} = \mathfrak{A}'(a)-\dfrac{\mathfrak{G}'(u+a)-\mathfrak{G}'(u-a)}{2}. \end{cases}$$

§. 203.

Ausdruck der Modular-Integrale der zweiten Art und vierten Classe durch die Hülfs-Functionen und die davon abgeleiteten Functionen.

Vertauscht man in den Formeln (4. 5. 6. §. 202.) die beiden conjugirten Modul, indem man gleichzeitig ai statt a und bi statt b setzt, so erhält man, dem §. 117. gemäſs,

$$1.\quad \begin{cases} {}'\mathfrak{S}(u,a) = -u.\mathrm{B}(a) + \log\sqrt{\dfrac{\mathrm{Bl}(a-u)}{\mathrm{Bl}(a+u)}}, \\ {}'\mathfrak{C}(u,a) = -u.\mathrm{G}(a) + \log\sqrt{\dfrac{\mathrm{Bl}(a-u)}{\mathrm{Bl}(a+u)}}, \\ {}'\mathfrak{D}(u,a) = \quad u.\mathrm{H}(a) + \log\sqrt{\dfrac{\mathrm{Bl}(a-u)}{\mathrm{Bl}(a+u)}}. \end{cases}$$

Auf gleiche Weise verwandeln sich die Formeln (1. 2. 3. §. 202.) in

$$2.\quad \begin{cases} {}'\mathfrak{S}(u,a) = -u.\mathfrak{H}'(a) + \log\sqrt{\dfrac{\mathfrak{Hl}'(a-u)}{\mathfrak{Hl}'(a+u)}}, \\ {}'\mathfrak{C}(u,a) = \quad u.\mathfrak{G}'(a) + \log\sqrt{\dfrac{\mathfrak{Hl}'(a-u)}{\mathfrak{Hl}'(a+u)}}, \\ {}'\mathfrak{D}(u,a) = \quad u.\mathfrak{B}'(a) + \log\sqrt{\dfrac{\mathfrak{Hl}'(a-u)}{\mathfrak{Hl}'(a+u)}}. \end{cases}$$

Setzt man in den Formeln (1.) $K-a$ statt a, so werden sie

$$3.\quad \begin{cases} {}'\mathfrak{S}(u,K-a) = -u.\mathrm{A}(a) + \log\sqrt{\dfrac{\mathrm{Al}(a+u)}{\mathrm{Al}(a-u)}}, \\ {}'\mathfrak{C}(u,K-a) = -u.\mathrm{H}(a) + \log\sqrt{\dfrac{\mathrm{Al}(a+u)}{\mathrm{Al}(a-u)}}, \\ {}'\mathfrak{D}(u,K-a) = \quad u.\mathrm{G}(a) + \log\sqrt{\dfrac{\mathrm{Al}(a+u)}{\mathrm{Al}(a-u)}}. \end{cases}$$

Will man in den Formeln (2.) ebenfalls $K-a$ statt a setzen, so ist, den Formeln (3. §. 168.) gemäſs,

$$\log\mathfrak{Hl}'(K-a-u) = \eta'(\tfrac{1}{2}K-a-u) + \log\mathfrak{Al}'(a+u) \quad \text{und}$$
$$\log\mathfrak{Hl}'(K-a+u) = \eta'(\tfrac{1}{2}K-a+u) + \log\mathfrak{Al}'(a-u),$$

also $\log\sqrt{\dfrac{\mathfrak{Hl}'(K-a-u)}{\mathfrak{Hl}'(K-a+u)}} = -\eta'u + \log\sqrt{\dfrac{\mathfrak{Al}'(a+u)}{\mathfrak{Al}'(a-u)}}$.

Benutzt man außerdem die Formeln (11. §. 200.), so hat man

$$4.\quad \begin{cases} {}'\mathfrak{S}(u,K-a) = -u.\mathfrak{A}'(a) + \log\sqrt{\dfrac{\mathfrak{Al}'(a+u)}{\mathfrak{Al}'(a-u)}}, \\ {}'\mathfrak{C}(u,K-a) = -u.\mathfrak{B}'(a) + \log\sqrt{\dfrac{\mathfrak{Al}'(a+u)}{\mathfrak{Al}'(a-u)}}, \\ {}'\mathfrak{D}(u,K-a) = -u.\mathfrak{G}'(a) + \log\sqrt{\dfrac{\mathfrak{Al}'(a+u)}{\mathfrak{Al}'(a-u)}}. \end{cases}$$

Zusatz 1. Setzt man in den Formeln (1.) den Parameter $a = \frac{1}{2}K$, so ist nach §. 190.

$$\log\sqrt{\frac{\mathrm{Bl}(\frac{1}{2}K-u)}{\mathrm{Bl}(\frac{1}{2}K+u)}} = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{ArcTang}((1+k')\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u),\quad \text{also}$$

$$5.\quad\begin{cases} '\mathfrak{S}(u,\frac{1}{2}K) = -\frac{1}{2}((1+k')u) + \frac{1}{2}\,\mathfrak{ArcTang}((1+k')\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u),\\ '\mathfrak{C}(u,\frac{1}{2}K) = -\frac{1}{2}((1-k')u) + \frac{1}{2}\,\mathfrak{ArcTang}((1+k')\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u),\\ '\mathfrak{D}(u,\frac{1}{2}K) = \quad\frac{1}{2}((1-k')u) + \frac{1}{2}\,\mathfrak{ArcTang}((1+k')\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u);\end{cases}$$

setzt man aber das Argument $u = \frac{1}{2}K$, so erhält man

$$6.\quad\begin{cases} '\mathfrak{S}(\frac{1}{2}K,a) = -\frac{1}{2}K.\mathrm{B}(a) + \frac{1}{2}\,\mathfrak{ArcTang}((1+k')\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a),\\ '\mathfrak{C}(\frac{1}{2}K,a) = -\frac{1}{2}K.\mathrm{G}(a) + \frac{1}{2}\,\mathfrak{ArcTang}((1+k')\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a),\\ '\mathfrak{D}(\frac{1}{2}K,a) = \quad\frac{1}{2}K.\mathrm{H}(a) + \frac{1}{2}\,\mathfrak{ArcTang}((1+k')\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a).\end{cases}$$

Zusatz 2. Differenziirt man die Formeln (1.) und (2.), so erhält man

$$7.\quad\begin{cases} \dfrac{\mathrm{dnc}\,a}{\mathrm{tnc}\,a}\cdot\dfrac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{snc}^2 a-\mathrm{sn}^2 u} = -\mathrm{B}(a) + \dfrac{\mathrm{B}(u+a)-\mathrm{B}(u-a)}{2}\\ \qquad = -\mathfrak{H}'(a) + \dfrac{\mathfrak{H}'(u+a)-\mathfrak{H}'(u-a)}{2},\\ \dfrac{\mathrm{dnc}\,a}{\mathrm{tnc}\,a}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{snc}^2 a}} = -\mathrm{G}(a) + \dfrac{\mathrm{B}(u+a)-\mathrm{B}(u-a)}{2}\\ \qquad = \mathfrak{G}'(a) + \dfrac{\mathfrak{H}'(u+a)-\mathfrak{H}'(u-a)}{2},\\ \dfrac{\mathrm{sn}\,a}{\mathrm{snc}\,a}\cdot\dfrac{\mathrm{dn}^2 u}{1-\dfrac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{snc}^2 a}} = \mathrm{H}(a) + \dfrac{\mathrm{B}(u+a)-\mathrm{B}(u-a)}{2}\\ \qquad = \mathfrak{B}'(a) + \dfrac{\mathfrak{H}'(u+a)-\mathfrak{H}'(u-a)}{2};\end{cases}$$

differenziirt man hingegen die Formeln (3.) und (4.), so erhält man

$$8.\quad\begin{cases} \dfrac{\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{tn}\,a}\cdot\dfrac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 a-\mathrm{sn}^2 u} = -\mathrm{A}(a) + \dfrac{\mathrm{A}(u+a)-\mathrm{A}(u-a)}{2}\\ \qquad = -\mathfrak{A}'(a) + \dfrac{\mathfrak{A}'(u+a)-\mathfrak{A}'(u-a)}{2},\\ \dfrac{\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{tn}\,a}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 a}} = -\mathrm{H}(a) + \dfrac{\mathrm{A}(u+a)-\mathrm{A}(u-a)}{2}\\ \qquad = -\mathfrak{B}'(a) + \dfrac{\mathfrak{A}'(u+a)-\mathfrak{A}'(u-a)}{2},\\ \dfrac{\mathrm{snc}\,a}{\mathrm{sn}\,a}\cdot\dfrac{\mathrm{dn}^2 u}{1-\dfrac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2 a}} = \mathrm{G}(a) + \dfrac{\mathrm{A}(u+a)-\mathrm{A}(u-a)}{2}\\ \qquad = -\mathfrak{G}'(a) + \dfrac{\mathfrak{A}'(u+a)-\mathfrak{A}'(u-a)}{2}.\end{cases}$$

§. 204.

Entwickelung des Ausdrucks $\log\sqrt{\frac{\mathrm{Hl}(a+u)}{\mathrm{Hl}(a-u)}}$ und ähnlicher Ausdrücke mit anderen Hülfs-Functionen.

Der Ausdruck $\log\sqrt{\frac{\mathrm{Hl}(a+u)}{\mathrm{Hl}(a-u)}}$ und die ihm ähnlichen, welche in den vorhin entwickelten Formeln für die hyperbolischen Modular-Integrale vorkommen, lassen sich leicht unmittelbar nach den oben entwickelten Formeln berechnen; aber diese Berechnung versagt, wenn eine von den beiden Gröſsen a und u imaginär ist, während die andere reell bleibt, und es sich also um die Berechnung eines cyklischen Modular-Integrals der zweiten Art handelt, welches entweder der ersten oder dritten Classe, dem §. 117. und §. 122. gemäſs, angehört. Es ist alsdann durchaus nöthig, daſs der vorgelegte logarithmische Ausdruck entwickelt werde, damit, wenn eine der beiden Gröſsen a und u imaginär genommen wird, die imaginäre Form des Ausdrucks auf eine reelle Form zurückgebracht werden könne. Die erwähnte Entwickelung kann leicht auf mehr als eine Weise ausgeführt werden. Substituirt man in den Formeln (6. §. 174.) zuerst $a+u$ und dann $a-u$ für u, so erhält man durch die Subtraction

$$1.\left\{\begin{aligned}
\log\sqrt{\frac{\mathrm{Al}(a+u)}{\mathrm{Al}(a-u)}} &= \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\operatorname{tang}\eta u}{\operatorname{tang}\eta a}\right)+\frac{q^2\sin 2\eta a\sin 2\eta u}{1.\mathfrak{Sin}\,2\eta K'}\\
&\quad+\frac{q^4\sin 4\eta a\sin 4\eta u}{2.\mathfrak{Sin}\,4\eta K'}+\frac{q^6\sin 6\eta a\sin 6\eta u}{3.\mathfrak{Sin}\,6\eta K'}++\ldots\\
\log\sqrt{\frac{\mathrm{Bl}(a-u)}{\mathrm{Bl}(a+u)}} &= \mathfrak{ArcTang}(\operatorname{tang}\eta a\operatorname{tang}\eta u)+\frac{q^2\sin 2\eta a\sin 2\eta u}{1.\mathfrak{Sin}\,2\eta K'}\\
&\quad-\frac{q^4\sin 4\eta a\sin 4\eta u}{2.\mathfrak{Sin}\,4\eta K'}+\frac{q^6\sin 6\eta a\sin 6\eta u}{3.\mathfrak{Sin}\,6\eta K'}-+\ldots\\
\log\sqrt{\frac{\mathrm{Gl}(a-u)}{\mathrm{Gl}(a+u)}} &= \frac{\sin 2\eta a\sin 2\eta u}{1.\mathfrak{Sin}\,2\eta K'}-\frac{\sin 4\eta a\sin 4\eta u}{2.\mathfrak{Sin}\,4\eta K'}+\frac{\sin 6\eta a\sin 6\eta u}{3.\mathfrak{Sin}\,6\eta K'}\\
&\quad-\frac{\sin 8\eta a\sin 8\eta u}{4.\mathfrak{Sin}\,8\eta K'}+-\ldots\\
\log\sqrt{\frac{\mathrm{Hl}(a+u)}{\mathrm{Hl}(a-u)}} &= \frac{\sin 2\eta a\sin 2\eta u}{1.\mathfrak{Sin}\,2\eta K'}+\frac{\sin 4\eta a\sin 4\eta u}{2.\mathfrak{Sin}\,4\eta K'}+\frac{\sin 6\eta a\sin 6\eta u}{3.\mathfrak{Sin}\,6\eta K'}\\
&\quad+\frac{\sin 8\eta a\sin 8\eta u}{4.\mathfrak{Sin}\,8\eta K'}++\ldots
\end{aligned}\right.$$

Setzt man in den vorstehenden Formeln ai statt a und ui statt u, so verwandeln sie sich in

$$
2.\quad
\begin{cases}
\log\sqrt{\dfrac{\mathfrak{Al}(a+u)}{\mathfrak{Al}(a-u)}} = \mathfrak{ArcTang}\left(\dfrac{\mathfrak{Tang}\,\eta a)}{\mathfrak{Tang}\,\eta a)}\right) - \dfrac{q^2\,\mathfrak{Sin}\,2\eta a\,\mathfrak{Sin}\,2\eta u}{1.\,\mathfrak{Sin}\,2\eta K'} \\
\qquad - \dfrac{q^4\,\mathfrak{Sin}\,4\eta a\,\mathfrak{Sin}\,4\eta u}{2.\,\mathfrak{Sin}\,4\eta K'} - \dfrac{q^6\,\mathfrak{Sin}\,6\eta a\,\mathfrak{Sin}\,6\eta u}{3.\,\mathfrak{Sin}\,6\eta K'} - \ldots. \\
\log\sqrt{\dfrac{\mathfrak{Bl}(a+u)}{\mathfrak{Bl}(a-u)}} = \mathfrak{ArcTang}\,(\mathfrak{Tang}\,\eta a\,\mathfrak{Tang}\,\eta u) + \dfrac{q^2\,\mathfrak{Sin}\,2\eta a\,\mathfrak{Sin}\,2\eta u}{1.\,\mathfrak{Sin}\,2\eta K'} \\
\qquad - \dfrac{q^4\,\mathfrak{Sin}\,4\eta a\,\mathfrak{Sin}\,4\eta u}{2.\,\mathfrak{Sin}\,4\eta K'} + \dfrac{q^6\,\mathfrak{Sin}\,6\eta a\,\mathfrak{Sin}\,6\eta u}{3.\,\mathfrak{Sin}\,6\eta K'} - + \ldots. \\
\log\sqrt{\dfrac{\mathfrak{Gl}(a+u)}{\mathfrak{Gl}(a-u)}} = \dfrac{\mathfrak{Sin}\,2\eta a\,\mathfrak{Sin}\,2\eta u}{1.\,\mathfrak{Sin}\,2\eta K'} - \dfrac{\mathfrak{Sin}\,4\eta a\,\mathfrak{Sin}\,4\eta u}{2.\,\mathfrak{Sin}\,4\eta K'} \\
\qquad + \dfrac{\mathfrak{Sin}\,6\eta a\,\mathfrak{Sin}\,6\eta u}{3.\,\mathfrak{Sin}\,6\eta K'} - \dfrac{\mathfrak{Sin}\,8\eta a\,\mathfrak{Sin}\,8\eta u}{4.\,\mathfrak{Sin}\,8\eta K'} + - \ldots. \\
\log\sqrt{\dfrac{\mathfrak{Hl}(a-u)}{\mathfrak{Hl}(a+u)}} = \dfrac{\mathfrak{Sin}\,2\eta a\,\mathfrak{Sin}\,2\eta u}{1.\,\mathfrak{Sin}\,2\eta K'} + \dfrac{\mathfrak{Sin}\,4\eta a\,\mathfrak{Sin}\,4\eta u}{2.\,\mathfrak{Sin}\,4\eta K'} \\
\qquad + \dfrac{\mathfrak{Sin}\,6\eta a\,\mathfrak{Sin}\,6\eta u}{3.\,\mathfrak{Sin}\,6\eta K'} + \dfrac{\mathfrak{Sin}\,8\eta a\,\mathfrak{Sin}\,8\eta u}{4.\,\mathfrak{Sin}\,8\eta K'} + + \ldots.
\end{cases}
$$

Bemerkenswerther sind die Reihen, welche wir aus den Formeln (5. — 8. §. 187.) oder lieber aus den ihnen unmittelbar vorhergehenden vier Formeln herleiten. Ihnen gemäfs ist zunächst

$$\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Al}(a+u)}{\mathfrak{Al}(a-u)}} =$$

$$\log\sqrt{\left\{\frac{\mathfrak{Sin}(\eta a+\eta u)}{\mathfrak{Sin}(\eta a-\eta u)}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,4\eta K'-\mathfrak{Cos}\,(2\eta a+2\eta u)}{\mathfrak{Cos}\,4\eta K'-\mathfrak{Cos}\,(2\eta a-2\eta u)}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,8\eta K'-\mathfrak{Cos}\,(2\eta a+2\eta u)}{\mathfrak{Cos}\,8\eta K'-\mathfrak{Cos}\,(2\eta a-2\eta u)}\ldots\right\}},$$

$$\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Bl}(a+u)}{\mathfrak{Bl}(a-u)}} =$$

$$\log\sqrt{\left\{\frac{\mathfrak{Cos}(\eta a+\eta u)}{\mathfrak{Cos}(\eta a-\eta u)}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,4\eta K'+\mathfrak{Cos}\,(2\eta a+2\eta u)}{\mathfrak{Cos}\,4\eta K'+\mathfrak{Cos}\,(2\eta a-2\eta u)}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}\,8\eta K'+\mathfrak{Cos}\,(2\eta a+2\eta u)}{\mathfrak{Cos}\,8\eta K'+\mathfrak{Cos}\,(2\eta a-2\eta u)}\ldots\right\}},$$

$$\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Gl}(a+u)}{\mathfrak{Gl}(a-u)}} =$$

$$\log\sqrt{\left\{\frac{\mathfrak{Cos}2\eta K'+\mathfrak{Cos}(2\eta a+2\eta u)}{\mathfrak{Cos}2\eta K'+\mathfrak{Cos}(2\eta a+2\eta u)}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}6\eta K'+\mathfrak{Cos}(2\eta a+2\eta u)}{\mathfrak{Cos}6\eta K'+\mathfrak{Cos}(2\eta a-2\eta u)}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}10\eta K'+\mathfrak{Cos}(2\eta a+2\eta u)}{\mathfrak{Cos}10\eta K'+\mathfrak{Cos}(2\eta a-2\eta u)}\ldots\right\}},$$

$$\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Hl}(a-u)}{\mathfrak{Hl}(a+u)}} =$$

$$\log\sqrt{\left\{\frac{\mathfrak{Cos}2\eta K'-\mathfrak{Cos}(2\eta a-2\eta u)}{\mathfrak{Cos}2\eta K'-\mathfrak{Cos}(2\eta a+2\eta u)}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}6\eta K'-\mathfrak{Cos}(2\eta a-2\eta u)}{\mathfrak{Cos}6\eta K'-\mathfrak{Cos}(2\eta a+2\eta u)}\cdot\frac{\mathfrak{Cos}10\eta K'-\mathfrak{Cos}(2\eta a-2\eta u)}{\mathfrak{Cos}10\eta K'-\mathfrak{Cos}(2\eta a+2\eta u)}\ldots\right\}}.$$

Da aber

$$\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Sin}\,(a+b)}{\mathfrak{Sin}\,(a-b)}} = \log\sqrt{\frac{\mathfrak{Tang}\,a+\mathfrak{Tang}\,b}{\mathfrak{Tang}\,a-\mathfrak{Tang}\,b}} = \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\mathfrak{Tang}\,b}{\mathfrak{Tang}\,a}\right),$$

$$\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Cos}\,(a+b)}{\mathfrak{Cos}\,(a-b)}} = \log\sqrt{\frac{1+\mathfrak{Tang}\,a\,\mathfrak{Tang}\,b}{1-\mathfrak{Tang}\,a\,\mathfrak{Tang}\,b}} = \mathfrak{ArcTang}\,(\mathfrak{Tang}\,a\,\mathfrak{Tang}\,b),$$

$$\log\sqrt{\frac{\mathrm{Cos}\,2c-\mathrm{Cos}(2a+2b)}{\mathrm{Cos}\,2c-\mathrm{Cos}(2a-2b)}}=\log\sqrt{\frac{\mathrm{Sin}(c+a+b)\,.\,\mathrm{Sin}(c-a-b)}{\mathrm{Sin}(c+a-b)\,.\,\mathrm{Sin}(c-a+b)}}$$

$$=\mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,b\,.\,\mathrm{Cot}(c+a))-\mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,b\,.\,\mathrm{Cot}(c-a)),$$

$$\log\sqrt{\frac{\mathrm{Cos}\,2c+\mathrm{Cos}(2a+2b)}{\mathrm{Cos}\,2c-\mathrm{Cos}(2a-2b)}}=\log\sqrt{\frac{\mathrm{Cos}(c+a+b)\,.\,\mathrm{Cos}(c-a-b)}{\mathrm{Cos}(c+a-b)\,.\,\mathrm{Cos}(c-a+b)}}$$

$$=\mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,b\;\mathrm{Tang}\,(c+a))-\mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,b\,.\,\mathrm{Tang}(c-a))$$

ist, so lassen sich die vorigen Formeln einfacher also darstellen:

$$3.\quad \log\sqrt{\frac{\mathfrak{Al}(a+u)}{\mathfrak{Al}(a-u)}}$$

$$\begin{aligned}
=\mathrm{ArcTang}\left(\frac{\mathrm{Tang}\,\eta u}{\mathrm{Tang}\,\eta a}\right)&+\mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta u\,.\,\mathrm{Cot}(2\eta K'+\eta a))\\
&-\mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta u\,.\,\mathrm{Cot}(2\eta K'-\eta a))\\
&+\mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta u\,.\,\mathrm{Cot}(4\eta K'+\eta a))\\
&-\mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta u\,.\,\mathrm{Cot}(4\eta K'-\eta a))\\
&+\mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta u\,.\,\mathrm{Cot}(6\eta K'+\eta a))+\ldots\\
&-\mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta u\,.\,\mathrm{Cot}(6\eta K'-\eta a))-\ldots
\end{aligned}$$

$$4.\quad \log\sqrt{\frac{\mathfrak{Al}(a+u)}{\mathfrak{Al}(a-u)}}$$

$$\begin{aligned}
=\mathrm{ArcTang}\left(\frac{\mathrm{Tang}\,\eta u}{\mathrm{Tang}\,\eta a}\right)&+\mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta a\,.\,\mathrm{Cot}(2\eta K'+\eta u))\\
&-\mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta a\,.\,\mathrm{Cot}(2\eta K'-\eta u))\\
&+\mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta a\,.\,\mathrm{Cot}(4\eta K'-\eta u))+\ldots\\
&-\mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta a\,.\,\mathrm{Cot}(4\eta K'-\eta u))-\ldots
\end{aligned}$$

$$5.\quad \log\sqrt{\frac{\mathfrak{Bl}(a+u)}{\mathfrak{Bl}(a-u)}}$$

$$\begin{aligned}
=\mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta a\,.\,\mathrm{Tang}\,\eta u)&+\mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta u\,.\,\mathrm{Tang}(2\eta K'+\eta a))\\
&-\mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta u\,.\,\mathrm{Tang}(2\eta K'-\eta a))\\
&+\mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta u\,.\,\mathrm{Tang}(4\eta K'+\eta a))\\
&-\mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta u\,.\,\mathrm{Tang}(4\eta K'-\eta a))\\
&+\mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta u\,.\,\mathrm{Tang}(6\eta K'+\eta a))+\ldots\\
&-\mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta u\,.\,\mathrm{Tang}(6\eta K'-\eta a))-\ldots
\end{aligned}$$

$$6.\quad \log\sqrt{\frac{\mathfrak{Bl}(a+u)}{\mathfrak{Bl}(a-u)}}$$

$$\begin{aligned}
=\mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta a\,.\,\mathrm{Tang}\,\eta u)&+\mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta a\,.\,\mathrm{Tang}(2\eta K'+\eta u))\\
&-\mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta a\,.\,\mathrm{Tang}(2\eta K'-\eta u))\\
&+\mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta a\,.\,\mathrm{Tang}(4\eta K'+\eta u))+\ldots\\
&-\mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta a\,.\,\mathrm{Tang}(4\eta K'-\eta u))-\ldots
\end{aligned}$$

$$7. \quad \log \sqrt{\frac{\mathrm{Gl}(a+u)}{\mathrm{Gl}(a-u)}}$$

$$= \mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta u\,\mathrm{Tang}(\eta K'+\eta a)) + \mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta u\,\mathrm{Tang}(3\eta K'+\eta a))$$
$$- \mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta u\,\mathrm{Tang}(\eta K'-\eta a)) - \mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta u\,\mathrm{Tang}(3\eta K'-\eta a))$$
$$+ \mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta u\,\mathrm{Tang}(5\eta K'+\eta a)) + \ldots.$$
$$- \mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta u\,\mathrm{Tang}(5\eta K'-\eta a)) - \ldots.$$

$$8. \quad \log \sqrt{\frac{\mathrm{Gl}(a+u)}{\mathrm{Gl}(a-u)}}$$

$$= \mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta a\,\mathrm{Tang}(\eta K'+\eta u)) + \mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta a\,\mathrm{Tang}(3\eta K'+\eta u))$$
$$- \mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta a\,\mathrm{Tang}(\eta K'-\eta u)) - \mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta a\,\mathrm{Tang}(3\eta K'-\eta u))$$
$$+ \mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta a\,\mathrm{Tang}(5\eta K'+\eta u)) + \ldots.$$
$$- \mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta a\,\mathrm{Tang}(5\eta K'-\eta u)) - \ldots.$$

$$9. \quad \log \sqrt{\frac{\mathrm{Hl}(a-u)}{\mathrm{Hl}(a+u)}}$$

$$= \mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta u\,\mathrm{Cot}(\eta K'-\eta a)) + \mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta u\,\mathrm{Cot}(3\eta K'-\eta a))$$
$$- \mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta u\,\mathrm{Cot}(\eta K'+\eta a)) - \mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta u\,\mathrm{Cot}(3\eta K'+\eta a))$$
$$+ \mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta u\,\mathrm{Cot}(5\eta K'-\eta a)) + \ldots.$$
$$- \mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta u\,\mathrm{Cot}(5\eta K'+\eta a)) + \ldots.$$

$$10. \quad \log \sqrt{\frac{\mathrm{Hl}(a-u)}{\mathrm{Hl}(a+u)}}$$

$$= \mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta a\,\mathrm{Cot}(\eta K'-\eta u)) + \mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta a\,\mathrm{Cot}(3\eta K'-\eta u))$$
$$- \mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta a\,\mathrm{Cot}(\eta K'+\eta u)) - \mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta a\,\mathrm{Cot}(3\eta K'+\eta u))$$
$$+ \mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta a\,\mathrm{Cot}(5\eta K'-\eta u)) + \ldots.$$
$$- \mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta a\,\mathrm{Cot}(5\eta K'+\eta u)) - \ldots.$$

Alle diese acht Doppelreihen, in welchen die zu je zweien unter einander stehenden Glieder nicht getrennt werden müssen, haben einen sehr hohen Grad der Convergenz, und die Berechnung der einzelnen Glieder ist so einfach, wie sie nur gewünscht werden kann.

Die Convergenz in diesen Reihen wird sichtbarer, wenn man die zusammengehörigen Glieder vereinigt. Man erhält alsdann

$$\log \sqrt{\frac{\mathrm{Al}(a+u)}{\mathrm{Al}(a-u)}} = \mathrm{ArcTang}\left(\frac{\mathrm{Tang}\,\eta u}{\mathrm{Tang}\,\eta a}\right) - \mathrm{ArcTang}\left(\frac{\mathrm{Sin}\,2\eta a\,\mathrm{Sin}\,2\eta u}{\mathrm{Cos}\,4\eta K' - \mathrm{Cos}\,2\eta a\,\mathrm{Cos}\,2\eta u}\right)$$
$$- \mathrm{ArcTang}\left(\frac{\mathrm{Sin}\,2\eta a\,\mathrm{Sin}\,2\eta u}{\mathrm{Cos}\,8\eta K' - \mathrm{Cos}\,2\eta a\,\mathrm{Cos}\,2\eta u}\right) - \ldots.$$

$$\log \sqrt{\frac{\mathrm{Bl}(a+u)}{\mathrm{Bl}(a-u)}} = \mathrm{ArcTang}(\mathrm{Tang}\,\eta a\,\mathrm{Tang}\,\eta u) + \mathrm{ArcTang}\left(\frac{\mathrm{Sin}\,2\eta a\,\mathrm{Sin}\,2\eta u}{\mathrm{Cos}\,4\eta K' + \mathrm{Cos}\,2\eta a\,\mathrm{Cos}\,2\eta u}\right)$$
$$+ \mathrm{ArcTang}\left(\frac{\mathrm{Sin}\,2\eta a\,\mathrm{Sin}\,2\eta u}{\mathrm{Cos}\,8\eta K' + \mathrm{Cos}\,2\eta a\,\mathrm{Cos}\,2\eta u}\right) + \ldots.$$

$$\log \sqrt{\frac{\mathfrak{Gl}(a+u)}{\mathfrak{Gl}(a-u)}}$$

$$= \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,2\eta a\,\mathfrak{Sin}\,2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta K' + \mathfrak{Cos}\,2\eta a\,\mathfrak{Cos}\,2\eta u}\right) + \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,2\eta a\,\mathfrak{Sin}\,2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,6\eta K' + \mathfrak{Cos}\,2\eta a\,\mathfrak{Cos}\,2\eta u}\right)$$
$$+ \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,2\eta a\,\mathfrak{Sin}\,2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,10\eta K' + \mathfrak{Cos}\,2\eta a\,\mathfrak{Cos}\,2\eta u}\right) + \ldots$$

$$\log \sqrt{\frac{\mathfrak{Hl}(a+u)}{\mathfrak{Hl}(a-u)}}$$

$$= \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,2\eta a\,\mathfrak{Sin}\,2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta K' - \mathfrak{Cos}\,2\eta a\,\mathfrak{Cos}\,2\eta u}\right) + \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,2\eta a\,\mathfrak{Sin}\,2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,6\eta K' - \mathfrak{Cos}\,2\eta a\,\mathfrak{Cos}\,2\eta u}\right)$$
$$+ \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,2\eta a\,\mathfrak{Sin}\,2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,10\eta K' - \mathfrak{Cos}\,2\eta a\,\mathfrak{Cos}\,2\eta u}\right) + \ldots$$

Die Convergenz in diesen Reihen ist desto gröſser, je kleiner der Modul k ist, weil die Gröſsen $\mathfrak{Cos}\,2\eta K$, $\mathfrak{Cos}\,4\eta K'$, $\mathfrak{Cos}\,6\eta K'$, $\mathfrak{Cos}\,8\eta K'$ etc. dann sehr rasch zunehmen.

§. 205.

Da nach §. 170.

$$\log \mathrm{sn}'(a \pm u) = \log \frac{1}{\sqrt{k'}} + \log \mathfrak{Al}(a \pm u) - \log \mathfrak{Bl}(a \pm u)$$

ist, so ist

$$\log \sqrt{\frac{\mathfrak{Al}(a+u)}{\mathfrak{Al}(a-u)}} - \log \sqrt{\frac{\mathfrak{Bl}(a+u)}{\mathfrak{Bl}(a-u)}} = \log \sqrt{\frac{\mathrm{sn}'(a+u)}{\mathrm{sn}'(a-u)}}.$$

Eben so ist

$$\log \sqrt{\frac{\mathfrak{Bl}(a+u)}{\mathfrak{Bl}(a-u)}} + \log \sqrt{\frac{\mathfrak{Hl}(a-u)}{\mathfrak{Hl}(a+u)}} = \log \sqrt{\frac{\mathrm{cn}'(a-u)}{\mathrm{cn}'(a+u)}},$$
$$\log \sqrt{\frac{\mathfrak{Bl}(a+u)}{\mathfrak{Bl}(a-u)}} - \log \sqrt{\frac{\mathfrak{Gl}(a+u)}{\mathfrak{Gl}(a-u)}} = \log \sqrt{\frac{\mathrm{dn}'(a-u)}{\mathrm{dn}'(a+u)}},$$
$$\log \sqrt{\frac{\mathfrak{Al}(a+u)}{\mathfrak{Al}(a-u)}} + \log \sqrt{\frac{\mathfrak{Hl}(a-u)}{\mathfrak{Hl}(a+u)}} = \log \sqrt{\frac{\mathrm{tn}'(a+u)}{\mathrm{tn}'(a-u)}},$$
$$\log \sqrt{\frac{\mathfrak{Gl}(a+u)}{\mathfrak{Gl}(a-u)}} + \log \sqrt{\frac{\mathfrak{Hl}(a-u)}{\mathfrak{Hl}(a+u)}} = \log \sqrt{\frac{\mathrm{snc}'(a-u)}{\mathrm{snc}'(a+n)}},$$
$$\log \sqrt{\frac{\mathfrak{Al}(a+u)}{\mathfrak{Al}(a-u)}} - \log \sqrt{\frac{\mathfrak{Gl}(a+u)}{\mathfrak{Gl}(a-u)}} = \log \sqrt{\frac{\mathrm{cnc}'(a+u)}{\mathrm{cnc}'(a-u)}},$$

und diese Formeln können, dem §. 37. gemäſs, auch also dargestellt werden:

1. $$\log \sqrt{\frac{\mathfrak{Al}(a+u)}{\mathfrak{Al}(a-u)}} - \log \sqrt{\frac{\mathfrak{Bl}(a+u)}{\mathfrak{Bl}(a-u)}} = \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\mathrm{tn}'u\ \mathrm{dn}'a}{\mathrm{tn}'a\ \mathrm{dn}'u}\right)$$
$$= \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\mathrm{cnc}'u}{\mathrm{cn}'u} \cdot \frac{\mathrm{cn}'a}{\mathrm{cnc}'a}\right),$$

2. $$\log \sqrt{\frac{\mathfrak{Bl}(a+u)}{\mathfrak{Bl}(a-u)}} + \log \sqrt{\frac{\mathfrak{Hl}(a-u)}{\mathfrak{Hl}(a+u)}} = \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\mathrm{sn}'a}{\mathrm{snc}'a} \cdot \frac{\mathrm{sn}'u}{\mathrm{snc}'u}\right),$$

$$3.\quad \log\sqrt{\frac{\mathfrak{Bl}(a+u)}{\mathfrak{Bl}(a-u)}}-\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Gl}(a+u)}{\mathfrak{Gl}(a-u)}}=\mathfrak{ArcTang}(k'^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a\,\mathrm{sn}'u\,\mathrm{snc}'u),$$

$$4.\quad \log\sqrt{\frac{\mathfrak{Al}(a+u)}{\mathfrak{Al}(a-u)}}+\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Hl}(a-u)}{\mathfrak{Hl}(a+u)}}=\mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\mathrm{sn}'u\,\mathrm{snc}'u}{\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a}\right),$$

$$5.\quad \log\sqrt{\frac{\mathfrak{Gl}(a+u)}{\mathfrak{Gl}(a-u)}}+\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Hl}(a-u)}{\mathfrak{Hl}(a+u)}}=\mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\mathrm{cnc}'a}{\mathrm{cn}'a}\cdot\frac{\mathrm{cnc}'u}{\mathrm{cn}'u}\right),$$

$$6.\quad \log\sqrt{\frac{\mathfrak{Al}(a+u)}{\mathfrak{Al}(a-u)}}-\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Gl}(a+u)}{\mathfrak{Gl}(a-u)}}=\mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\mathrm{snc}'a}{\mathrm{sn}'a}\cdot\frac{\mathrm{sn}'u}{\mathrm{snc}'u}\right).$$

Setzt man in den Gleichungen (3. §. 170.) noch $u\pm a$ statt u, und nimmt auf beiden Seiten die Logarithmen, so erhält man die Gleichungen

$$7.\quad \log\sqrt{\frac{\mathfrak{Al}(K-u+a)}{\mathfrak{Al}(K-u-a)}}=\eta a+\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Hl}(u-a)}{\mathfrak{Hl}(u+a)}},$$

$$8.\quad -\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Hl}(K-u-a)}{\mathfrak{Hl}(K-u+a)}}=\eta a-\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Al}(u+a)}{\mathfrak{Al}(u-a)}},$$

$$9.\quad \log\sqrt{\frac{\mathfrak{Bl}(K-u+a)}{\mathfrak{Bl}(K-u-a)}}=\eta a-\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Gl}(u+a)}{\mathfrak{Gl}(u-a)}},$$

$$10.\quad \log\sqrt{\frac{\mathfrak{Gl}(K-u+a)}{\mathfrak{Gl}(K-u-a)}}=\eta a-\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Bl}(u+a)}{\mathfrak{Bl}(u-a)}}.$$

Aus den Formeln (2. §. 185.) folgt

$$11.\quad \log\sqrt{\frac{\mathfrak{Bl}(a+u)}{\mathfrak{Bl}(a-u)}}=\frac{\pi a u}{2KK'}+\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Hl}'(ai+ui)}{\mathfrak{Hl}'(ai-ui)}},$$

$$12.\quad \log\sqrt{\frac{\mathfrak{Al}(a+u)}{\mathfrak{Al}(a-u)}}=\frac{\pi a u}{2KK'}+\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Al}'(ai+ui)}{\mathfrak{Al}'(ai-ui)}},$$

$$13.\quad \log\sqrt{\frac{\mathfrak{Hl}(a+u)}{\mathfrak{Hl}(a-u)}}=\frac{\pi a u}{2KK'}+\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Bl}'(ai+ui)}{\mathfrak{Bl}'(ai-ui)}},$$

$$14.\quad \log\sqrt{\frac{\mathfrak{Gl}(a+u)}{\mathfrak{Gl}(a-u)}}=\frac{\pi a u}{2KK'}+\log\sqrt{\frac{\mathfrak{Gl}'(ai+ui)}{\mathfrak{Gl}'(ai-ui)}}.$$

§. 206.

Die bequemsten Ausdrücke der Modular-Integrale der ersten und dritten Classe, welche rasch convergiren, wenn ihr Modul $k<\sin\frac{1}{4}\pi$ ist.

Da

$$'\mathfrak{S}'(ui,a)=-iS(u,a),\quad '\mathfrak{C}'(ui,a)=i.\,C(u,a),\quad '\mathfrak{D}'(ui,a)=i.\,D(u,a),$$

und auch eben so

$$\mathfrak{S}'(ui,a)=-i'S(u,a),\quad \mathfrak{C}'(ui,a)=i.'C(u,a),\quad \mathfrak{D}'(ui,a)=i.'D(u,a)$$

ist, so verwandeln sich die Formeln (2. und 4. §. 203.) und die Formeln (4. 5. 6. und 8. §. 202.), wenn wir der Kürze wegen

$$1.\quad\begin{cases}\frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\mathfrak{H}\mathfrak{l}(a-ui)}{\mathfrak{H}\mathfrak{l}(a+ui)}}=\mathrm{H}(u,a),\\ \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{l}(a+ui)}{\mathfrak{A}\mathfrak{l}(a-ui)}}=\mathrm{A}(u,a),\\ \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\mathfrak{B}\mathfrak{l}(a+ui)}{\mathfrak{B}\mathfrak{l}(a-ui)}}=\mathrm{B}(u,a),\\ \frac{1}{i}\log\sqrt{\frac{\mathfrak{G}\mathfrak{l}(a+ui)}{\mathfrak{G}\mathfrak{l}(a-ui)}}=\mathrm{G}(u,a),\end{cases}$$

setzen, in die folgenden:

$$2.\quad\begin{cases}\mathrm{S}(u,a)=-\mathrm{H}(u,a)+u.\mathfrak{H}(a) & \text{und}\quad '\mathrm{S}(u,a)=\mathrm{B}(u,a)-u.\mathfrak{B}(a),\\ \mathrm{C}(u,a)=\mathrm{H}(u,a)+u.\mathfrak{G}(a) & -\ -\quad '\mathrm{C}(u,a)=\mathrm{B}(u,a)-u.\mathfrak{G}(a),\\ \mathrm{D}(u,a)=\mathrm{H}(u,a)+u.\mathfrak{B}(a) & -\ -\quad '\mathrm{D}(u,a)=\mathrm{B}(u,a)+u.\mathfrak{H}(a),\\ \mathrm{S}(u,K'-a)=-\mathrm{A}(u,a)+u.\mathfrak{A}(a) & -\ -\quad '\mathrm{S}(u,K'-a)=-\mathrm{G}(u,a)+u.\mathfrak{G}(a),\\ \mathrm{C}(u,K'-a)=\mathrm{A}(u,a)-u.\mathfrak{B}(a) & -\ -\quad '\mathrm{C}(u,K'-a)=-\mathrm{G}(u,a)+u.\mathfrak{B}(a),\\ \mathrm{D}(u,K'-a)=\mathrm{A}(u,a)-u.\mathfrak{G}(a) & -\ -\quad '\mathrm{D}(u,K'-a)=-\mathrm{G}(u,a)+u.\mathfrak{A}(a).\end{cases}$$

Bezeichnen wir nun der Kürze wegen durch $[X]$ den cyklischen Arcus, dessen (trigonometrische) Tangente die von den eckigen Klammern eingeschlossene Gröfse X ist, so werden die cyklischen Arcus $\mathrm{H}(u,a)$, $\mathrm{A}(u,a)$, $\mathrm{B}(u,a)$ und $\mathrm{G}(u,a)$, welche in den vorstehenden zwölf Formeln vorkommen, am bequemsten nach den folgenden Doppelreihen berechnet, welche man, dem §. 204. gemäfs, findet, wenn man in den dortigen Reihen (3. 5. 7. 9.) ui statt u setzt, und den dadurch entstehenden Factor i wegwirft:

$$3.\quad \mathrm{A}(u,a)=[\operatorname{tng}\eta u\,\mathfrak{Cot}\,\eta a]$$
$$+[\operatorname{tng}\eta u\,\mathfrak{Cot}(2\eta K'+\eta a)]+[\operatorname{tng}\eta u\,\mathfrak{Cot}(4\eta K'+\eta a)]+[\operatorname{tng}\eta u\,\mathfrak{Cot}(6\eta K'+\eta a)]+\ldots.$$
$$-[\operatorname{tng}\eta u\,\mathfrak{Cot}(2\eta K'-\eta a)]-[\operatorname{tng}\eta u\,\mathfrak{Cot}(4\eta K'-\eta a)]-[\operatorname{tng}\eta u\,\mathfrak{Cot}(6\eta K'-\eta a)]-\ldots.$$

$$4.\quad \mathrm{B}(u,a)=[\operatorname{tng}\eta u.\mathfrak{Tang}\,\eta a]$$
$$+[\operatorname{tng}\eta u\,\mathfrak{Tang}(2\eta K'+\eta a)]+[\operatorname{tng}\eta u\,\mathfrak{Tang}(4\eta K'+\eta a)]+[\operatorname{tng}\eta u\,\mathfrak{Tang}(6\eta K'+\eta a)]+\ldots.$$
$$-[\operatorname{tng}\eta u\,\mathfrak{Tang}(2\eta K'-\eta a)]-[\operatorname{tng}\eta u\,\mathfrak{Tang}(4\eta K'-\eta a)]-[\operatorname{tng}\eta u\,\mathfrak{Tang}(6\eta K'-\eta a)]-\ldots.$$

$$5.\quad \mathrm{G}(u,a)=$$
$$[\operatorname{tng}\eta u\,\mathfrak{Tang}(\eta K'+\eta a)]+[\operatorname{tng}\eta u\,\mathfrak{Tang}(3\eta K'+\eta a)]+[\operatorname{tng}\eta u\,\mathfrak{Tang}(5\eta K'+\eta a)]+\ldots.$$
$$-[\operatorname{tng}\eta u\,\mathfrak{Tang}(\eta K'-\eta a)]+[\operatorname{tng}\eta u\,\mathfrak{Tang}(3\eta K'-\eta a)]-[\operatorname{tng}\eta u\,\mathfrak{Tang}(5\eta K'-\eta a)]-\ldots.$$

$$6.\quad \mathrm{H}(u,a)=$$
$$[\operatorname{tng}\eta u\,\mathfrak{Cot}(\eta K'-\eta a)]+[\operatorname{tng}\eta u\,\mathfrak{Cot}(3\eta K'-\eta a)]+[\operatorname{tng}\eta u\,\mathfrak{Cot}(5\eta K'-\eta a)]+\ldots.$$
$$-[\operatorname{tng}\eta u\,\mathfrak{Cot}(\eta K'+\eta a)]-[\operatorname{tng}\eta u\,\mathfrak{Cot}(3\eta K'+\eta a)]-[\operatorname{tng}\eta u\,\mathfrak{Cot}(5\eta K'+\eta a)]-\ldots.$$

Jedes Glied in diesen vier Reihen ist also ein cyklischer Arcus, dessen Tangente das jedesmal von eckigen Klammern umschlossene Product ist.

Mit Beziehung auf die vorstehenden Formeln haben wir nun dem Zusatze 2. zu §. 201. gemäſs

$$7.\quad \mathbf{S}(u,a) = -\mathbf{H}(u,a)$$
$$+\eta u\,\mathfrak{Cot}(\eta K'-\eta a)+\eta u\,\mathfrak{Cot}(3\eta K'-\eta a)+\eta u\,\mathfrak{Cot}(5\eta K'-\eta a)+\ldots.$$
$$-\eta u\,\mathfrak{Cot}(\eta K'+\eta a)-\eta u\,\mathfrak{Cot}(3\eta K'+\eta a)-\eta u\,\mathfrak{Cot}(5\eta K'+\eta a)-\ldots.$$

$$8.\quad \mathbf{C}(u,a) = \mathbf{H}(u,a)$$
$$+\eta u\,\mathfrak{Tang}(\eta K'+\eta a)+\eta u\,\mathfrak{Tang}(3\eta K'+\eta a)+\eta u\,\mathfrak{Tang}(5\eta K'+\eta a)+\ldots.$$
$$-\eta u\,\mathfrak{Tang}(\eta K'-\eta a)-\eta u\,\mathfrak{Tang}(3\eta K'-\eta a)-\eta u\,\mathfrak{Tang}(5\eta K'-\eta a)-\ldots.$$

$$9.\quad \mathbf{D}(u,a) = \mathbf{H}(u,a)+\eta u\,\mathfrak{Tang}\,\eta a$$
$$+\eta u\,\mathfrak{Tang}(2\eta K'+\eta a)+\eta u\,\mathfrak{Tang}(4\eta K'+\eta a)+\eta u\,\mathfrak{Tang}(5\eta K'+\eta a)+\ldots.$$
$$-\eta u\,\mathfrak{Tang}(2\eta K'-\eta a)-\eta u\,\mathfrak{Tang}(3\eta K'-\eta a)-\eta u\,\mathfrak{Tang}(5\eta K'-\eta a)-\ldots.$$

$$10.\quad {}'\mathbf{S}(u,a) = \mathbf{B}(u,a)-\eta u\,\mathfrak{Tang}\,\eta a$$
$$-\eta u\,\mathfrak{Tang}(2\eta K'+\eta a)-\eta u\,\mathfrak{Tang}(4\eta K'+\eta a)-\eta u\,\mathfrak{Tang}(6\eta K'+\eta a)-\ldots.$$
$$+\eta u\,\mathfrak{Tang}(2\eta K'-\eta a)+\eta u\,\mathfrak{Tang}(4\eta K'-\eta a)+\eta u\,\mathfrak{Tang}(6\eta K'-\eta a)+\ldots.$$

$$11.\quad {}'\mathbf{C}(u,a) = \mathbf{B}(u,a)$$
$$-\eta u\,\mathfrak{Tang}(\eta K'+\eta a)-\eta u\,\mathfrak{Tang}(3\eta K'+\eta a)-\eta u\,\mathfrak{Tang}(5\eta K'+\eta a)-\ldots.$$
$$+\eta u\,\mathfrak{Tang}(\eta K'-\eta a)+\eta u\,\mathfrak{Tang}(3\eta K'-\eta a)+\eta u\,\mathfrak{Tang}(5\eta K'-\eta a)+\ldots.$$

$$12.\quad {}'\mathbf{D}(u,a) = \mathbf{B}(u,a)$$
$$+\eta u\,\mathfrak{Cot}(\eta K'-\eta a)+\eta u\,\mathfrak{Cot}(3\eta K'-\eta a)+\eta u\,\mathfrak{Cot}(5\eta K'-\eta a)+\ldots.$$
$$-\eta u\,\mathfrak{Cot}(\eta K'+\eta a)-\eta u\,\mathfrak{Cot}(3\eta K'+\eta a)-\eta u\,\mathfrak{Cot}(5\eta K'+\eta a)-\ldots.$$

$$13.\quad S(u,K'-a) = -\mathbf{A}(u,a)+\eta u\,\mathfrak{Cot}\,\eta a$$
$$+\eta u\,\mathfrak{Cot}(2\eta K'+\eta a)+\eta u\,\mathfrak{Cot}(4\eta K'+\eta a)+\eta u\,\mathfrak{Cot}(6\eta K'+\eta a)+\ldots.$$
$$-\eta u\,\mathfrak{Cot}(2\eta K'-\eta a)-\eta u\,\mathfrak{Cot}(4\eta K'-\eta a)-\eta u\,\mathfrak{Cot}(6\eta K'-\eta a)-\ldots.$$

$$14.\quad \mathbf{C}(u,K'-a) = \mathbf{A}(u,a)-\eta u\,\mathfrak{Tang}\,\eta a$$
$$-\eta u\,\mathfrak{Tang}(2\eta K'+\eta a)-\eta u\,\mathfrak{Tang}(4\eta K'+\eta a)-\eta u\,\mathfrak{Tang}(6\eta K'+\eta a)-\ldots.$$
$$+\eta u\,\mathfrak{Tang}(2\eta K'-\eta a)+\eta u\,\mathfrak{Tang}(4\eta K'-\eta a)+\eta u\,\mathfrak{Tang}(6\eta K'-\eta a)+\ldots.$$

$$15.\quad \mathbf{D}(u,K'-a) = \mathbf{A}(u,a)$$
$$-\eta u\,\mathfrak{Tang}(\eta K'+\eta a)-\eta u\,\mathfrak{Tang}(3\eta K'+\eta a)-\eta u\,\mathfrak{Tang}(5\eta K'+\eta a)-\ldots.$$
$$+\eta u\,\mathfrak{Tang}(\eta K'-\eta a)+\eta u\,\mathfrak{Tang}(3\eta K'-\eta a)+\eta u\,\mathfrak{Tang}(5\eta K'-\eta a)+\ldots.$$

$$16.\quad {}'\mathbf{S}(u,K'-a) = -\mathbf{G}(u,a)$$
$$+\eta u\,\mathfrak{Tang}(\eta K'+\eta a)+\eta u\,\mathfrak{Tang}(3\eta K'+\eta a)+\eta u\,\mathfrak{Tang}(5\eta K'+\eta a)+\ldots.$$
$$-\eta u\,\mathfrak{Tang}(\eta K'-\eta a)-\eta u\,\mathfrak{Tang}(3\eta K'-\eta a)-\eta u\,\mathfrak{Tang}(5\eta K'-\eta a)-\ldots.$$

17. $'\mathrm{C}(u, K'-a) = -\mathrm{G}(u, a) + \eta u\,\mathfrak{Tang}\,\eta a$
$+ \eta u\,\mathfrak{Tang}(2\eta K' + \eta a) + \eta u\,\mathfrak{Tang}(4\eta K' + \eta a) + \eta u\,\mathfrak{Tang}(6\eta K' + \eta a) + \ldots$
$- \eta u\,\mathfrak{Tang}(2\eta K' - \eta a) - \eta u\,\mathfrak{Tang}(4\eta K' - \eta a) - \eta u\,\mathfrak{Tang}(6\eta K' - \eta a) - \ldots$

18. $'\mathrm{D}(u, K'-a) = -\mathrm{G}(u, a) + \eta u\,\mathfrak{Cot}\,\eta a$
$+ \eta u\,\mathfrak{Cot}(2\eta K' + \eta a) + \eta u\,\mathfrak{Cot}(4\eta K' + \eta a) + \eta u\,\mathfrak{Cot}(6\eta K' + \eta a) + \ldots$
$- \eta u\,\mathfrak{Cot}(2\eta K' - \eta a) - \eta u\,\mathfrak{Cot}(4\eta K' - \eta a) - \eta u\,\mathfrak{Cot}(6\eta K' - \eta a) - \ldots$

Setzt man in den vorstehenden Formeln $u = K$, so wird $\eta u = \frac{1}{2}\pi$. Ferner ist

19. $\mathrm{A}(K, a) = \frac{1}{2}\pi, \quad \mathrm{B}(K, a) = \frac{1}{2}\pi, \quad \mathrm{G}(K, a) = 0, \quad \mathrm{H}(K, a) = 0.$

Auch hat man

$$20. \quad \begin{cases} \mathrm{A}(K-u, a) + \mathrm{B}(u, a) = \mathrm{A}(u, a) + \mathrm{B}(K-u, a) = \frac{1}{2}\pi, \\ \mathrm{G}(K-u, a) = \mathrm{H}(u, a) \text{ und} \\ \mathrm{H}(K-u, a) = \mathrm{G}(u, a). \end{cases}$$

Setzt man in den Formeln (1 — 6. §. 205.) ebenfalls ui statt u und dividirt durch i, so erhält man

$$21. \quad \begin{cases} \mathrm{A}(u, a) - \mathrm{B}(u, a) = \operatorname{arc\,tng}\left(\frac{\mathrm{dn}' a}{\mathrm{tn}' a} \cdot \mathrm{sn}\, u\, \mathrm{snc}\, u\right), \\ \mathrm{B}(u, a) + \mathrm{H}(u, a) = \operatorname{arc\,tng}\left(\frac{\mathrm{sn}' a}{\mathrm{snc}' a} \cdot \frac{\mathrm{sn}\, u}{\mathrm{snc}\, u}\right), \\ \mathrm{B}(u, a) - \mathrm{G}(u, a) = \operatorname{arc\,tng}\left(\mathrm{sn}' a\, \mathrm{snc}' a \cdot \frac{\mathrm{dnc}\, u}{\mathrm{tnc}\, u}\right) = \operatorname{arc\,tng}\left(k'^2\, \mathrm{sn}' a\, \mathrm{snc}' a \cdot \frac{\mathrm{tn}\, u}{\mathrm{dn}\, u}\right), \\ \mathrm{A}(u, a) + \mathrm{H}(u, a) = \operatorname{arc\,tng}\left(\frac{1}{\mathrm{sn}' a\, \mathrm{snc}' a} \cdot \frac{\mathrm{tn}\, u}{\mathrm{dn}\, u}\right), \\ \mathrm{G}(u, a) + \mathrm{H}(u, a) = \operatorname{arc\,tng}\left(k \cdot \frac{\mathrm{cnc}' a}{\mathrm{cn}' a} \cdot \mathrm{sn}\, u\, \mathrm{snc}\, u\right), \\ \mathrm{A}(u, a) - \mathrm{G}(u, a) = \operatorname{arc\,tng}\left(\frac{\mathrm{snc}' a}{\mathrm{sn}' a} \cdot \frac{\mathrm{sn}\, u}{\mathrm{snc}\, u}\right). \end{cases}$$

Zugleich wird man sich erinnern, dafs nach dem Zusatze (1) zu §. 200. und nach den Formeln (7 — 10. §. 205.) ist:

$$22. \quad \begin{cases} \mathfrak{A}(a) - \mathfrak{B}(a) = \frac{\mathrm{dn}' a}{\mathrm{tn}' a} = \frac{k\, \mathrm{cn}' a}{\mathrm{cnc}' a}, \\ \mathfrak{B}(a) + \mathfrak{H}(a) = \frac{\mathrm{sn}' a}{\mathrm{snc}' a}, \\ \mathfrak{B}(a) - \mathfrak{G}(a) = k'^2\, \mathrm{sn}' a\, \mathrm{snc}' a, \\ \mathfrak{A}(a) + \mathfrak{H}(a) = \frac{1}{\mathrm{sn}' a\, \mathrm{snc}' a}, \\ \mathfrak{G}(a) + \mathfrak{H}(a) = k \cdot \frac{\mathrm{cnc}' a}{\mathrm{cn}' a}, \\ \mathfrak{A}(a) - \mathfrak{G}(a) = \frac{\mathrm{snc}' a}{\mathrm{sn}' a}, \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{aligned} \mathfrak{A}(K'-a) &= \eta + \mathfrak{H}(a), \\ \mathfrak{H}(K'-a) &= -\eta + \mathfrak{A}(a), \\ \mathfrak{B}(K'-a) &= \eta - \mathfrak{G}(a), \\ \mathfrak{G}(K'-a) &= \eta - \mathfrak{B}(a), \\ \mathrm{A}(u, K'-a) &= \eta u + \mathrm{H}(u, a), \\ \mathrm{H}(u, K'-a) &= -\eta u + \mathrm{A}(u, a), \\ \mathrm{B}(u, K'-a) &= \eta u - \mathrm{G}(u, a), \\ \mathrm{G}(u, K'-a) &= \eta u - \mathrm{B}(u, a). \end{aligned}$$

Zusatz 1. Die Function $G(u, a)$ ist $= 0$ statt $u = 0$ und $u = K$; daher giebt es einen Werth von u zwischen den Grenzen $u = 0$ und $u = K$, für welchen die Function $G(u, a)$ ein Maximum ist, und dasselbe gilt von der Function $H(u, a)$. Für den Werth u, zu welchem das Maximum gehört, mufs $\frac{dH(u, a)}{du} = 0$ sein. Benutzen wir diese Gleichung und differenziiren die Gleichung $S(u, a) = -H(u, a) + u . \mathfrak{H}(a)$, so erhalten wir zur Bestimmung von u die Gleichung

$$\mathfrak{H}(a) = \frac{dS(u, a)}{du} = \frac{k^2 \operatorname{tn}' a \operatorname{dn}' a \operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{cn}'^2 a (1 + k^2 \operatorname{tn}'^2 a \operatorname{sn}^2 u)}$$

oder

$$\mathfrak{H}(a) = \frac{1}{\operatorname{sn}' a \operatorname{snc}' a} - \frac{1}{\operatorname{sn}' a \operatorname{snc}' a (1 + k^2 \operatorname{tn}'^2 a \operatorname{sn}^2 u)},$$

und hieraus folgt durch Auflösung

$$\operatorname{sn}^2 u = \operatorname{tnc}'^2 a \left(\frac{\mathfrak{H}(a)}{\frac{1}{\operatorname{sn}' a \operatorname{snc}' a} - \mathfrak{H}(a)} \right),$$

welche Gleichung sich, da $\frac{1}{\operatorname{sn}' a \operatorname{snc}' a} - \mathfrak{H}(a) = \mathfrak{A}(a)$ ist, auf

$$1. \quad \operatorname{sn} u = \operatorname{tnc}' a \sqrt{\frac{\mathfrak{H}(a)}{\mathfrak{A}(a)}}$$

reducirt. Hieraus folgt $\operatorname{cn} u = \frac{1}{\operatorname{cnc}' a} \sqrt{\frac{\operatorname{cnc}'^2 a . \mathfrak{A}(a) - \operatorname{snc}'^2 a . \mathfrak{H}(a)}{\mathfrak{A}(a)}}$, oder, den Formeln (19.) im Zusatze zu §. 200. gemäfs,

$$2. \quad \operatorname{cn} u = \frac{1}{\operatorname{cnc}' a} . \sqrt{\frac{\mathfrak{G}(a)}{\mathfrak{A}(a)}}, \text{ also}$$

$$3. \quad \operatorname{tn} u = \operatorname{snc}' a . \sqrt{\frac{\mathfrak{H}(a)}{\mathfrak{G}(a)}}.$$

Da der Formel (1.) gemäfs

$$k \operatorname{sn} u = \frac{\operatorname{cn}' a}{\operatorname{sn}' a} \sqrt{\frac{\mathfrak{H}(a)}{\mathfrak{A}(a)}}, \text{ also } \operatorname{dn} u = \frac{1}{\operatorname{sn}' a} \sqrt{\frac{\operatorname{sn}'^2 a \mathfrak{A}(a) - \operatorname{cn}'^2 \mathfrak{H}(a)}{\mathfrak{A}(a)}}$$

ist, so ist

$$4. \quad \operatorname{dn} u = \frac{1}{\operatorname{sn}' a} \sqrt{\frac{\mathfrak{B}(a)}{\mathfrak{A}(a)}}, \text{ also}$$

$$5. \quad \operatorname{snc} u = \frac{1}{\operatorname{dnc}' a} \sqrt{\frac{\mathfrak{G}(a)}{\mathfrak{B}(a)}},$$

$$6. \quad \operatorname{cnc} u = \frac{k'}{k} \operatorname{cn}' a \sqrt{\frac{\mathfrak{H}(a)}{\mathfrak{B}(a)}}.$$

Für den durch die Formeln (1 — 6.) bestimmten Werth von u ist $H(u, a)$ ein Maximum; nimmt man aber das Complement $K - u$ statt u, so ist für diesen Werth $G(u, a)$ ein Maximum.

Zusatz 2. Die Formeln im Zusatze zu §. 202. und §. 203. geben nun

$$\mathrm{S}(u, \tfrac{1}{2}K') = \tfrac{1}{2}(1+k).u - \tfrac{1}{2}\operatorname{arctng}\Big((1+k).\frac{\operatorname{tn} u}{\operatorname{dn} u}\Big),$$

$$\mathrm{C}(u, \tfrac{1}{2}K') = -\tfrac{1}{2}(1-k).u + \tfrac{1}{2}\operatorname{arctng}\Big((1+k).\frac{\operatorname{tn} u}{\operatorname{dn} u}\Big),$$

$$\mathrm{D}(u, \tfrac{1}{2}K') = \tfrac{1}{2}(1-k).u + \tfrac{1}{2}\operatorname{arctng}\Big((1+k).\frac{\operatorname{tn} u}{\operatorname{dn} u}\Big),$$

$$\mathrm{S}(\tfrac{1}{2}K, a) = \tfrac{1}{2}K.\mathfrak{H}(a) - \tfrac{1}{2}\operatorname{arctng}\Big((1-k').\frac{\operatorname{tn}' a}{\operatorname{dn}' a}\Big),$$

$$\mathrm{C}(\tfrac{1}{2}K, a) = \tfrac{1}{2}K.\mathfrak{G}(a) + \tfrac{1}{2}\operatorname{arctng}\Big((1-k').\frac{\operatorname{tn}' a}{\operatorname{dn}' a}\Big),$$

$$\mathrm{D}(\tfrac{1}{2}K, a) = \tfrac{1}{2}K.\mathfrak{B}(a) + \tfrac{1}{2}\operatorname{arctng}\Big((1-k').\frac{\operatorname{tn}' a}{\operatorname{dn}' a}\Big).$$

Ferner ist

$$'\mathrm{S}(u, \tfrac{1}{2}K') = -\tfrac{1}{2}(1-k).u + \tfrac{1}{2}\operatorname{arctng}\Big((1-k).\frac{\operatorname{tn} u}{\operatorname{dn} u}\Big),$$

$$'\mathrm{C}(u, \tfrac{1}{2}K') = \tfrac{1}{2}(1-k).u + \tfrac{1}{2}\operatorname{arctng}\Big((1-k).\frac{\operatorname{tn} u}{\operatorname{dn} u}\Big),$$

$$'\mathrm{D}(u, \tfrac{1}{2}K') = \tfrac{1}{2}(1+k).u + \tfrac{1}{2}\operatorname{arctng}\Big((1-k).\frac{\operatorname{tn} u}{\operatorname{dn} u}\Big),$$

$$'\mathrm{S}(\tfrac{1}{2}K, a) = -\tfrac{1}{2}K.\mathfrak{B}(a) + \tfrac{1}{2}\operatorname{arctng}\Big((1+k').\frac{\operatorname{tn}' a}{\operatorname{dn}' a}\Big),$$

$$'\mathrm{C}(\tfrac{1}{2}K, a) = -\tfrac{1}{2}K.\mathfrak{G}(a) + \tfrac{1}{2}\operatorname{arctng}\Big((1+k').\frac{\operatorname{tn}' a}{\operatorname{dn}' a}\Big),$$

$$'\mathrm{D}(\tfrac{1}{2}K, a) = \tfrac{1}{2}K.\mathfrak{H}(a) + \tfrac{1}{2}\operatorname{arctng}\Big((1+k').\frac{\operatorname{tn}' a}{\operatorname{dn}' a}\Big).$$

§. 207.

Die bequemsten Ausdrücke der Modular-Integrale der ersten und dritten Classe, welche rasch convergiren, wenn ihr Modul $k > \sin\frac{1}{4}\pi$ ist.

Da

$$\mathfrak{S}(u, ai) = i.\,\mathrm{S}(u, a), \quad \mathfrak{C}(u, ai) = i.\,\mathrm{C}(u, a), \quad \mathfrak{D}(u, ai) = i.\,\mathrm{D}(u, a),$$

und eben so

$$'\mathfrak{S}(u, ai) = i.'\mathrm{S}(u, a), \quad '\mathfrak{C}(u, ai) = i.'\mathrm{C}(u, a), \quad '\mathfrak{D}(u, ai) = i.'\mathrm{D}(u, a)$$

ist, so verwandeln sich die Formeln (4. 5. 6. §. 202.) und die Formeln (2. §. 203.), wenn man zur Abkürzung

$$1.\ \begin{cases} \dfrac{1}{i}\log\sqrt{\dfrac{\mathfrak{B}l'(u+ai)}{\mathfrak{B}l'(u-ai)}} = \mathrm{B}'(a, u) \quad \text{und} \quad \dfrac{1}{i}\log\sqrt{\dfrac{\mathfrak{A}l'(u+ai)}{\mathfrak{A}l'(u-ai)}} = \mathrm{A}'(a, u), \\ \dfrac{1}{i}\log\sqrt{\dfrac{\mathfrak{H}l'(u-ai)}{\mathfrak{H}l'(u+ai)}} = \mathrm{H}'(a, u) \quad - - \quad \dfrac{1}{i}\log\sqrt{\dfrac{\mathfrak{G}l'(u+ai)}{\mathfrak{G}l'(u-ai)}} = \mathrm{G}'(a, u) \end{cases}$$

setzt, in die folgenden:

$$2.\quad \begin{cases} S(u,a) = u\,.\,B'(a) - B'(a,u), \\ C(u,a) = -u\,.\,G'(a) + B'(a,u), \\ D(u,a) = u\,.\,H'(a) + B'(a,u), \\ {}'S(u,a) = -u\,.\,H'(a) + H'(a,u), \\ {}'C(u,a) = u\,.\,G'(a) + H'(a,u), \\ {}'D(u,a) = u\,.\,B'(a) + H'(a,u). \end{cases}$$

Die Functionen $A'(a,u)$, $B'(a,u)$, $G'(a,u)$ und $H'(a,u)$ sind dieselben mit $A(u,a)$, $B(u,a)$, $G(u,a)$ und $H(u,a)$, wenn man in diesen a mit u vertauscht und statt des Moduls k den conjugirten k' nimmt. Setzt man in den Formeln (7—10. §. 205.) ai statt a, indem man die conjugirten Modul vertauscht und die Gleichungen durch i dividirt, so erhält man

$$3.\quad \begin{cases} A'(a,K-u) = \eta' a + H'(a,u), \\ H'(a,K-u) = -\eta' a + A'(a,u), \\ B'(a,K-u) = \eta' a - G'(a,u), \\ G'(a,K-u) = \eta' a - B'(a,u), \end{cases} \quad \text{auch ist} \quad \begin{aligned} A'(K'-a) &= B'(a), \\ B'(K'-a) &= A(a), \\ G'(K'-a) &= H'(a), \\ H(K'-a) &= G'(a). \end{aligned}$$

Setzt man in den Formeln (2.) noch $K-u$ statt u, so erhält man

$$4.\quad \begin{cases} S(K-u,a) = (K-u)\,.\,B'(a) - \eta' a + G'(a,u), \\ C(K-u,a) = -(K-u)\,.\,G'(a) + \eta' a - G'(a,u), \\ D(K-u,a) = (K-u)\,.\,H'(a) + \eta' a - G'(a,u), \\ {}'S(K-u,a) = -(K-u)\,.\,H'(a) - \eta' a + A'(a,u), \\ {}'C(K-u,a) = (K-u)\,.\,G'(a) - \eta' a + A'(a,u), \\ {}'D(K-u,a) = (K-u)\,.\,B'(a) - \eta' a + A'(a,u). \end{cases}$$

Bezeichnen wir wieder der Kürze wegen durch $[X]$ den cyklischen Arcus, dessen trigonometrische Tangente die gegebene Gröfse X ist, so haben wir

$$\begin{aligned} 5.\quad A'(a,u) = {} & [\operatorname{tng}\eta' a\,\mathfrak{Cot}\,\eta' u] \\ & + [\operatorname{tng}\eta' a.\mathfrak{Cot}(2\eta' K + \eta' u)] + [\operatorname{tng}\eta' a.\mathfrak{Cot}(4\eta' K + \eta' u)] \\ & - [\operatorname{tng}\eta' a.\mathfrak{Cot}(2\eta' K - \eta' u)] - [\operatorname{tng}\eta' a.\mathfrak{Cot}(4\eta' K - \eta' u)] \\ & + [\operatorname{tng}\eta' a.\mathfrak{Cot}(6\eta' K + \eta' u)] + \ldots \\ & - [\operatorname{tng}\eta' a.\mathfrak{Cot}(6\eta' K - \eta' u)] - \ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6.\quad B'(a,u) = {} & [\operatorname{tng}\eta' a.\mathfrak{Tang}\,\eta' u] \\ & + [\operatorname{tng}\eta' a.\mathfrak{Tang}(2\eta' K + \eta' u)] + [\operatorname{tng}\eta' a.\mathfrak{Tang}(4\eta' K + \eta' u)] \\ & - [\operatorname{tng}\eta' a.\mathfrak{Tang}(2\eta' K - \eta' u)] - [\operatorname{tng}\eta' a.\mathfrak{Tang}(4\eta' K - \eta' u)] \\ & + [\operatorname{tng}\eta' a.\mathfrak{Tang}(6\eta' K + \eta' u)] + \ldots \\ & - [\operatorname{tng}\eta' a.\mathfrak{Tang}(6\eta' K + \eta' u)] - \ldots \end{aligned}$$

7. $G'(a,u) =$

$$[\text{tng}\,\eta'a\,\mathfrak{Tang}(\eta'K+\eta'u)] + [\text{tng}\,\eta'a.\mathfrak{Tang}(3\eta'K+\eta'u)]$$
$$-[\text{tng}\,\eta'a\,\mathfrak{Tang}(\eta'K-\eta'u)] - [\text{tng}\,\eta'a.\mathfrak{Tang}(3\eta'K-\eta'u)]$$
$$+[\text{tng}\,\eta'a.\mathfrak{Tang}(5\eta'K+\eta'u)] + \ldots.$$
$$-[\text{tng}\,\eta'a.\mathfrak{Tang}(5\eta'K-\eta'u)] - \ldots.$$

8. $H'(a,u) =$

$$[\text{tng}\,\eta'a.\mathfrak{Cot}(\eta'K-\eta'u)] + [\text{tng}\,\eta'a.\mathfrak{Cot}(3\eta'K-\eta'u)]$$
$$-[\text{tng}\,\eta'a.\mathfrak{Cot}(\eta'K+\eta'u)] - [\text{tng}\,\eta'a.\mathfrak{Cot}(3\eta'K+\eta'u)]$$
$$+[\text{tng}\,\eta'a.\mathfrak{Cot}(5\eta'K-\eta'u)] + \ldots.$$
$$-[\text{tng}\,\eta'a.\mathfrak{Cot}(5\eta'K+\eta'u)] - \ldots.$$

Hiernach ist also

$$9.\quad\begin{cases} A'(a,0)=\tfrac{1}{2}\pi,\ B'(a,0)=0,\quad G'(a,0)=0,\quad H'(a,0)=0,\\ A'(a,K)=\eta'a,\ B'(a,K)=\eta'a,\ G'(a,K)=\eta'a,\ H'(a,K)=\tfrac{1}{2}\pi-\eta'a,\\ \tfrac{1}{2}\pi-A'(K'-a,u)=B'(a,u),\qquad B'(K'-a,u)=\tfrac{1}{2}\pi-A'(a,u),\\ \qquad G'(K'-a,u)=H'(a,u)\ \text{und}\ H'(K'-a,u)=G'(a,u).\end{cases}$$

Wird in den Formeln (2) das Argument $u=K$, oder in den Formeln (4) das Argument $u=0$ gesetzt, so erhält man

$$10.\quad\begin{cases} S(K,a) = \quad K.B'(a)-\eta'a,\\ C(K,a) = -K.G'(a)+\eta'a,\\ D(K,a) = \quad K.H'(a)+\eta'a,\\ {}'S(K,a) = -K.H'(a)+\tfrac{1}{2}\pi-\eta'a,\\ {}'C(K,a) = \quad K.G'(a)+\tfrac{1}{2}\pi-\eta'a,\\ {}'D(K,a) = \quad K.B'(a)+\tfrac{1}{2}\pi-\eta'a.\end{cases}$$

Subtrahirt man hiervon die Formeln (4), so erhält man noch

$$11.\quad\begin{cases} S(K,a)-S(K-u,a) = \quad u.B'(a)-G'(a,u),\\ C(K,a)-C(K-u,a) = -u.G'(a)+G'(a,u),\\ D(K,a)-D(K-u,a) = \quad u.H'(a)+G'(a,u),\\ {}'S(K,a)-{}'S(K-u,a) = -u.H'(a)+\tfrac{1}{2}\pi-A'(a,u),\\ {}'C(K,a)-{}'C(K-u,a) = \quad u.G'(a)+\tfrac{1}{2}\pi-A'(a,u),\\ {}'D(K,a)-{}'D(K-u,a) = \quad u.B'(a)+\tfrac{1}{2}\pi-A'(a,u).\end{cases}$$

Mit Beziehung auf die Formeln (5. 6. 7. 8.) erhalten wir nun die folgenden zur Berechnung der Modular-Integrale der ersten und dritten Classe bequemsten Formeln.

12.
$$\begin{cases}
S(u,a) = -B'(a,u) + \eta' u \tang \eta' a + \frac{2\eta' u . p^2 \sin 2\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 2\eta' K} - \frac{2\eta' u . p^4 \sin 4\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 4\eta' K} \\
\qquad + \frac{2\eta' u . p^6 \sin 6\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 4\eta' K} - \frac{2\eta' u . p^8 \sin 8\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 8\eta' K} + - \dots \\
C(u,a) = B'(a,u) - \frac{2\eta' u \sin 2\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 2\eta' K} + \frac{2\eta' u \sin 4\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 4\eta' K} - \frac{2\eta' u \sin 6\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 6\eta' K} + \frac{2\eta' u \sin 8\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 8\eta' K} - + \dots \\
D(u,a) = B'(a,u) + \frac{2\eta' u \sin 2\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 2\eta' K} + \frac{2\eta' u \sin 4\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 4\eta' K} + \frac{2\eta' u \sin 6\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 6\eta' K} + \frac{2\eta' u \sin 8\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 8\eta' K} + + \dots \\
'S(u,a) = H'(a,u) - \frac{2\eta' u \sin 2\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 2\eta' K} - \frac{2\eta' u \sin 4\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 4\eta' K} - \frac{2\eta' u \sin 6\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 6\eta' K} - \frac{2\eta' u \sin 8\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 8\eta' K} - \dots \\
'C(u,a) = H'(a,u) + \frac{2\eta' u \sin 2\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 2\eta' K} - \frac{2\eta' u \sin 4\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 4\eta' K} + \frac{2\eta' u \sin 6\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 6\eta' K} - \frac{2\eta' u \sin 8\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 8\eta' K} + - \dots \\
'D(u,a) = H'(a,u) + \eta' u \operatorname{tng} \eta' a + \frac{2\eta' u . p^2 \sin 2\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 2\eta' K} - \frac{2\eta' u . p^4 \sin 4\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 4\eta' K} \\
\qquad + \frac{2\eta' u . p^6 \sin 6\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 6\eta' K} - \frac{2\eta' u . p^8 \sin 8\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 8\eta' K} + - \dots
\end{cases}$$

in welchen $p = e^{-\eta' K} = e^{-\frac{\pi K}{2K'}}$ ist. Ferner hat man

13.
$$\begin{cases}
S(K,a) = -\eta' a + \eta' K \tang \eta' a + \frac{2\eta' K . p^2 \sin 2\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 2\eta' K} - \frac{2\eta' K . p^4 \sin 4\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 4\eta' K} \\
\qquad + \frac{2\eta' K . p^6 \sin 6\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 6\eta' K} - \frac{2\eta' K . p^8 \sin 8\eta' u}{\mathfrak{Sin}\, 8\eta' K} + - \dots \\
C(K,a) = \eta' a - \frac{2\eta' K \sin 2\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 2\eta' K} + \frac{2\eta' K \sin 4\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 4\eta' K} - \frac{2\eta' K \sin 6\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 6\eta' K} + \frac{2\eta' K \sin 8\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 8\eta' K} - + \dots \\
D(K,a) = \eta' a + \frac{2\eta' K \sin 2\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 2\eta' K} + \frac{2\eta' K \sin 4\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 4\eta' K} + \frac{2\eta' K \sin 6\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 6\eta' K} + \frac{2\eta' K \sin 8\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 8\eta' K} + \dots \\
'S(K,a) = \tfrac{1}{2}\pi - \eta' a - \frac{2\eta' K \sin 2\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 2\eta' K} - \frac{2\eta' K \sin 4\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 4\eta' K} - \frac{2\eta' K \sin 6\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 6\eta' K} - \frac{2\eta' K \sin 8\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 8\eta' K} - \dots \\
'C(K,a) = \tfrac{1}{2}\pi - \eta' a + \frac{2\eta' K \sin 2\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 2\eta' K} - \frac{2\eta' K \sin 4\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 4\eta' K} + \frac{2\eta' K \sin 6\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 6\eta' K} - \frac{2\eta' K \sin 8\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 8\eta' K} + - \dots \\
'D(K,a) = \tfrac{1}{2}\pi - \eta' a + \eta' K \operatorname{tng} \eta' a + \frac{2\eta' K . p^2 \sin 2\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 2\eta' K} - \frac{2\eta' K . p^4 \sin 4\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 4\eta' K} + \frac{2\eta' K . p^6 \sin 6\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 6\eta' K} - + \dots
\end{cases}$$

Die Modular-Integrale des Arguments $K-u$ werden berechnet nach den Formeln

14.
$$\begin{cases}
S(K,a) - S(K-u,a) = \\
-G'(a,u) + \eta' u \operatorname{tng} \eta' a + \frac{2\eta' u p^2 \sin 2\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 2\eta' K} - \frac{2\eta' u p^4 \sin 4\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 4\eta' K} + \frac{2\eta' u p^6 \sin 6\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 6\eta' K} - + \dots \\
C(K,a) - C(K-u,a) = \\
G'(a,u) - \frac{2\eta' u \sin 2\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 2\eta' K} + \frac{2\eta' u \sin 4\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 4\eta' K} - \frac{2\eta' u \sin 6\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 6\eta' K} + \frac{2\eta' u \sin 8\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 8\eta' K} - + \dots \\
D(K,a) - D(K-u,a) = \\
G'(a,u) + \frac{2\eta' u \sin 2\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 2\eta' K} + \frac{2\eta' u \sin 4\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 4\eta' K} + \frac{2\eta' u \sin 6\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 6\eta' K} + \frac{2\eta' u \sin 8\eta' a}{\mathfrak{Sin}\, 8\eta' K} + \dots
\end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{l}
'\mathrm{S}(K,a)-{}'\mathrm{S}(K-u,a)= \\
\frac{1}{2}\pi-\mathrm{A}'(a,u)-\frac{2\eta'u\sin 2\eta'a}{\mathfrak{Sin}\,2\eta'K}-\frac{2\eta'u\sin 4\eta'a}{\mathfrak{Sin}\,4\eta'K}-\frac{2\eta'u\sin 6\eta'a}{\mathfrak{Sin}\,6\eta'K}-\frac{2\eta'u\sin 8\eta'a}{\mathfrak{Sin}\,8\eta'K}-\ldots \\
'\mathrm{C}(K,a)-{}'\mathrm{C}(K-u,a)= \\
\frac{1}{2}\pi-\mathrm{A}'(a,u)+\frac{2\eta'u\sin 2\eta'a}{\mathfrak{Sin}\,2\eta'K}-\frac{2\eta'u\sin 4\eta'a}{\mathfrak{Sin}\,4\eta'K}+\frac{2\eta'u\sin 6\eta'a}{\mathfrak{Sin}\,6\eta'K}-\frac{2\eta'u\sin 8\eta'a}{\mathfrak{Sin}\,8\eta'K}+-\ldots \\
'\mathrm{D}(K,a)-{}'\mathrm{D}(K-u,a)= \\
\frac{1}{2}\pi-\mathrm{A}'(a,u)+\eta'u\,\mathrm{tng}\,\eta'a+\frac{2\eta'u\,p^2\sin 2\eta'a}{\mathfrak{Sin}\,2\eta'K}-\frac{2\eta'u\,p^4\sin 4\eta'a}{\mathfrak{Sin}\,4\eta'K}+\frac{2\eta'u\,p^6\sin 6\eta'a}{\mathfrak{Sin}\,6\eta'K}-+\ldots
\end{array}\right.$$

Vertauscht man in den Formeln (21. §. 206.) a mit u und den Modul k mit k', so erhält man

$$15.\quad\left\{\begin{array}{rcl}
\mathrm{A}'(a,u)-\mathrm{B}'(a,u) &=& \operatorname{arc\,tang}\left(\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a\cdot\frac{\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{tn}\,u}\right)\ \text{oder} \\
\frac{1}{2}\pi-\mathrm{A}'(a,u)+\mathrm{B}'(a,u) &=& \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{1}{\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a}\cdot\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}\right), \\
\mathrm{B}'(a,u)+\mathrm{H}'(a,u) &=& \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{sn}'a}{\mathrm{snc}'a}\cdot\frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{snc}\,u}\right), \\
\mathrm{B}'(a,u)-\mathrm{G}'(a,u) &=& \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{tn}'a}{\mathrm{dn}'a}\cdot k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u\right), \\
\mathrm{A}'(a,u)+\mathrm{H}'(a,u) &=& \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{tn}'a}{\mathrm{dn}'a}\cdot\frac{1}{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u}\right)\ \text{oder} \\
\frac{1}{2}\pi-\mathrm{A}'(a,u)-\mathrm{H}'(a,u) &=& \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{dn}'a}{\mathrm{tn}'a}\cdot\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u\right), \\
\mathrm{G}'(a,u)+\mathrm{H}'(a,u) &=& \operatorname{arc\,tang}\left(\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a\cdot\frac{k'\,\mathrm{cnc}\,u}{\mathrm{cn}\,u}\right), \\
\mathrm{A}'(a,u)-\mathrm{G}'(a,u) &=& \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{sn}'a}{\mathrm{snc}'a}\cdot\frac{\mathrm{snc}\,u}{\mathrm{sn}\,u}\right)\ \text{oder} \\
\frac{1}{2}\pi-\mathrm{A}'(a,u)+\mathrm{G}'(a,u) &=& \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{snc}'a}{\mathrm{sn}'a}\cdot\frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{snc}\,u}\right).
\end{array}\right.$$

Aufserdem ist dem Zusatze zu §. 200. gemäfs

$$16.\quad\left\{\begin{array}{l}
\mathrm{A}'(a)+\mathrm{B}'(a)=\frac{1}{\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a}, \\
\mathrm{B}'(a)+\mathrm{H}'(a)=\frac{\mathrm{sn}'a}{\mathrm{snc}'a}, \\
\mathrm{B}'(a)-\mathrm{G}'(a)=k^2\cdot\frac{\mathrm{tn}'a}{\mathrm{dn}'a}=\frac{k\,\mathrm{cnc}'a}{\mathrm{cn}'a}, \\
\mathrm{A}'(a)-\mathrm{H}'(a)=\frac{\mathrm{dn}'a}{\mathrm{tn}'a}=\frac{k\,\mathrm{cn}'a}{\mathrm{cnc}'a}, \\
\mathrm{G}'(a)+\mathrm{H}(a)=k'^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a, \\
\mathrm{A}'(a)+\mathrm{G}'(a)=\frac{\mathrm{snc}'a}{\mathrm{sn}'a}.
\end{array}\right.$$

Setzt man in den Formeln (11.—14. §. 205.) noch ui für u, und dividirt man die Gleichung durch i, so erhält man

17. $$\begin{cases} \mathrm{B}(u,a) = \frac{\pi a u}{2KK'} + \mathrm{H}'(a,u), & -\mathrm{H}(u,a) = \frac{\pi a u}{2KK'} - \mathrm{B}'(a,u), \\ \mathrm{A}(u,a) = \frac{\pi a u}{2KK'} + \frac{1}{2}\pi - \mathrm{A}'(a,u), & \mathrm{G}(u,a) = \frac{\pi a u}{2KK'} - \mathrm{G}'(a,u), \end{cases}$$

und den Formeln (15. §. 200.) gemäfs ist

18. $$\begin{cases} \mathfrak{A}(a) = \frac{\pi a}{2KK'} + \mathrm{A}'(a), & \mathfrak{G}(a) = \frac{\pi a}{2KK'} - \mathrm{G}'(a), \\ \mathfrak{B}(a) = \frac{\pi a}{2KK'} + \mathrm{H}'(a), & \mathfrak{H}(a) = -\frac{\pi a}{2KK'} + \mathrm{B}'(a), \end{cases}$$

Durch die Formeln (17. und 18.) lassen sich diejenigen §. 206. auf die so eben entwickelten und umgekehrt diese auf jene zurückführen.

Anmerkung. Da, wie die Erfahrung lehrt, die Modular-Integrale der zweiten und vierten Classe, welche von hyperbolischer Art sind, in den Anwendungen (der Mechanik und Geometrie) selten oder vielleicht gar nicht vorkommen, so übergehen wir der Kürze wegen die Zusammenstellung der Reihen, durch welche diese Integrale ausgedrückt werden.

§. 208.

Reihen für die Quadrate der acht Hülfs-Functionen.

Erheben wir die Reihe

$$\frac{\mathfrak{Gl}\,u}{\sqrt{\eta}} = 1 + 2q^2\,\mathfrak{Cos}\,2\eta u + 2q^8\,\mathfrak{Cos}\,4\eta u + 2q^{18}\,\mathfrak{Cos}\,6\eta u + 2q^{32}\,\mathfrak{Cos}\,8\eta u + \ldots.$$

zum Quadrate, und machen wir Gebrauch von der Formel $2\,\mathfrak{Cos}\,a\,\mathfrak{Cos}\,b = \mathfrak{Cos}(a+b) + \mathfrak{Cos}(a-b)$, so erhalten wir eine Reihe von der Form

$$\frac{\mathfrak{Gl}^2 u}{\eta} = a + 2\overset{1}{a}\,\mathfrak{Cos}\,2\eta u + 2\overset{2}{a}\,\mathfrak{Cos}\,4\eta u + 2\overset{3}{a}\,\mathfrak{Cos}\,6\eta u + \ldots,$$

und für das Anfangsglied a die Reihe

$$a = 1 + 2q^4 + 2q^{16} + 2q^{36} + 2q^{64} + 2q^{100} + \ldots,$$

welche leicht summirt werden kann. Setzen wir nämlich in der bekannten Reihe

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1 + 2q^2 + 2q^8 + 2q^{18} + 2q^{32} + 2q^{50} + \ldots$$

q^2 statt q, d. h. statt des Moduls k dem §. 51. gemäfs den nächst kleineren Modul $\lambda = \sqrt{\frac{1-k'}{1+k'}}$, also statt des Quadranten K den kleineren $L = \frac{1+k'}{2}.K$, so verwandelt sich diese Reihe in die Reihe a; daher ist

$$a = \sqrt{\frac{(1+k')K}{\pi}} = \sqrt{\frac{1+k'}{2\eta}} = 1 + 2q^4 + 2q^{16} + 2q^{36} + 2q^{64} + 2q^{100} + \ldots.$$

Die übrigen Coefficienten $\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a}$, etc. werden leichter recurrirend gefunden, wenn man bedenkt, daſs in Anwendung der Bezeichnung $x = e^{\eta u}$, $\mathfrak{Sl}(u+2K') = \frac{x^2}{q^2}.\mathfrak{Sl}\,u$ ist. Setzen wir aber auf ähnliche Art, wie in §. 188., in der Reihe

$$\begin{aligned}\frac{\mathfrak{Sl}^2 u}{\eta} = a + \overset{1}{a}x^2 + \overset{2}{a}x^4 + \overset{3}{a}x^6 + \overset{4}{a}x^8 + \ldots\\ + \overset{1}{a}x^{-2} + \overset{2}{a}x^{-4} + \overset{3}{a}x^{-6} + \overset{4}{a}x^{-8} + \ldots\end{aligned}$$

$u+2K'$ statt u, also $\frac{x}{q^2}$ statt x, so erhalten wir die Gleichung

$$\left\{\begin{aligned}a + \frac{\overset{1}{a}x^2}{q^4} + \frac{\overset{2}{a}x^4}{q^8} + \frac{\overset{3}{a}x^6}{q^{12}} + \frac{\overset{4}{a}x^8}{q^{16}} + \frac{\overset{5}{a}x^{10}}{q^{20}} + \ldots\\ + \overset{1}{a}q^4x^{-2} + \overset{2}{a}q^8x^{-4} + \overset{3}{a}q^{12}x^{-6} + \overset{4}{a}q^{16}x^{-8} + \overset{5}{a}q^{20}x^{-10} + \ldots\end{aligned}\right\} = \frac{x^4}{q^4}.\frac{\mathfrak{Sl}^2 u}{\eta}$$

$$= \left\{\begin{aligned}\frac{\overset{2}{a}}{q^4} + \frac{\overset{1}{a}x^2}{q^4} + \frac{a x^4}{q^4} + \frac{\overset{1}{a}x^6}{q^4} + \frac{\overset{2}{a}x^8}{q^4} + \frac{\overset{3}{a}x^{10}}{q^4} + \ldots\\ + \frac{\overset{3}{a}x^{-2}}{q^4} + \frac{\overset{4}{a}x^{-4}}{q^4} + \frac{\overset{5}{a}x^{-6}}{q^4} + \frac{\overset{6}{a}x^{-8}}{q^4} + \frac{\overset{7}{a}x^{-10}}{q^4} + \ldots\end{aligned}\right\},$$

und wenn wir in ihr die ersten oder auch die zweiten Horizontal-Reihen identificiren, so erhalten wir übereinstimmend die folgenden einfachen Bestimmungen:

$$\overset{1}{a} = \overset{1}{a},\ \overset{2}{a} = a.q^4,\ \overset{3}{a} = \overset{1}{a}.q^8,\ \overset{4}{a} = \overset{2}{a}.q^{12},\ \overset{5}{a} = \overset{3}{a}.q^{16},\ \overset{6}{a} = \overset{4}{a}.q^{20},\ \ldots,$$

welchen gemäſs der Coefficient $\overset{1}{a}$ allein noch unbestimmt bleibt. Setzen wir, was erlaubt ist, $\overset{1}{a} = a\alpha q$, indem wir α als noch unbekannt ansehen, so haben wir

$$\overset{1}{a} = a.\alpha q,\ \overset{2}{a} = a.q^4,\ \overset{3}{a} = a.\alpha q^9,\ \overset{4}{a} = a.q^{16},\ \overset{5}{a} = a.\alpha q^{25},\ \overset{6}{a} = a.q^{36} \text{ u. s. w.}$$

Substituiren wir diese Werthe und setzen $k = \sin\theta$, also $k' = \cos\theta$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{\mathfrak{Sl}^2 u}{\sqrt{\eta}} = \cos\tfrac{1}{2}\theta.(1 + 2\alpha q\, \mathfrak{Cos}\, 2\eta u + 2q^4\, \mathfrak{Cos}\, 4\eta u + 2\alpha q^9\, \mathfrak{Cos}\, 6\eta u\\ + 2q^{16}\, \mathfrak{Cos}\, 8\eta u + 2\alpha q^{25}\, \mathfrak{Cos}\, 10\eta u + \ldots),\end{aligned}$$

und diese Reihe verwandelt sich, wenn $u+iK$ statt u, also $\eta u + \frac{1}{2}\pi i$ statt ηu gesetzt wird, in

$$\begin{aligned}\frac{\mathfrak{Hl}^2 u}{\sqrt{\eta}} = \cos\tfrac{1}{2}\theta(1 - 2\alpha q\, \mathfrak{Cos}\, 2\eta u + 2\eta^4\, \mathfrak{Cos}\, 4\eta u - 2\alpha q^9\, \mathfrak{Cos}\, 6\eta u\\ + 2q^{16}\, \mathfrak{Cos}\, 8\eta u - 2\alpha q^{25}\, \mathfrak{Cos}\, 10\eta u + - \ldots).\end{aligned}$$

Setzt man in der ersten Reihe $K'-u$ statt u, also $\frac{1}{qx}$ statt x, so erhält man

$$\frac{\mathfrak{Gl}^2(K'-u)}{\sqrt{\eta}} = \cos\tfrac{1}{2}\theta\begin{pmatrix}1+\alpha q^3x^2+q^8x^4+\alpha q^{15}x^6+q^{24}x^8+\ldots\\ +\frac{\alpha x^{-2}}{q}+x^{-4}+\alpha q^3x^{-6}+q^8x^{-8}+\ldots\end{pmatrix},$$

und da $\mathfrak{Bl}\,u = x\sqrt{q}.\mathfrak{Gl}(K'-u)$ ist, so verwandelt sich der Ausdruck in

$$\frac{\mathfrak{Bl}^2u}{\sqrt{\eta}} = \cos\tfrac{1}{2}\theta\begin{pmatrix}\alpha+qx^2+\alpha q^4x^4+q^9x^6+\alpha q^{16}x^8+\ldots\\ +qx^{-2}+\alpha q^4x^{-4}+q^9x^{-6}+\alpha q^{16}x^{-8}+\ldots\end{pmatrix}\text{ oder}$$

$$\frac{\mathfrak{Bl}^2u}{\sqrt{\eta}} = \cos\tfrac{1}{2}\theta(\alpha+2q\,\mathfrak{Cos}\,2\eta u+2\alpha q^4\mathfrak{Cos}\,4\eta u+2q^9\mathfrak{Cos}\,6\eta u+2\alpha q^{16}\mathfrak{Cos}\,8\eta u+\ldots).$$

Setzt man hierin noch $u+iK$ statt u, so entsteht

$$\frac{\mathfrak{Al}^2u}{\sqrt{\eta}} = \cos\tfrac{1}{2}\theta(-\alpha+2q\,\mathfrak{Cos}\,2\eta u-2\alpha q^4\mathfrak{Cos}\,4\eta u+2q^9\mathfrak{Cos}\,6\eta u-2\alpha q^{16}\mathfrak{Cos}\,8\eta u+-\ldots).$$

Die noch unbekannte Constante α finden wir leicht, wenn wir drei von den vier Reihen in einer von den Relationen des Zusatzes zu §. 171. substituiren. Da namentlich

$$k.\mathfrak{Hl}^2u+\mathfrak{Al}^2u-k'\mathfrak{Bl}^2u = 0$$

sein soll, so erhalten wir die Reihe

$$0 = (k-\alpha-\alpha k')-2q(\alpha k-1+k')\mathfrak{Cos}\,2\eta u+2q^4(k-\alpha-\alpha k')\mathfrak{Cos}\,4\eta' u+\ldots,$$

in welcher wirklich jedes Glied für sich $=0$ ist, wenn

$$k-\alpha-\alpha k' = 0 \qquad \text{und} \qquad \alpha k-1+k' = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen findet sich aber übereinstimmend, wie zu erwarten war, der Werth $\alpha = \sqrt{\frac{1-k'}{1+k'}}$, welcher sich, weil $k' = \cos\theta$ gesetzt werden soll, auf $\alpha = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta$ reducirt. Setzen wir daher zur Abkürzung

$$1.\quad\begin{cases}\mathfrak{N}(u) = 2q\,\mathfrak{Cos}\,2\eta u+2q^9\,\mathfrak{Cos}\,6\eta u+2q^{25}\mathfrak{Cos}\,10\eta u+2q^{49}\mathfrak{Cos}\,14\eta u+\ldots\\ \mathfrak{M}(u) = 1+2q^4\mathfrak{Cos}\,4\eta u+2q^{16}\mathfrak{Cos}\,8\eta u+2q^{36}\mathfrak{Cos}\,12\eta u+2q^{64}\mathfrak{Cos}\,16\eta u+\ldots\end{cases}$$

so erhalten wir die vier einfachen Formeln

$$2.\quad\begin{cases}\frac{\mathfrak{Al}^2u}{\sqrt{\eta}} = \cos\frac{1}{2}\theta.\mathfrak{N}(u)-\sin\frac{1}{2}\theta.\mathfrak{M}(u),\\ \frac{\mathfrak{Bl}^2u}{\sqrt{\eta}} = \cos\frac{1}{2}\theta.\mathfrak{N}(u)+\sin\frac{1}{2}\theta.\mathfrak{M}(u),\\ \frac{\mathfrak{Gl}^2u}{\sqrt{\eta}} = \cos\frac{1}{2}\theta.\mathfrak{M}(u)+\sin\frac{1}{2}\theta.\mathfrak{N}(u),\\ \frac{\mathfrak{Hl}^2u}{\sqrt{\eta}} = \cos\frac{1}{2}\theta.\mathfrak{M}(u)-\sin\frac{1}{2}\theta.\mathfrak{N}(u).\end{cases}$$

Hiernach sind also die vier hyperbolischen Hülfs-Functionen auf zwei Functionen desselben Arguments zurückgeführt.

Setzt man in den vorstehenden Formeln ui statt u, und zur Abkürzung

$$3.\quad \begin{cases} N(u) = \phantom{1+{}} 2q\cos 2\eta u + 2q^9\cos 6\eta u + 2q^{25}\cos 10\eta u + 2q^{49}\cos 14\eta u + \dots \\ M(u) = 1 + 2q^4\cos 4\eta u + 2q^{16}\cos 8\eta u + 2q^{36}\cos 12\eta u + 2q^{64}\cos 16\eta u + \dots \end{cases}$$

so haben wir für die Quadrate der vier cyklischen Hülfs-Functionen die Ausdrücke

$$4.\quad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{Al}^2 u}{\sqrt{\eta}} = \sin\tfrac{1}{2}\theta . M(u) - \cos\tfrac{1}{2}\theta . N(u), \\ \dfrac{\mathrm{Bl}^2 u}{\sqrt{\eta}} = \sin\tfrac{1}{2}\theta . M(u) + \cos\tfrac{1}{2}\theta . N(u), \\ \dfrac{\mathrm{Gl}^2 u}{\sqrt{\eta}} = \cos\tfrac{1}{2}\theta . M(u) + \sin\tfrac{1}{2}\theta . N(u), \\ \dfrac{\mathrm{Hl}^2 u}{\sqrt{\eta}} = \cos\tfrac{1}{2}\theta . M(u) - \sin\tfrac{1}{2}\theta . N(u), \end{cases}$$

wodurch auch diese Functionen auf zwei neue Functionen desselben Arguments zurückgeführt sind.

Zusatz. Setzt man in den vorstehenden Formeln $u = 0$ und zur Abkürzung

$$n = \phantom{1+{}} 2q + 2q^9 + 2q^{25} + 2q^{49} + 2q^{81} + 2q^{121} + \dots$$
$$m = 1 + 2q^4 + 2q^{16} + 2q^{36} + 2q^{64} + 2q^{100} + \dots$$

so hat man die besonderen Formeln

$$0 = m\sin\tfrac{1}{2}\theta - n\cos\tfrac{1}{2}\theta, \qquad \frac{1}{\sqrt{\eta}} = m\cos\tfrac{1}{2}\theta + n\sin\tfrac{1}{2}\theta,$$
$$\text{und}$$
$$\frac{\sin\theta}{\sqrt{\eta}} = m\sin\tfrac{1}{2}\theta + n\cos\tfrac{1}{2}\theta, \qquad \frac{\cos\theta}{\sqrt{\eta}} = m\cos\tfrac{1}{2}\theta - n\sin\tfrac{1}{2}\theta,$$

und hieraus folgt

$$5.\quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\theta = \frac{n}{m},$$

$$6.\quad \frac{\cos\frac{1}{2}\theta}{\sqrt{\eta}} = m \quad \text{oder} \quad \sqrt{\eta} = \frac{\cos\frac{1}{2}\theta}{m},$$

$$7.\quad \frac{\sin\frac{1}{2}\theta}{\sqrt{\eta}} = n \quad \text{oder} \quad \sqrt{\eta} = \frac{\sin\frac{1}{2}\theta}{n},$$

$$8.\quad \frac{1}{\eta} = \frac{2K}{\pi} = m^2 + n^2.$$

Die Formel $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta = \frac{n}{m}$ wurde schon in §. 188. gefunden.

§. 209.

Entwickelung der Quadrate der Modular-Functionen desjenigen Argumentes u, für welches die Function $\mathrm{H}(u, a)$ oder $\mathrm{G}(u, a)$ ein Maximum ist.

Schon im Zusatze (1.) zu §. 206. wurden die Modular-Functionen des Argumentes u hergeleitet, für welches die Function

$$\mathrm{H}(u, a) = \frac{1}{i} \log \sqrt{\frac{\mathfrak{H}\mathfrak{l}(a-ui)}{\mathfrak{H}\mathfrak{l}(a+ui)}}$$

ein Maximum ist. Wir leiten hier dieselben Formeln noch auf eine andere Art her. Soll $\mathrm{H}(u, a)$ ein Maximum sein, so mufs $\frac{d\,\mathrm{H}(u, a)}{du} = 0$ sein und also den Formeln (6. §. 200.) gemäfs

$$\mathfrak{H}(a-ui) + \mathfrak{H}(a+ui) = 0.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $\mathfrak{H}\mathfrak{l}(a-ui) . \mathfrak{H}\mathfrak{l}(a+ui)$, so erhält man

$$\mathfrak{H}\mathfrak{l}(a+ui) . \mathfrak{H}\mathfrak{l}(a-ui) . \mathfrak{H}(a-ui) + \mathfrak{H}\mathfrak{l}(a-ui) . \mathfrak{H}\mathfrak{l}(a+ui) . \mathfrak{H}(a+ui) = 0,$$

oder $\quad \mathfrak{H}\mathfrak{l}(a+ui) . \frac{d\,\mathfrak{H}\mathfrak{l}(a-ui)}{da} + \mathfrak{H}\mathfrak{l}(a-ui) . \frac{d\,\mathfrak{H}\mathfrak{l}(a+ui)}{da} = 0,\quad$ oder auch

$$\frac{d\,[\mathfrak{H}\mathfrak{l}(a+ui) . \mathfrak{H}\mathfrak{l}(a-ui)]}{da} = 0,$$

wenn nach a differenziirt wird. Da aber nach §. 191.

$$\mathfrak{H}\mathfrak{l}(a+u) . \mathfrak{H}\mathfrak{l}(a-u) = \frac{\mathfrak{H}\mathfrak{l}^2 a . \mathfrak{H}\mathfrak{l}^2 u}{k'} - \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{l}^2 a . \mathfrak{A}\mathfrak{l}^2 u}{k'},$$

also $\quad \mathfrak{H}\mathfrak{l}(u+ui) . \mathfrak{H}\mathfrak{l}(a-ui) = \frac{\mathfrak{H}\mathfrak{l}^2 a . \mathrm{Hl}^2 u + \mathfrak{A}\mathfrak{l}^2 a . \mathrm{Al}^2 u}{k'}$

ist, so ist die vorige Gleichung einerlei mit

$$\mathrm{Hl}^2 u . d\,\mathfrak{H}\mathfrak{l}^2 a + \mathrm{Al}^2 u . d\,\mathfrak{A}\mathfrak{l}^2 a = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\mathrm{Al}^2 u}{\mathrm{Hl}^2 u} = \frac{-d\,\mathfrak{H}\mathfrak{l}^2 a}{d\,\mathfrak{A}\mathfrak{l}^2 a},$$

und da $\frac{\mathrm{Al}^2 u}{\mathrm{Hl}^2 u} = k\,\mathrm{sn}^2 u$ ist, so ist

$$\mathrm{sn}^2 u = \frac{1}{k} . \frac{-d\,\mathfrak{H}\mathfrak{l}^2 a}{d\,\mathfrak{A}\mathfrak{l}^2 a} = \frac{1}{k} . \frac{\mathfrak{H}\mathfrak{l}^2 a}{\mathfrak{A}\mathfrak{l}^2 a} . \frac{\mathfrak{H}(a)}{\mathfrak{A}(a)} = (\mathrm{tnc}' a)^2 . \frac{\mathfrak{H}(a)}{\mathfrak{A}(a)},$$

wie im Zusatze zu §. 206. Ueberhaupt können die Formeln im Zusatze zu §. 206. auch also dargestellt werden:

$$\mathrm{sn}^2 u = \frac{1}{k} . \frac{-d\,\mathfrak{H}\mathfrak{l}^2 a}{d\,\mathfrak{A}\mathfrak{l}^2 a}, \qquad \mathrm{dn}^2 u = k' . \frac{d\,\mathfrak{B}\mathfrak{l}^2 a}{d\,\mathfrak{A}\mathfrak{l}^2 a},$$

und

$$\mathrm{cn}^2 u = \frac{k'}{k} . \frac{d\,\mathfrak{G}\mathfrak{l}^2 a}{d\,\mathfrak{A}\mathfrak{l}^2 a}, \qquad \mathrm{tn}^2 u = \frac{1}{k'} . \frac{-d\,\mathfrak{H}\mathfrak{l}^2 a}{d\,\mathfrak{G}\mathfrak{l}^2 a}.$$

Setzt man nun in den Formeln (2. §. 208.) a statt u, und differenziirt wirklich die Reihen für die Quadrate der hyperbolischen Functionen in Ansehung des Argumentes a, so erhält man die Formeln

$$\mathrm{sn}^2 u =$$
$$\frac{1}{k}\cdot\frac{q\sin\frac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}2\eta a - 2q^4\cos\frac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}4\eta a + 3q^9\sin\frac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}6\eta a - 4q^{16}\cos\frac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}8\eta a + 5q^{25}\sin\frac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}10\eta a - + \ldots}{q\cos\frac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}2\eta a - 2q^4\sin\frac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}4\eta a + 3q^9\cos\frac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}6\eta a - 4q^{16}\sin\frac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}8\eta a + 5q^{25}\cos\frac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}10\eta a - + \ldots}$$
$$\mathrm{cn}^2 u =$$
$$\frac{k'}{k}\cdot\frac{q\sin\frac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}2\eta a + 2q^4\cos\frac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}4\eta a + 3q^9\sin\frac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}6\eta a + 4q^{16}\cos\frac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}8\eta a + 5q^{25}\sin\frac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}10\eta a + \ldots}{q\cos\frac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}2\eta a - 2q^4\sin\frac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}4\eta a + 3q^9\cos\frac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}6\eta a - 4q^{16}\sin\frac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}8\eta a + 5q^{25}\cos\frac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}10\eta a - + \ldots}$$
$$\mathrm{dn}^2 u =$$
$$k'\cdot\frac{q\cos\frac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}2\eta a + 2q^4\sin\frac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}4\eta a + 3q^9\cos\frac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}6\eta a + 4q^{16}\sin\frac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}8\eta a + 5q^{25}\cos\frac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}10\eta a + \ldots}{q\cos\frac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}2\eta a - 2q^4\sin\frac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}4\eta a + 3q^9\cos\frac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}6\eta a - 4q^{16}\sin\frac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}8\eta a + 5q^{25}\cos\frac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}10\eta u - + \ldots}$$
$$\mathrm{tn}^2 u =$$
$$\frac{1}{k'}\cdot\frac{q\sin\frac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}2\eta a - 2q^4\cos\frac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}4\eta a + 3q^9\sin\frac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}6\eta a - 4q^{16}\cos\frac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}8\eta a + 5q^{25}\sin\frac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}10\eta a - + \ldots}{q\sin\frac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}2\eta a + 2q^4\cos\frac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}4\eta a + 3q^9\sin\frac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}6\eta a + 4q^{16}\cos\frac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}8\eta a + 5q^{25}\sin\frac{1}{2}\theta\,\mathfrak{Sin}10\eta a + \ldots}$$

in welchen $k = \sin\theta$ und $k' = \cos\theta$ ist und welche das Argument u bestimmen, für welches die Function

$$\mathrm{H}(u, a) = \mathrm{G}(K - u, a)$$

ein Maximum ist. Es ist indessen die Rechnung nach den im Zusatze zu §. 206. aufgestellten Formeln nicht minder bequem.

Sechszehnter Abschnitt.

§. 210.

Neue Modular-Integrale, welche von denen der zweiten Art und zweiten Classe abhängen.

Betrachten wir zuerst die beiden von a und u abhängigen Modular-Integrale

$$M = \int_0 \frac{k\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}\,u\,.\,du}{1 - k\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,u},$$
$$N = \int_0 \frac{k\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}\,u\,.\,du}{1 + k\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,u},$$

so erhalten wir durch Addition und Subtraction

$$\tfrac{1}{2}(M - N) = \int_0 \frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}^2\,u\,.\,du}{1 - k^2\,\mathrm{sn}^2\,a\,\mathrm{sn}^2\,u} = \mathfrak{S}(u, a),$$
$$\tfrac{1}{2}(M + N) = \int_0 \frac{k\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}\,u\,du}{1 - k^2\,\mathrm{sn}^2\,a\,\mathrm{sn}^2\,u} = \mathfrak{ArcTang}(k\,\mathrm{snc}\,a) - \mathfrak{ArcTang}(k\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{snc}\,u),$$

daher erhält man, wenn man diese Gleichungen aufs Neue durch Addition und Subtraction verbindet, die Formeln

$$1.\quad \begin{cases} \int_0 \frac{k\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}\,u.du}{1-k\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,u} = \mathfrak{ArcTang}(k\,\mathrm{snc}\,a) - \mathfrak{ArcTang}(k\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{snc}\,u) + \mathfrak{S}(u,a), \\ \int_0 \frac{k\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}\,u.du}{1+k\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,u} = \mathfrak{ArcTang}(k\,\mathrm{snc}\,a) - \mathfrak{ArcTang}(k\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{snc}\,u) - \mathfrak{S}(u,a). \end{cases}$$

Da $\frac{k\,\mathrm{sn}\,u}{1-k\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,u} = -\frac{1}{\mathrm{sn}\,a} + \frac{1}{\mathrm{sn}\,a}\cdot\frac{1}{1-k\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,u}$ und $\frac{k\,\mathrm{sn}\,u}{1+k\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,u} = \frac{1}{\mathrm{sn}\,a} - \frac{1}{\mathrm{sn}\,a}\cdot\frac{1}{1+k\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,u}$ ist, so erhält man, wenn man diese Gleichungen noch mit $\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a.du$ multiplicirt und integrirt,

$$2.\quad \begin{cases} \int_0 \frac{\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{tn}\,a}\cdot\frac{du}{1-k\,\mathrm{sn}a\,\mathrm{sn}u} = \frac{\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{tn}\,a}.u + \mathfrak{ArcTang}(k\,\mathrm{snc}\,a) - \mathfrak{ArcTang}(k\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{snc}\,u) + \mathfrak{S}(u,a), \\ \int_0 \frac{\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{tn}\,a}\cdot\frac{du}{1+k\,\mathrm{sn}a\,\mathrm{sn}u} = \frac{\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{tn}\,a}.u - \mathfrak{ArcTang}(k\,\mathrm{snc}\,a) + \mathfrak{ArcTang}(k\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{snc}\,u) + \mathfrak{S}(u,a). \end{cases}$$

Betrachten wir nun die Integrale

$$M = \int_0 \frac{k\,\mathrm{cnc}\,a\,\mathrm{dnc}\,a\,\mathrm{snc}\,u\,.\,du}{1-k\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{snc}\,u},$$

$$N = \int_0 \frac{k\,\mathrm{cnc}\,a\,\mathrm{dnc}\,a\,\mathrm{snc}\,u\,.\,du}{1+k\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{snc}\,u},$$

und beachten, dafs $1-k^2\,\mathrm{snc}^2 a\,\mathrm{snc}^2 u = \frac{k'^2(1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u)}{\mathrm{dn}^2 a\,\mathrm{dn}^2 u}$ ist, so erhalten wir

$$\tfrac{1}{2}(M+N) = \int_0 \frac{k\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u.du}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u} = \mathfrak{ArcTang}(k\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,u),$$

$$\tfrac{1}{2}(M-N) = \int_0 \frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{cn}^2 u.du}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u} = \mathfrak{E}(u,a).$$

Daher ergeben sich die Integrale

$$3.\quad \begin{cases} \int_0 \frac{k\,\mathrm{cnc}\,a\,\mathrm{dnc}\,a\,\mathrm{snc}\,u.du}{1-k\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{snc}\,u} = \mathfrak{ArcTang}(k\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,u) + \mathfrak{E}(u,a), \\ \int_0 \frac{k\,\mathrm{cnc}\,a\,\mathrm{dnc}\,a\,\mathrm{snc}\,u.du}{1+k\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{snc}\,u} = \mathfrak{ArcTang}(k\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,u) - \mathfrak{E}(u,a). \end{cases}$$

Da $\frac{k\,\mathrm{snc}\,u}{1-k\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{snc}\,u} = -\frac{1}{\mathrm{snc}\,a} + \frac{1}{\mathrm{snc}\,a}\cdot\frac{1}{1-k\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{snc}\,u}$ und eben so $\frac{k\,\mathrm{snc}\,u}{1+k\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{snc}\,u} = \frac{1}{\mathrm{snc}\,a} - \frac{1}{\mathrm{snc}\,a}\cdot\frac{1}{1+k\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{snc}\,u}$ ist, so erhält man, wenn man die beiden Gleichungen mit $\mathrm{cnc}\,a\,\mathrm{dnc}\,a.du$ multiplicirt und integrirt,

$$\int_0 \frac{\mathrm{dnc}\,a}{\mathrm{tnc}\,a}\cdot\frac{du}{1-k\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{snc}\,u} = \frac{\mathrm{dnc}\,a}{\mathrm{tnc}\,a}.u + \mathfrak{ArcTang}(k\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,u) + \mathfrak{E}(u,a),$$

$$\int_0 \frac{\mathrm{dnc}\,a}{\mathrm{tnc}\,a}\cdot\frac{du}{1+k\,\mathrm{snc}\,a\,\mathrm{snc}\,u} = \frac{\mathrm{dnc}\,a}{\mathrm{tnc}\,a}.u - \mathfrak{ArcTang}(k\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,u) + \mathfrak{E}(u,a).$$

Da aber $\mathfrak{E}(u, a) + \frac{\text{dnc}\,a}{\text{tnc}\,a} \cdot u = \mathfrak{D}(u, a)$ ist, so reduciren sich die beiden Gleichungen auf

$$4. \begin{cases} \int_0 \frac{k' \text{cnc}\,a}{\text{cn}\,a} \cdot \frac{du}{1 - k\,\text{snc}\,a\,\text{snc}\,u} = \mathfrak{D}(u, a) + \text{ArcTang}(k\,\text{sn}\,a\,\text{sn}\,u), \\ \int_0 \frac{k' \text{cnc}\,a}{\text{cn}\,a} \cdot \frac{du}{1 + k\,\text{snc}\,a\,\text{snc}\,u} = \mathfrak{D}(u, a) - \text{ArcTang}(k\,\text{sn}\,a\,\text{sn}\,u). \end{cases}$$

§. 211.

Integrale, welche von Modular-Integralen der zweiten Art und vierten Classe abhängen.

Betrachten wir zunächst die beiden Integrale

$$M = \int_0 \frac{1}{\text{sn}\,a\,\text{snc}\,a} \cdot \frac{\text{tn}\,u \,.\, du}{\text{tn}\,a - \text{tn}\,u},$$

$$N = \int_0 \frac{1}{\text{sn}\,a\,\text{snc}\,a} \cdot \frac{\text{tn}\,u \,.\, du}{\text{tn}\,a + \text{tn}\,u},$$

so erhalten, wir durch Addition und Subtraction,

$$\tfrac{1}{2}(M+N) = \int_0 \frac{1}{\text{cn}\,a\,\text{snc}\,a} \cdot \frac{\text{tn}\,u \,.\, du}{\text{tn}^2 a - \text{tn}^2 u} = \int_0 \text{dn}\,a \cdot \frac{\text{sn}\,u\,\text{cn}\,u \,.\, du}{\text{sn}^2 a - \text{sn}^2 u},$$

$$\tfrac{1}{2}(M-N) = \int_0 \frac{1}{\text{sn}\,a\,\text{snc}\,a} \cdot \frac{\text{tn}^2 u \,.\, du}{\text{tn}^2 a - \text{tn}^2 u} = \int_0 \frac{\text{dn}\,a}{\text{tn}\,a} \cdot \frac{\text{sn}^2 u \,.\, du}{\text{sn}^2 a - \text{sn}^2 u}.$$

Die wirkliche Integration giebt

$$\tfrac{1}{2}(M+N) = \text{ArcTang}\left(\frac{\text{dn}\,a}{\text{dn}\,u}\right) - \text{ArcTang}(\text{dn}\,a),$$

$$\tfrac{1}{2}(M-N) = {}'\mathfrak{S}(u, K-a);$$

daher haben wir die beiden Formeln

$$1. \begin{cases} \int_0 \frac{1}{\text{sn}\,a\,\text{snc}\,a} \cdot \frac{\text{tn}\,u \,.\, du}{\text{tn}\,a - \text{tn}\,u} = \text{ArcTang}\left(\frac{\text{dn}\,a}{\text{dn}\,u}\right) - \text{ArcTang}(\text{dn}\,a) + {}'\mathfrak{S}(u, K-a), \\ \int_0 \frac{1}{\text{sn}\,a\,\text{snc}\,a} \cdot \frac{\text{tn}\,u \,.\, du}{\text{tn}\,a + \text{tn}\,u} = \text{ArcTang}\left(\frac{\text{dn}\,a}{\text{dn}\,u}\right) - \text{ArcTang}(\text{dn}\,a) - {}'\mathfrak{S}(u, K-a). \end{cases}$$

Da $\frac{\text{tn}\,u}{\text{tn}\,a - \text{tn}\,u} = -1 + \frac{\text{tn}\,a}{\text{tn}\,a - \text{tn}\,u}$ und $\frac{\text{tn}\,u}{\text{tn}\,a + \text{tn}\,u} = 1 - \frac{\text{tn}\,a}{\text{tn}\,a + \text{tn}\,u}$ ist, so erhält man, wenn man diese Gleichungen mit $\frac{du}{\text{sn}\,a\,\text{snc}\,a}$ multiplicirt und integrirt,

$$2. \begin{cases} \int_0 \frac{\text{dn}\,a}{\text{cn}^2 a} \cdot \frac{du}{\text{tn}\,a - \text{tn}\,u} = \frac{u}{\text{sn}\,a\,\text{snc}\,a} + \text{ArcTang}\left(\frac{\text{dn}\,a}{\text{dn}\,u}\right) - \text{ArcTang}(\text{dn}\,a) + {}'\mathfrak{S}(u, K-a), \\ \int_0 \frac{\text{dn}\,a}{\text{cn}^2 a} \cdot \frac{du}{\text{tn}\,a + \text{tn}\,u} = \frac{u}{\text{sn}\,a\,\text{snc}\,a} - \text{ArcTang}\left(\frac{\text{dn}\,a}{\text{dn}\,u}\right) + \text{ArcTang}(\text{dn}\,a) + {}'\mathfrak{S}(u, K-a). \end{cases}$$

Da $\frac{u}{\operatorname{sn} a \operatorname{snc} a} = \frac{\operatorname{dn} a}{\operatorname{tn} a} . u + \frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{snc} a} . u = \frac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a} . u + \frac{\operatorname{snc} a}{\operatorname{sn} a} . u$ ist, so ist $\frac{u}{\operatorname{sn} a \operatorname{snc} a} + {}'\mathfrak{S}(u, K-a) = {}'\mathfrak{E}(u, K-a) + \frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{snc} a} . u$, und es darf daher in den vorigen Formeln $\frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{snc} a} u + {}'\mathfrak{E}(u, K-a)$ für $\frac{u}{\operatorname{sn} a \operatorname{snc} a} + {}'\mathfrak{S}(u, K-a)$ gesetzt werden, oder auch $\frac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a} . u + {}'\mathfrak{D}(u, a)$, den Formeln (6. §. 121.) gemäſs.

Untersuchen wir nun die Integrale

$$M = \int_0 \frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \, du}{\operatorname{sn} a - \operatorname{sn} u} \quad \text{und} \quad N = \int_0 \frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a . du}{\operatorname{sn} a + \operatorname{sn} u},$$

so erhalten wir

$$\tfrac{1}{2}(M+N) = \int_0 \frac{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \, du}{\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2 u} \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{2}(M-N) = \int_0 \frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn} u . du}{\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2 u}.$$

Die Integration selbst giebt

$$\tfrac{1}{2}(M+N) = \int_0 \frac{\operatorname{dn} a}{\operatorname{tn} a} . \frac{du}{1 - \frac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 a}} = {}'\mathfrak{E}(u, K-a) \text{ und}$$

$$\tfrac{1}{2}(M-N) = \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\operatorname{snc} a}{\operatorname{snc} u}\right) - \mathfrak{ArcTang}(\operatorname{snc} a);$$

daher die Formeln

$$3. \quad \begin{cases} \int_0 \frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a . du}{\operatorname{sn} a - \operatorname{sn} u} = {}'\mathfrak{E}(u, K-a) + \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\operatorname{snc} a}{\operatorname{snc} u}\right) - \mathfrak{ArcTang}(\operatorname{snc} a), \\ \int_0 \frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a . du}{\operatorname{sn} a + \operatorname{sn} u} = {}'\mathfrak{E}(u, K-a) - \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\operatorname{snc} a}{\operatorname{snc} u}\right) + \mathfrak{ArcTang}(\operatorname{snc} a), \end{cases}$$

in welchen auch $\mathfrak{L} \operatorname{amc} a$ für $\mathfrak{ArcTang}(\operatorname{snc} a)$ gesetzt werden kann.

Es ist $\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{sn} a + \operatorname{sn} u} = 1 - \frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{sn} a + \operatorname{sn} u}$ und $\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{sn} a - \operatorname{sn} u} = -1 + \frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{sn} a - \operatorname{sn} u}$. Multiplicirt man diese Gleichungen mit $\frac{\operatorname{dn} a}{\operatorname{tn} a} . du = \frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn} a} . du$ und integrirt, so erhält man, mit Benutzung der vorigen Formeln,

$$\int_0 \frac{\operatorname{dn} a}{\operatorname{tn} a} . \frac{\operatorname{sn} u \, du}{\operatorname{sn} a - \operatorname{sn} u} = -\frac{\operatorname{dn} a}{\operatorname{tn} a} u + {}'\mathfrak{E}(u, K-a) + \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\operatorname{snc} a}{\operatorname{snc} u}\right) - \mathfrak{ArcTang}(\operatorname{snc} a),$$

$$\int_0 \frac{\operatorname{dn} a}{\operatorname{tn} a} . \frac{\operatorname{sn} u \, du}{\operatorname{sn} a + \operatorname{sn} u} = \frac{\operatorname{dn} a}{\operatorname{tn} a} u - {}'\mathfrak{E}(u, K-a) + \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\operatorname{snc} a}{\operatorname{snc} u}\right) - \mathfrak{ArcTang}(\operatorname{snc} a),$$

und da nach §. 121.

$${}'\mathfrak{E}(u, K-a) - \frac{\operatorname{dn} a}{\operatorname{tn} a} . u = {}'\mathfrak{S}(u, K-a)$$

ist, so reduciren sich die Formeln auf

$$4.\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0 \frac{\operatorname{dn}a}{\operatorname{tn}a}\cdot\frac{\operatorname{sn}u\,.\,du}{\operatorname{sn}a-\operatorname{sn}u} = \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\operatorname{snc}a}{\operatorname{snc}u}\right) - \mathfrak{ArcTang}(\operatorname{snc}a) + {}'\mathfrak{S}(u, K-a), \\[2ex] \displaystyle\int_0 \frac{\operatorname{dn}a}{\operatorname{tn}a}\cdot\frac{\operatorname{sn}u\,.\,du}{\operatorname{sn}a+\operatorname{sn}u} = \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\operatorname{snc}a}{\operatorname{snc}u}\right) - \mathfrak{ArcTang}(\operatorname{snc}a) - {}'\mathfrak{S}(u, K-a). \end{cases}$$

Die Integrale $M=\displaystyle\int_0 \frac{\operatorname{sn}a\operatorname{dn}a\,.\,du}{\operatorname{cn}u-\operatorname{cn}a}$ und $N=\displaystyle\int_0 \frac{\operatorname{sn}a\operatorname{dn}a\,.\,du}{\operatorname{cn}u+\operatorname{cn}a}$ geben

$$\tfrac{1}{2}(M+N) = \int_0 \frac{\operatorname{sn}a\operatorname{dn}a\operatorname{cn}u\,.\,du}{\operatorname{cn}^2u-\operatorname{cn}^2a} = \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\operatorname{cnc}u}{\operatorname{cnc}a}\right) \text{ und}$$

$$\tfrac{1}{2}(M-N) = \int_0 \frac{\operatorname{sn}a\operatorname{cn}a\operatorname{dn}a\,.\,du}{\operatorname{sn}^2a-\operatorname{sn}^2u} = {}'\mathfrak{E}(u, K-a);$$

daher haben wir die Formeln

$$5.\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0 \frac{\operatorname{sn}a\operatorname{dn}a\,.\,du}{\operatorname{cn}u-\operatorname{cn}a} = \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\operatorname{cnc}u}{\operatorname{cnc}a}\right) + {}'\mathfrak{E}(u, K-a), \\[2ex] \displaystyle\int_0 \frac{\operatorname{sn}a\operatorname{dn}a\,.\,du}{\operatorname{cn}u+\operatorname{cn}a} = \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\operatorname{cnc}u}{\operatorname{cnc}a}\right) - {}'\mathfrak{E}(u, K-a); \end{cases}$$

woraus wir noch sogleich die beiden folgenden herleiten:

$$6.\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0 \frac{\operatorname{tn}a\operatorname{dn}a\operatorname{cn}u\,.\,du}{\operatorname{cn}u-\operatorname{cn}a} = \frac{\operatorname{sn}a}{\operatorname{snc}a}\,.\,u + \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\operatorname{cnc}u}{\operatorname{cnc}a}\right) + {}'\mathfrak{E}(u, K-a), \\[2ex] \displaystyle\int_0 \frac{\operatorname{tn}a\operatorname{dn}a\operatorname{cn}u\,.\,du}{\operatorname{cn}u+\operatorname{cn}a} = \frac{\operatorname{sn}a}{\operatorname{snc}a}\,.\,u - \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\operatorname{cnc}u}{\operatorname{cnc}a}\right) + {}'\mathfrak{E}(u, K-a). \end{cases}$$

Aus den Integralen $M=\displaystyle\int_0 \frac{k^2\operatorname{sn}a\operatorname{cn}a\,.\,du}{\operatorname{dn}u-\operatorname{dn}a}$ und $N=\displaystyle\int_0 \frac{k^2\operatorname{sn}a\operatorname{cn}a\,.\,du}{\operatorname{dn}u+\operatorname{dn}a}$ folgt

$$\tfrac{1}{2}(M+N) = \int_0 \frac{\operatorname{sn}a\operatorname{cn}a\operatorname{dn}u\,.\,du}{\operatorname{sn}^2a-\operatorname{sn}^2u} = \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\operatorname{tn}u}{\operatorname{tn}a}\right) \text{ und}$$

$$\tfrac{1}{2}(M-N) = \int_0 \frac{\operatorname{sn}a\operatorname{cn}a\operatorname{dn}a\,.\,du}{\operatorname{sn}^2a-\operatorname{sn}^2u} = {}'\mathfrak{E}(u, K-a):$$

also haben wir

$$7.\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0 \frac{k^2\operatorname{sn}a\operatorname{cn}a\,.\,du}{\operatorname{dn}u-\operatorname{dn}a} = \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\operatorname{tn}u}{\operatorname{tn}a}\right) + {}'\mathfrak{E}(u, K-a), \\[2ex] \displaystyle\int_0 \frac{k^2\operatorname{sn}a\operatorname{cn}a\,.\,du}{\operatorname{dn}u+\operatorname{dn}a} = \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\operatorname{tn}u}{\operatorname{tn}a}\right) - {}'\mathfrak{E}(u, K-a). \end{cases}$$

Hieraus folgt sogleich

$$\int_0 \frac{k^2\operatorname{sn}a\operatorname{snc}a\operatorname{dn}u\,.\,du}{\operatorname{dn}a-\operatorname{dn}a} = k^2\operatorname{sn}a\operatorname{snc}a\,.\,u + \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\operatorname{tn}u}{\operatorname{tn}a}\right) + {}'\mathfrak{E}(u, K-a) \text{ und}$$

$$\int_0 \frac{k^2\operatorname{sn}a\operatorname{snc}a\operatorname{dn}u\,.\,du}{\operatorname{dn}u+\operatorname{dn}a} = k^2\operatorname{sn}a\operatorname{snc}a\,.\,u - \mathfrak{ArcTang}\left(\frac{\operatorname{tn}u}{\operatorname{tn}a}\right) + {}'\mathfrak{E}(u, K-a).$$

Da aber $k^2\operatorname{sn}a\operatorname{snc}a\,.\,u + {}'\mathfrak{E}(u, K-a) = {}'\mathfrak{D}(u, K-a)$ ist, so reduciren sich die beiden Formeln auf

$$8.\quad\begin{cases}\displaystyle\int_0 \frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{snc} a \,.\, \operatorname{dn} u \,.\, du}{\operatorname{dn} u - \operatorname{dn} a} = {}'\mathfrak{D}(u, K-a) + \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\operatorname{tn} u}{\operatorname{tn} a}\right),\\[2ex] \displaystyle\int_0 \frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{snc} a \,.\, \operatorname{dn} u \,.\, du}{\operatorname{dn} u + \operatorname{dn} a} = {}'\mathfrak{D}(u, K-a) - \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\operatorname{tn} u}{\operatorname{tn} a}\right).\end{cases}$$

Verbinden wir die beiden Integrale

$$M = \int_0 \frac{\operatorname{cnc} a \operatorname{dnc} a \,.\, du}{\operatorname{snc} u - \operatorname{snc} a} \quad \text{und} \quad N = \int_0 \frac{\operatorname{cnc} a \operatorname{dnc} a \,.\, du}{\operatorname{snc} u + \operatorname{snc} a},$$

so erhalten wir

$$\tfrac{1}{2}(M+N) = \int_0 \frac{\operatorname{cnc} a \operatorname{dnc} a \operatorname{snc} u \,.\, du}{\operatorname{snc}^2 u - \operatorname{snc}^2 a} = \int_0 \frac{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \,.\, du}{\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2 u} = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{sn} a}\right),$$

und

$$\tfrac{1}{2}(M-N) = \int_0 \frac{\operatorname{cnc} a \operatorname{dnc} a \operatorname{snc} a \,.\, du}{\operatorname{snc}^2 u - \operatorname{snc}^2 a} = \int_0 \frac{\operatorname{tnc} a \operatorname{dnc} a \operatorname{dn}^2 u \,.\, du}{1 - \dfrac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 a}} = {}'\mathfrak{D}(u, K-a);$$

daher erhalten wir

$$9.\quad\begin{cases}\displaystyle\int_0 \frac{\operatorname{cnc} a \operatorname{dnc} a \,.\, du}{\operatorname{snc} u - \operatorname{snc} a} = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{sn} a}\right) + {}'\mathfrak{D}(u, K-a),\\[2ex] \displaystyle\int_0 \frac{\operatorname{cnc} a \operatorname{dnc} a \,.\, du}{\operatorname{snc} u - \operatorname{snc} a} = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{sn} a}\right) - {}'\mathfrak{D}(u, K-a).\end{cases}$$

Es können diese Formeln auch also dargestellt werden:

$$10.\quad\begin{cases}\displaystyle\int_0 \frac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a} \cdot \frac{\operatorname{snc} u \,.\, du}{\operatorname{snc} u - \operatorname{snc} a} = \frac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a} \,.\, u + \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{sn} a}\right) + {}'\mathfrak{D}(u, K-a),\\[2ex] \displaystyle\int_0 \frac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a} \cdot \frac{\operatorname{snc} u \,.\, du}{\operatorname{snc} u + \operatorname{snc} a} = \frac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a} \,.\, u - \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{sn} a}\right) + {}'\mathfrak{D}(u, K-a).\end{cases}$$

Verbinden wir die Integrale

$$M = \int_0 \frac{\operatorname{snc} a \operatorname{dnc} a \,.\, du}{\operatorname{cnc} a - \operatorname{cnc} u} \quad \text{und} \quad N = \int_0 \frac{\operatorname{snc} a \operatorname{dnc} a \,.\, du}{\operatorname{cnc} a + \operatorname{cnc} u},$$

so erhalten wir

$$\tfrac{1}{2}(M+N) = \int_0 \frac{\operatorname{snc} a \operatorname{cnc} a \operatorname{dnc} a \,.\, du}{\operatorname{cnc}^2 a - \operatorname{cnc}^2 u} = \int_0 \frac{\operatorname{sn} a \operatorname{snc} a \operatorname{dn}^2 u \,.\, du}{\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2 u} = {}'\mathfrak{D}(u, K-a),$$

und

$$\tfrac{1}{2}(M-N) = \int_0 \frac{\operatorname{snc} a \operatorname{dnc} a \operatorname{cnc} u \,.\, du}{\operatorname{cn}^2 a - \operatorname{cn}^2 u} = \int_0 \frac{\operatorname{cn} a \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \,.\, du}{\operatorname{cn}^2 u - \operatorname{cn}^2 a} = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\operatorname{cn} a}{\operatorname{cn} u}\right) - \mathfrak{Arc\,Tang}(\operatorname{cn} a):$$

daher die Formeln

$$11.\quad\begin{cases}\displaystyle\int_0 \frac{\operatorname{snc} a \operatorname{dnc} a \,.\, du}{\operatorname{cnc} a - \operatorname{cnc} u} = {}'\mathfrak{D}(u, K-a) + \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\operatorname{cn} a}{\operatorname{cn} u}\right) - \mathfrak{Arc\,Tang}(\operatorname{cn} a),\\[2ex] \displaystyle\int_0 \frac{\operatorname{snc} a \operatorname{dnc} a \,.\, du}{\operatorname{cnc} a + \operatorname{cnc} u} = {}'\mathfrak{D}(u, K-a) - \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\operatorname{cn} a}{\operatorname{cn} u}\right) + \mathfrak{Arc\,Tang}(\operatorname{cn} a).\end{cases}$$

Man leitet hieraus noch die beiden folgenden her:

$$12.\quad \begin{cases} \int_0 \frac{\text{tnc}\,a\,\text{dnc}\,a\,\text{cnc}\,u\,.\,du}{\text{cnc}\,a-\text{cnc}\,u} \\ = -\frac{\text{snc}\,a}{\text{sn}\,a}u + {}'\mathfrak{D}(u,K-a) + \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\text{cn}\,a}{\text{cn}\,u}\right) - \mathfrak{Arc\,Tang}(\text{cn}\,a), \\ \int_0 \frac{\text{tnc}\,a\,\text{dnc}\,a\,\text{cnc}\,u\,.\,du}{\text{cnc}\,a+\text{cnc}\,u} \\ = \frac{\text{snc}\,a}{\text{sn}\,a} - {}'\mathfrak{D}(u,K-a) + \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\text{cn}\,a}{\text{cn}\,u}\right) - \mathfrak{Arc\,Tang}(\text{cn}\,a). \end{cases}$$

§. 212.

Integrale, welche von Modular-Integralen der zweiten Art und ersten Classe abhängen.

Verbinden wir die beiden Integrale $N=\int_0 \frac{\text{dn}'a}{\text{sn}'a}\cdot\frac{\text{cn}\,u-\text{cn}'a}{1-\text{cn}'a\,\text{cn}\,u}.du$ und $M=\int \frac{\text{dn}'a}{\text{sn}'a}\cdot\frac{\text{cn}\,u+\text{cn}'a}{1+\text{cn}'a\,\text{cn}\,u}.du$, so erhalten wir

$$\tfrac{1}{2}(M+N)=\int_0 \frac{\text{sn}'a\,\text{dn}'a\,\text{cn}\,u\,.\,du}{1-\text{cn}'^2a\,\text{cn}^2u} = \text{arc tang}\left(\frac{k\,\text{cnc}\,u}{k'\,\text{cnc}'a}\right),$$

$$\tfrac{1}{2}(M-N)=\int_0 \frac{\text{dn}'a}{\text{tn}'a}\cdot\frac{\text{sn}^2u\,.\,du}{1-\text{cn}'^2a\,\text{cn}^2u} = \int_0 \frac{k^2.\,\text{dnc}'a\,\text{tnc}'a\,.\,\text{sn}^2u}{\text{cnc}'^2a\,(1+k^2\,\text{tnc}'^2a\,.\,\text{sn}^2u)} = S(u,K'-a),$$

und wir haben also die Formeln

$$1.\quad \begin{cases} \int_0 \frac{\text{dn}'a}{\text{sn}'a}\cdot\frac{\text{cn}\,u+\text{cn}'a}{1+\text{cn}'a\,\text{cn}\,u}.du = \text{arc tang}\left(\frac{k\,\text{cnc}\,u}{k'\,\text{cnc}'a}\right) + \text{S}(u,K'-a), \\ \int_0 \frac{\text{dn}'a}{\text{sn}'a}\cdot\frac{\text{cn}\,u-\text{cn}'a}{1-\text{cn}'a\,\text{cn}\,u}.du = \text{arc tang}\left(\frac{k\,\text{cnc}\,u}{k'\,\text{cnc}'a}\right) - \text{S}(u,K'-a); \end{cases}$$

welche sich auch also darstellen lassen:

$$2.\quad \begin{cases} \int_0 \frac{\text{tn}'a\,\text{dn}'a\,.\,du}{1-\text{cn}'a\,\text{cn}\,u} = \frac{u}{\text{sn}'a\,\text{snc}'a} + \text{arc tang}\left(\frac{k\,\text{cnc}\,u}{k'\,\text{cnc}'a}\right) - \text{S}(u,K'-a), \\ \int_0 \frac{\text{tn}'a\,\text{dn}'a\,.\,du}{1+\text{cn}'a\,\text{cn}\,u} = \frac{u}{\text{sn}'a\,\text{snc}'a} - \text{arc tang}\left(\frac{k\,\text{cnc}\,u}{k'\,\text{cnc}'a}\right) - \text{S}(u,K'-a). \end{cases}$$

Auf gleiche Weise findet man die Formeln

$$3.\quad \begin{cases} \int_0 \frac{\text{dnc}'a}{\text{cnc}'a}\cdot\frac{\text{dn}\,u-\text{snc}'a}{1-\text{snc}'a\,\text{dn}\,u}.du = \text{arc tang}\left(\frac{\text{tn}\,u}{\text{sn}'a}\right) - \text{S}(u,K'-a), \\ \int_0 \frac{\text{dnc}'a}{\text{cnc}'a}\cdot\frac{\text{dn}\,u+\text{snc}'a}{1+\text{snc}'a\,\text{dn}\,u}.du = \text{arc tang}\left(\frac{\text{tn}\,u}{\text{sn}'a}\right) + \text{S}(u,K'-a), \end{cases}$$

welche sich auch also darstellen lassen:

$$4.\quad \begin{cases} \int_0 \frac{\text{dnc}'a}{\text{tnc}'a}\cdot\frac{du}{1-\text{snc}'a\,\text{dn}\,u} = \frac{u}{\text{sn}'a\,\text{snc}'a} + \text{arc tang}\left(\frac{\text{tn}\,u}{\text{sn}'a}\right) - \text{S}(u,K'-a), \\ \int_0 \frac{\text{dnc}'a}{\text{tnc}'a}\cdot\frac{du}{1+\text{snc}'a\,\text{dn}\,u} = \frac{u}{\text{sn}'a\,\text{snc}'a} - \text{arc tang}\left(\frac{\text{tn}\,u}{\text{sn}'a}\right) - \text{S}(u,K'-a). \end{cases}$$

Da $\frac{\mathrm{cn}\, u}{1-\mathrm{cn}'a\, \mathrm{cn}\, u} = -\frac{1}{\mathrm{cn}'a} + \frac{1}{\mathrm{cn}'a\,(1-\mathrm{cn}'a\,\mathrm{cn}\,u)}$ und $\frac{\mathrm{cn}\,u}{1+\mathrm{cn}'a\,\mathrm{cn}\,u} = \frac{1}{\mathrm{cn}'a} - \frac{1}{\mathrm{cn}'a\,(1+\mathrm{cn}'a\,\mathrm{cn}\,u)}$ ist, so erhält man, wenn man mit $\mathrm{sn}'a\,\mathrm{dn}'a.du$ diese Gleichungen multiplicirt und integrirt,

$$\int_0 \frac{\mathrm{sn}'a\,\mathrm{dn}'a\,\mathrm{cn}\,u\,.\,du}{1-\mathrm{cn}'a\,\mathrm{cn}\,u}$$

$$= \left(\frac{1}{\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a} - \mathrm{tn}'a\,\mathrm{dn}'a\right)u + \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{k\,\mathrm{cnc}\,u}{k'\,\mathrm{cnc}'a}\right) - \mathrm{S}(u, K'-a),$$

$$\int_0 \frac{\mathrm{sn}'a\,\mathrm{dn}'a\,\mathrm{cn}\,u\,.\,du}{1-\mathrm{cn}'a\,\mathrm{cn}\,u}$$

$$= -\left(\frac{1}{\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a} - \mathrm{tn}'a\,\mathrm{dn}'a\right)u + \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{k\,\mathrm{cnc}\,u}{k'\,\mathrm{cnc}'a}\right) + \mathrm{S}(u, K'-a).$$

Da aber $\frac{1}{\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a} - \mathrm{tn}'a\,\mathrm{dn}'a = \frac{\mathrm{dn}'a}{\mathrm{tn}'a}$ und $\frac{\mathrm{dn}'a}{\mathrm{tn}'a}u - \mathrm{S}(u, K'-a) = \mathrm{C}(u, K'-a)$ ist, so reduciren sich die beiden Formeln auf

$$5.\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0 \frac{\mathrm{sn}'a\,\mathrm{dn}'a\,\mathrm{cn}\,u\,.\,du}{1-\mathrm{cn}'a\,\mathrm{cn}\,u} = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{k\,\mathrm{cnc}\,u}{k'\,\mathrm{cnc}'a}\right) + \mathrm{C}(u, K'-a), \\ \displaystyle\int_0 \frac{\mathrm{sn}'a\,\mathrm{dn}'a\,\mathrm{cn}\,u\,.\,du}{1+\mathrm{cn}'a\,\mathrm{cn}\,u} = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{k\,\mathrm{cnc}\,u}{k'\,\mathrm{cnc}'a}\right) - \mathrm{C}(u, K'-a). \end{cases}$$

Auf gleiche Weise lassen sich die Formeln (4.) umformen in

$$6.\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0 \frac{\mathrm{cnc}'a\,\mathrm{dnc}'a\,\mathrm{dn}\,u\,.\,du}{1-\mathrm{snc}'a\,\mathrm{dn}\,u} = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{sn}'a}\right) + \mathrm{D}(u, K'-a), \\ \displaystyle\int_0 \frac{\mathrm{cnc}'a\,\mathrm{dnc}'a\,\mathrm{dn}\,u\,.\,du}{1+\mathrm{snc}'a\,\mathrm{dn}\,u} = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{sn}'a}\right) - \mathrm{D}(u, K'-a). \end{cases}$$

Setzt man in den Formeln (7. §. 211.) ui statt u, indem man zugleich k mit k' vertauscht, so erhält man

$$7.\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0 \frac{k'^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{cn}'a\,\mathrm{snc}\,u\,.\,du}{1-\mathrm{dn}'a\,\mathrm{snc}\,u} = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{tn}'a}\right) + \mathrm{C}(u, K'-a), \\ \displaystyle\int_0 \frac{k'^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{cn}'a\,\mathrm{snc}\,u\,.\,du}{1+\mathrm{dn}'a\,\mathrm{snc}\,u} = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{tn}'a}\right) - \mathrm{C}(u, K'-a), \end{cases}$$

und auf gleiche Weise verwandeln sich die Formeln (8. §. 211.) in

$$8.\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0 \frac{k'^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a\,.\,du}{1-\mathrm{dn}'a\,\mathrm{snc}\,u} = \mathrm{D}(u, K'-a) + \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{tn}'a}\right), \\ \displaystyle\int_0 \frac{k'^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a\,.\,du}{1+\mathrm{dn}'a\,\mathrm{snc}\,u} = \mathrm{D}(u, K'-a) - \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{tn}'a}\right). \end{cases}$$

§. 213.

Integrale, welche von den Modular-Integralen der zweiten Art und dritten Classe abhängen.

Setzt man in den Formeln (4. §. 211.) $K-a$ statt a und ai statt a, so erhält man

$$1.\quad \begin{cases} \int_0 \frac{k'^2 \operatorname{sn}'a \operatorname{cn}'a \operatorname{sn}u\,.\,du}{1-\operatorname{dn}'a \operatorname{sn}u} = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{tn}'a}{\operatorname{snc}u}\right) - \operatorname{am}'a + {}'\mathrm{S}(u,a), \\ \int_0 \frac{k'^2 \operatorname{sn}'a \operatorname{cn}'u \operatorname{sn}u\,.\,du}{1+\operatorname{dn}'a \operatorname{sn}u} = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{tn}'a}{\operatorname{snc}u}\right) - \operatorname{am}'a - {}'\mathrm{S}(u,a). \end{cases}$$

Auf gleiche Weise verwandeln sich die Formeln (3. §. 211.) in

$$2.\quad \begin{cases} \int_0 \frac{k' \operatorname{sn}'a \operatorname{snc}'a\,.\,du}{1-\operatorname{dn}'a \operatorname{sn}u} = {}'\mathrm{C}(u,a) + \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{tn}'a}{\operatorname{snc}u}\right) - \operatorname{am}'a, \\ \int_0 \frac{k' \operatorname{sn}'a \operatorname{snc}'a\,.\,du}{1+\operatorname{dn}'a \operatorname{sn}u} = {}'\mathrm{C}(u,a) - \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{tn}'a}{\operatorname{snc}u}\right) + \operatorname{am}'a, \end{cases}$$

und die Formeln (11. §. 211.) gehen über in

$$3.\quad \begin{cases} \int_0 \frac{\operatorname{tn}'a \operatorname{dn}'a\,.\,du}{1-\operatorname{cn}'a \operatorname{cnc}u} = {}'\mathrm{D}(u,a) + \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{k' \operatorname{cnc}'a}{k \operatorname{cn}u}\right) - \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{k'}{k} \operatorname{cnc}'a\right), \\ \int_0 \frac{\operatorname{tn}'a \operatorname{dn}'a\,.\,du}{1+\operatorname{cn}'a \operatorname{cnc}u} = {}'\mathrm{D}(u,a) - \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{k' \operatorname{cnc}'a}{k \operatorname{cn}u}\right) + \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{k'}{k} \operatorname{cnc}'a\right). \end{cases}$$

Sie können auch also dargestellt werden:

$$4.\quad \begin{cases} \int_0 \frac{\operatorname{sn}'a \operatorname{dn}'a \operatorname{cnc}u\,.\,du}{1-\operatorname{cn}'a \operatorname{cnc}u} \\ = {}'\mathrm{S}(u,a) + \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{k' \operatorname{cnc}'a}{k \operatorname{cn}u}\right) - \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{k'}{k} \operatorname{cnc}'a\right), \\ \int_0 \frac{\operatorname{sn}'a \operatorname{dn}'a \operatorname{cnc}u\,.\,du}{1+\operatorname{cn}'a \operatorname{cnc}u} \\ = -{}'\mathrm{S}(u,a) + \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{k' \operatorname{cnc}'a}{k \operatorname{cn}u}\right) - \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{k'}{k} \operatorname{cnc}'a\right). \end{cases}$$

Setzt man in den Formeln (7. §. 211.) $K-a$ statt a und ai statt a, so erhält man

$$5.\quad \begin{cases} \int_0 \frac{k^2 \operatorname{snc}'a \operatorname{cnc}'a\,.\,du}{\operatorname{dn}u - k' \operatorname{snc}'a} = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{sn}'a}{\operatorname{tnc}u}\right) + {}'\mathrm{C}(u,a), \\ \int_0 \frac{k^2 \operatorname{snc}'a \operatorname{cnc}'a\,.\,du}{\operatorname{dn}u + k' \operatorname{snc}'a} = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{sn}'a}{\operatorname{tnc}u}\right) - {}'\mathrm{C}(u,a), \end{cases}$$

und auf gleiche Weise verwandeln sich die Formeln (8. §. 211.) in

$$6.\quad \begin{cases} \int_0 \frac{k^2 \operatorname{sn}'a \operatorname{snc}'a \operatorname{dn}u\,.\,du}{\operatorname{dn}u - k' \operatorname{snc}'a} = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{sn}'a}{\operatorname{tnc}u}\right) + {}'\mathrm{D}(u,a), \\ \int_0 \frac{k^2 \operatorname{sn}'a \operatorname{snc}'a \operatorname{dn}u\,.\,du}{\operatorname{dn}u + k' \operatorname{snc}'a} = {}'\mathrm{D}(u,a) - \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{sn}'a}{\operatorname{tnc}u}\right). \end{cases}$$

§. 214.

Relationen unter den Modular-Functionen und Amplituden zweier Argumente u und v, wenn die Moduln jener Functionen ein gegebenes Verhältniſs zu einander haben.

Im Nachfolgenden beziehen wir die Modular-Functionen der Argumente u und a sammt ihren Amplituden auf den Modul k, also beim Uebergange zum conjugirten Modul auf $k' = \sqrt{(1-k^2)}$, hingegen die Modular-Functionen und Amplituden der Argumente v und b auf den Modul $\lambda < k$, und also auf den Modul $\lambda' > k'$, wenn der Modul λ mit dem conjugirten vertauscht wird. Das Verhältniſs der Modul k und λ zu einander betrachten wir als gegeben. Es sei

$$1.\quad \lambda = k\,\mathrm{snc}\,a;$$

dann ist $\lambda' = \mathrm{dnc}\,a$, und es drückt diese Gleichung, wenn sie durch

$$2.\quad \lambda' = \frac{k}{\mathrm{dn}\,a}$$

vorgestellt wird, schon das Verhältniſs der conjugirten Modul zu einander aus. Die den Moduln k und k' zugehörigen Modular-Quadranten seien, wie bisher, K und K', und die den Moduln λ und λ' zugehörigen Modular-Quadranten L und L'. Für $a = 0$ ist $\lambda = k$, also $L = K$ und $L' = K'$; für $a = K$ ist $\lambda = 0$, also $L = \frac{1}{2}\pi$ und $L' = \frac{1}{0}$; daher ist im Allgemeinen

$$3.\quad \begin{cases} L \text{ zwischen den Grenzen } K \text{ und } \frac{1}{2}\pi \text{ und} \\ L' \text{ zwischen den Grenzen } K' \text{ und } \frac{1}{0} \text{ enthalten,} \end{cases}$$

wenn die Gröſse a reell ist, wie wir hier zunächst voraussetzen. Mit Beziehung auf die vorigen Modul λ und k sei nun

$$4.\quad \mathrm{amc}\,v = \mathrm{amc}\,u, \text{ also } \mathrm{snc}\,v = \mathrm{snc}\,u,\ \mathrm{cnc}\,v = \mathrm{cnc}\,u \text{ und } \mathrm{tnc}\,v = \mathrm{tnc}\,u.$$

Die letzte Gleichung ist einerlei mit $\lambda' \mathrm{tn}\,v = k' \mathrm{tn}\,u$, und reducirt sich in Anwendung der Gleichung (2.) auf

$$5.\quad \begin{cases} \mathrm{tn}\,v = \mathrm{dn}\,a\,\mathrm{tn}\,u, \text{ also } \mathrm{sn}\,v = \dfrac{\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}\,u}{\sqrt{(1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u)}} \text{ und} \\ \mathrm{cn}\,v = \dfrac{\mathrm{cn}\,u}{\sqrt{(1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u)}}. \end{cases}$$

Die Gleichung $\mathrm{snc}\,v = \mathrm{snc}\,u$ ist einerlei mit $\frac{\mathrm{cn}\,v}{\mathrm{dn}\,v} = \frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}$, und wird die vorige Gleichung benutzt, so hat man

$$6.\quad \mathrm{dn}\,v = \frac{\mathrm{dn}\,u}{\sqrt{(1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u)}}.$$

Es ist übrigens auch λ snc a snc u und also

$$7.\quad \text{dnc}\, v = \sqrt{(1-k^2\,\text{snc}^2 a\,\text{snc}^2 u)} = \frac{k'.\sqrt{(1-k^2\,\text{sn}^2 a\,\text{sn}^2 u)}}{\text{dn}\, a\ \text{dn}\, u}.$$

Da nach §. 12. $\text{dn}\, a\ \text{tn}\, u = \text{tang}\left(\frac{\text{am}(u+a)+\text{am}(u-a)}{2}\right)$ ist und auch $\text{dn}\, a\ \text{tn}\, u = \text{tn}\, v = \text{tang am}\, v$, so haben wir die merkwürdige Relation unter den Amplituden:

$$8.\quad \text{am}\, v = \frac{\text{am}(u+a)+\text{am}(u-a)}{2} = \frac{\text{am}(u+a)-\text{am}(a-u)}{2},$$

welche übrigens durch die noch einfachere anfängliche Relation $\text{amc}\, v = \text{amc}\, u$ ersetzt wird. Aus den Gleichungen $\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{k}{k'}\,\text{cn}\, a$ und $\text{cnc}\, v = \text{cnc}\, u$ folgt $\frac{\lambda}{\lambda'}\,\text{cnc}\, v = \text{cn}\, a\,\frac{k}{k'}\,\text{cnc}\, u$, oder, dem §. 29. gemäfs,

$$\text{tn}\left(\lambda v, \frac{1}{\lambda}\right) = \text{dn}\left(ka, \frac{1}{k}\right).\text{tn}\left(ku, \frac{1}{k}\right),\ \text{ähnlich der Gleichung}$$
$$\text{tn}\, v = \text{dn}\, a.\text{tn}\, u;$$

woraus man sieht, dafs man gleichzeitig ka statt a, ku statt u, $\frac{1}{k}$, statt des Moduls k, also $k(K-iK')$ statt des Quadranten K setzen darf, wenn man λv statt v, $\frac{1}{\lambda}$ statt des Moduls λ, also $\lambda(L-iL')$ statt des Quadranten L setzt. Hiernach verwandelt sich aber die Gleichung (8.) in

$$9.\quad \text{am}\left(\lambda v, \frac{1}{\lambda}\right) = \tfrac{1}{2}\left[\text{am}\left(ku+ka, \frac{1}{k}\right) + \text{am}\left(ku-ka, \frac{1}{k}\right)\right].$$

Den Gleichungen (4. und 5.) gemäfs ist

$$10.\quad \left\{\begin{array}{llll} \text{für} & u = K & \text{auch} & v = L, \\ \text{--} & u = 2K & \text{--} & v = 2L, \\ \text{--} & u = 3K & \text{--} & v = 3L, \\ \text{--} & u = 4K & \text{--} & v = 4L \\ & & \text{u. s. w.} & \end{array}\right.$$

Ueberhaupt ist $v = mL$ für $u = mK$, wenn m eine ganze Zahl bezeichnet; daher ist auch für $ku = k(K-iK')$, $\lambda v = \lambda(L-iL')$, oder

$$11.\quad \left\{\begin{array}{lll} v = L-iL' & \text{für} & u = K-iK', \\ v = 2(L-iL') & \text{für} & u = 2(K-iK'), \\ v = 3(L-iL') & \text{für} & u = 3(K-iK'), \\ v = 4(L-iL') & \text{für} & u = 4(K-iK') \\ & \text{u. s. w.} & \end{array}\right.$$

Ueberhaupt wächst v um $2mL + 2niL'$, wenn u um $2mK + 2niK'$ zunimmt, vorausgesetzt, dafs m und n ganze Zahlen sind. Setzt man in der

Gleichung $\operatorname{tn} v = \operatorname{dn} a . \operatorname{tn} u$ das Argument $u = a + iK$, so wird $\operatorname{tn} u = \frac{i}{\operatorname{dn} a}$, also $\operatorname{tn} v = i$, oder $v = iL'$: daher ist

$$12. \quad \begin{cases} v = iL' & \text{für } u = a + iK', \\ v = 3iL' & \text{für } u = a + 3iK', \\ v = 5iL' & \text{für } u = a + 5iK' \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

§. 215.

Vom Integrale $v = \int\limits_0 \frac{\operatorname{dn} a . du}{\sqrt{(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u)}}$.

Zur Beurtheilung des Zusammenhanges unter den beiden Argumenten u und v in §. 214. selbst ist es nöthig, die ihn ausdrückende Differenzial-Gleichung zu entwickeln. Differenziiren wir zu dem Ende die Gleichung $\operatorname{amc} v = \operatorname{amc} u$, so erhalten wir zunächst $-\operatorname{dnc} v . dv = -\operatorname{dnc} u . du$, und da $\operatorname{dnc} v = \frac{\operatorname{dnc} u . \sqrt{(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u)}}{\operatorname{dn} a}$ ist, so erhalten wir

$$dv = \frac{\operatorname{dn} a . du}{\sqrt{(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2)}}.$$

Da $\frac{\operatorname{dn} a}{\sqrt{(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u)}} = \frac{1}{\operatorname{snc} a} . \frac{1}{\sqrt{(1 + \operatorname{tn}^2 a \operatorname{dn}^2 u)}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{k'}{k'^2} \operatorname{cnc}^2 a \operatorname{cn}^2 u\right)}} =$
$\frac{k'}{\sqrt{(\lambda'^2 \operatorname{cn}^2 u + k'^2 \operatorname{sn}^2 u)}}$ ist, so kann das Differenzial-Verhältnifs in verschiedenen Formen dargestellt werden. Da $\frac{dv}{du}$ positiv und < 1 ist, aber allmälig $= 1$ wird, wenn sich u der Grenze K nähert, so wächst v beim Wachsen von u, aber so, dafs die Zunahmen von v kleiner als die von u sind; aber diese Verschiedenheit sich immer mehr der Gleichheit nähert, je näher u der Grenze K kommt.

Die Reihe für v hat, wie man bald übersieht, die Form

$$v = A . u + A_1 . \frac{\sin 2\eta u}{\mathfrak{Sin} 2\eta K'} + A_2 . \frac{\sin 4\eta u}{\mathfrak{Sin} 4\eta K'} + A_3 . \frac{\sin 6\eta u}{\mathfrak{Sin} 6\eta K'} + A_4 . \frac{\sin 8\eta u}{\mathfrak{Sin} 8\eta K'} + \ldots .$$

Setzt man hierin $u = mK$, also $v = mL$, so fällt der periodische Theil weg und man erhält $mL = A . mK$, also $A = \frac{L}{K}$; daher ist

$$v = \frac{L}{K} . u + A_1 . \frac{\sin 2\eta u}{\mathfrak{Sin} 2\eta K'} + A_2 . \frac{\sin 4\eta u}{\mathfrak{Sin} 4\eta K'} + A_2 . \frac{\sin 6\eta u}{\mathfrak{Sin} 6\eta K'} + A_3 . \frac{\sin 8\eta u}{\mathfrak{Sin} 8\eta K'} + \ldots .$$

Wächst u um $2iK'$ so mufs v um $2iL'$ zunehmen; oder, setzen wir zuerst ui statt u und vi statt v, so mufs in der Reihe

$$v = \frac{L}{K}.u + A_1.\frac{\mathfrak{Sin}\,2\eta u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta K'} + A_2.\frac{\mathfrak{Sin}\,4\eta u}{\mathfrak{Sin}\,4\eta K'} + A_3.\frac{\mathfrak{Sin}\,6\eta u}{\mathfrak{Sin}\,6\eta K'} + A_4.\frac{\mathfrak{Sin}\,8\eta u}{\mathfrak{Sin}\,8\eta K'} + \dots$$

v in $v+2L'$ übergehen, wenn u in $u+2K'$ verwandelt wird. Hiernach ist

$$v+2L' = \frac{L}{K}(u+2K') + A_1.\frac{\mathfrak{Sin}(2\eta u+4\eta K')}{\mathfrak{Sin}\,2\eta K'} + A_2.\frac{\mathfrak{Sin}(4\eta u+8\eta K')}{\mathfrak{Sin}\,4\eta K'}$$
$$+ A_3.\frac{\mathfrak{Sin}(6\eta u+12\eta K')}{\mathfrak{Sin}\,6\eta K'} + \dots$$

Wird hiervon die anfängliche Reihe subtrahirt, und beachtet man, dafs $\mathfrak{Sin}\,A - \mathfrak{Sin}\,B = 2\,\mathfrak{Sin}\,\frac{1}{2}(A-B)\,\mathfrak{Cos}\,\frac{1}{2}(A+B)$ ist, so erhält man nach der Division durch 2 die Reihe

$$L' = \frac{L}{K}.K' + A_1.\mathfrak{Cos}(2\eta u+2\eta K') + A_2.\mathfrak{Cos}(4\eta u+4\eta K')$$
$$+ A_3.\mathfrak{Cos}(6\eta u+6\eta K') + \dots$$

welche zur näheren Bestimmung der Coefficienten A_1, A_2, A_3 etc. dient. Da der Werth der Reihe von der Gröfse des Argumentes u unabhängig ist, so kann man auch u um K' vermindern und $\frac{u}{2\eta}$ statt u setzen, wodurch man erhält:

$$\frac{K.L'-L.K'}{K} = A_1.\mathfrak{Cos}\,u + A_2.\mathfrak{Cos}\,2u + A_3.\mathfrak{Cos}\,3u + A_4.\mathfrak{Cos}\,4u + \dots$$

Nach §. 52. der Theorie der Potenzial-Functionen ist aber

$$\tfrac{1}{2} = \mathfrak{Cos}\,u - \mathfrak{Cos}\,2u + \mathfrak{Cos}\,3u - \mathfrak{Cos}\,4u + - \dots$$
$$0 = 1^2\mathfrak{Cos}\,u - 2^2\mathfrak{Cos}\,2u + 3^2\mathfrak{Cos}\,3u - 4^2\mathfrak{Cos}\,4u + - \dots$$
$$0 = 1^4\mathfrak{Cos}\,u - 2^4\mathfrak{Cos}\,2u + 3^4\mathfrak{Cos}\,3u - 4^4\mathfrak{Cos}\,4u + - \dots$$
$$0 = 1^6\mathfrak{Cos}\,u - 2^6\mathfrak{Cos}\,2u + 3^6\mathfrak{Cos}\,3u - 4^6\mathfrak{Cos}\,4u + - \dots$$

u. s. w.

und multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit $2Q$, die zweite mit $2Q_1$, die folgende mit $2Q_2$, und so fort mit $2Q_3$, $2Q_4$ etc., so erhält man durch die Addition der also gebildeten Gleichungen:

$$Q = 2(Q+1^2Q_1+1^4Q_2+1^6Q_3\dots)\mathfrak{Cos}\,u - 2(Q+2^2Q_1+2^4Q_2+2^6Q_3\dots)\mathfrak{Cos}\,2u$$
$$+2(Q+3^2Q_1+3^4Q_2+3^6Q_3\dots)\mathfrak{Cos}\,3u - 2(Q+4^2Q_1+4^4Q_2+4^6Q_3\dots)\mathfrak{Cos}\,4u$$
$$+ - \dots$$

Man leistet also der vorigen Bedingungs-Gleichung Genüge, wenn man setzt:

$$Q = \frac{K.L'-L.K'}{K},$$
$$A_1 = +2(Q + Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + \dots),$$
$$A_2 = -2(Q + 2^2Q_1 + 2^4Q_2 + 2^6Q_3 + 2^8Q_4 + \dots),$$
$$A_3 = +2(Q + 3^2Q_1 + 3^4Q_2 + 3^6Q_3 + 3^8Q_4 + \dots),$$

$$A_4 = -2(Q + 4^2 Q_1 + 4^4 Q_2 + 4^6 Q_3 + 4^8 Q_4 + \ldots),$$
$$A_5 = +2(Q + 5^2 Q_1 + 5^4 Q_2 + 5^6 Q_3 + 5^8 Q_4 + \ldots)$$

u. s. w.

Die Gröfsen Q, Q_1, Q_2, Q_3 etc., welche in den Ausdrücken A_1, A_2, A_3, A_4 etc. vorkommen, hängen von den Moduln k und λ, oder auch von k und a ab. Will man jene Gröfsen bestimmen, so geht man namhaften Weitläufigkeiten entgegen; woraus soviel hervorgeht, dafs man lieber umgekehrt das Integral

$$v = \int_0 \frac{\operatorname{dn} a \,.\, du}{\sqrt{(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u)}}$$

dadurch berechnet, dafs man aus k, a und u nach den Formeln des §. 214. $\operatorname{am} v$ oder $\operatorname{amc} v$, oder auch die Modular-Functionen von v, und hieraus das Argument v selbst nach den Formeln §. 55., §. 57. und §. 58. herleitet.

§. 216.

Die conjugirten Relationen unter den Amplituden und Modular-Functionen der Argumente u und v, wenn die Moduln jener Functionen das vorhin gegebene Verhältnifs haben.

Von dem Integrale $v = \int_0 \frac{\operatorname{cn} u \,.\, du}{\sqrt{(\operatorname{snc}^2 a - \operatorname{sn}^2 u)}} = \int_0 \frac{\operatorname{dn} a \operatorname{snc} u \,.\, du}{\sqrt{(\operatorname{cn}^2 a - \operatorname{cnc}^2 u)}}$.

Wir erhalten die conjugirten Relationen dadurch, dafs wir durchgängig ui statt u, ai statt a und vi statt v setzen, indem wir zugleich jeden Modul mit dem conjugirten vertauschen. Die früheren Modular-Gleichungen $\lambda = k \operatorname{snc} a$ und $\lambda' = \frac{k'}{\operatorname{dn} a}$ verwandeln sich dadurch in $\lambda' = k' \operatorname{snc}' ai$ und $\lambda = \frac{k}{\operatorname{dn}' ai}$, oder $\lambda = k \operatorname{snc} a$ und $\lambda' = \frac{k'}{\operatorname{dn} a}$, d. h. die Modular-Gleichungen des §. 214. bleiben ungeändert. Die Gleichung $\operatorname{snc} v = \operatorname{snc} u$ verwandelt sich nun in

$$1. \quad \operatorname{dn} v = \operatorname{dn} u,$$

also ist $\lambda \operatorname{sn} v = k \operatorname{sn} u$, und hieraus folgt

$$2. \quad \operatorname{sn} v = \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{snc} a}.$$

Hierin verwandelt sich auch die Formel (5. §. 214.) unmittelbar. In gleicher Weise erhält man

3. $\operatorname{tn} v = \dfrac{\operatorname{tn} u}{\operatorname{snc} a \sqrt{(1-k'^2 \operatorname{tn}^2 a \operatorname{tn}^2 u)}} = \dfrac{\operatorname{sn} u}{\sqrt{(\operatorname{cn}^2 u \operatorname{snc}^2 a - \operatorname{sn}^2 u \operatorname{cnc}^2 a)}}$
$= \dfrac{\operatorname{sn} u}{\sqrt{(\operatorname{snc}^2 a - \operatorname{sn}^2 u)}},$

4. $\operatorname{cn} v = \sqrt{\left(1 - \dfrac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{snc}^2 a}\right)}.$

Ferner ist $\frac{\lambda}{\lambda'} \operatorname{cnc} v = \frac{k}{k'} \operatorname{cnc} u$, und da $\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{k}{k'} \operatorname{cn} a$ ist, so findet sich

5. $\operatorname{cnc} v = \dfrac{\operatorname{cnc} u}{\operatorname{cn} a}$, also $\operatorname{snc} v = \sqrt{\left(1 - \dfrac{\operatorname{cnc}^2 u}{\operatorname{cn}^2 a}\right)}.$

Die Formel (8. §. 214.) verwandelt sich nun in

6. $\mathfrak{L} \operatorname{am} v = \frac{1}{2}(\mathfrak{L} \operatorname{am}(u+a) + \mathfrak{L} \operatorname{am}(u-a)).$

Differenziirt man die Formel $\operatorname{sn} v = \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{snc} a}$, so erhält man $\operatorname{cn} v \operatorname{dn} v . dv = \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u\, d.u}{\operatorname{snc} a}$, und da $\operatorname{dn} v = \operatorname{dn} u$ und $\operatorname{cn} v = \frac{\sqrt{(\operatorname{snc}^2 a - \operatorname{sn}^2 u)}}{\operatorname{snc} a}$ ist, so ergiebt sich

7. $$v = \int_0 \frac{\operatorname{cn} u . du}{\sqrt{(\operatorname{snc}^2 a - \operatorname{sn}^2 u)}}.$$

Da sich die Formel $\operatorname{sn} v = \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{snc} a}$ in $\operatorname{cnc} v = \frac{\operatorname{cnc} u}{\operatorname{cn} a}$ verwandelt, wenn $k'u$ statt u, $k'a$ statt a, $\lambda' v$ statt v, $\frac{ik}{k'}$ statt k und $\frac{i\lambda}{\lambda'}$ statt λ gesetzt wird, und die neue Formel mit (5.) übereinstimmt, so ist die Zulässigkeit dieser Abänderung dadurch bewiesen. Hiernach verwandelt sich die Formel (6.) in

8. $\mathfrak{L}(\frac{1}{2}\pi - \operatorname{amc} u) = \frac{1}{2}[\mathfrak{L}(\frac{1}{2}\pi - \operatorname{amc}(u+a)) + \mathfrak{L}(\frac{1}{2}\pi - \operatorname{amc}(u-a))].$

Die Formel (7.) verwandelt sich zunächst in $\lambda' v = \int_0 \frac{\operatorname{snc} u . k' du}{\sqrt{(\operatorname{cn}^2 a - \operatorname{cnc}^2 u)}}$, und da $\lambda' = \frac{k'}{\operatorname{dn} a}$ ist, so ist

9. $$v = \int_0 \frac{\operatorname{dn} a \operatorname{snc} u . du}{\sqrt{(\operatorname{cn}^2 a - \operatorname{cnc}^2 u)}}.$$

Es kann die Integral-Formel §. 215. auch sogleich abgeändert werden in

10. $$v = \int_0 \frac{du}{\operatorname{snc} a \sqrt{(1 - k'^2 \operatorname{tn}^2 a \operatorname{tn}^2 u)}}.$$

Der Gleichung $\operatorname{sn} v = \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{snc} a}$ gemäfs ist

11. $$\begin{cases} v = L & \text{für} \quad u = K, \\ v = 2L & \text{für} \quad u = 2K, \\ v = 3L & \text{für} \quad u = 3K, \\ v = 4L & \text{für} \quad u = 4K \\ \quad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Der Gleichung $\operatorname{dn} v = \operatorname{dn} u$ gemäfs ist

$$12.\quad \begin{cases} v = L + iL' & \text{für}\quad u = K + iK' \text{ und} \\ v = mL + niL' & \text{für}\quad u = mK + niK', \end{cases}$$

wenn unter m und n ungerade Zahlen verstanden werden. Auch folgt noch aus der Gleichung $\operatorname{sn} v = \frac{\operatorname{sn} n}{\operatorname{snc} a}$, dafs

$$13.\quad \begin{cases} v = iL' & \text{für}\quad u = iK', \\ v = 2iL' & \text{für}\quad u = 2iK', \\ v = 3iL' & \text{für}\quad u = 3iK' \\ & \text{u. s. w. ist.} \end{cases}$$

Die Gleichung $\operatorname{dn} v = \operatorname{dn} u$ ist einerlei mit $\cos\operatorname{am}\left(\lambda v, \frac{1}{\lambda}\right) = \cos\operatorname{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right)$: daher ist

$$14.\quad \operatorname{am}\left(\lambda v, \frac{1}{\lambda}\right) = \operatorname{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right)$$

der einfachste Ausdruck des Zusammenhangs zwischen u und v mittelst der Amplituden.

§. 217.

Die Umkehrung der ursprünglichen Relationen unter den Argumenten v und u mit Moduln, welche das frühere Verhältnifs zu einander haben.

Von dem umgekehrten Integrale $u = \int_0 \frac{dv}{\operatorname{snc}' b \cdot \sqrt{(1 + \lambda^2 \operatorname{tn}'^2 b \operatorname{sn}^2 v)}}$.

Zur Umkehrung der in §. 214. entwickelten Relationen unter den Functionen der Argumente u und v ist es zweckmäfsig, noch ein Argument b dem Argumente a gegenüber zu stellen und die Functionen desselben auf den Modul λ und also auf λ' zu beziehen, wenn, wie zunächst, der conjugirte Modul zu nehmen ist. Wählen wir das Argument b so, dafs

$$1.\quad \operatorname{am}' b = \operatorname{am} a,$$

so ist auch

$$2.\quad \operatorname{sn}' b = \operatorname{sn} a,\quad \operatorname{cn}' b = \operatorname{cn} a,\quad \operatorname{tn}' b = \operatorname{tn} a.$$

Ferner ist $\lambda' \operatorname{sn}' b = \frac{k' \operatorname{sn} a}{\operatorname{dn} a}$, oder auch

$$3.\quad \begin{cases} \lambda' \operatorname{sn}' b = \operatorname{cnc} a,\quad \operatorname{dn}' b = \operatorname{snc} a,\quad \operatorname{snc}' b = \operatorname{dn} a,\quad \operatorname{cnc}' b = k \operatorname{sn} a, \\ \lambda' \operatorname{snc}' b = k',\qquad \operatorname{dnc}' b = k,\quad \text{oder}\quad k = \frac{\lambda}{\operatorname{dn}' b}. \end{cases}$$

Vergleichen wir nun die Formeln des §. 214.

$$\lambda = k \operatorname{snc} a \quad\text{und}\quad \lambda' = \frac{k'}{\operatorname{dn} a} \quad\text{mit}\quad k' = \lambda' \operatorname{snc}' b \quad\text{und}\quad k = \frac{\lambda}{\operatorname{dn}' b},$$

so haben wir den Lehrsatz: *Vertauscht man a mit b, so mufs man gleichzeitig k mit λ' und k' mit λ vertauschen.*

Es ist $\lambda \,\mathrm{tn}' b = k \,\mathrm{snc}\, a \,\mathrm{tn}\, a = \frac{k \,\mathrm{sn}\, a}{\mathrm{dn}\, a}$ und da nach §. 214. $\mathrm{sn}\, v = \frac{\mathrm{dn}\, a \,\mathrm{sn}\, u}{\sqrt{(1-k^2 \,\mathrm{sn}^2 a \,\mathrm{sn}^2 u)}}$ ist, so ist $\lambda \,\mathrm{tn}' b \,\mathrm{sn} v = \frac{k \,\mathrm{sn}\, a \,\mathrm{sn}\, u}{\sqrt{(1-k^2 \,\mathrm{sn}^2 a \,\mathrm{sn}^2 u)}}$, folglich

$$4. \quad \begin{cases} (1+\lambda^2 \,\mathrm{tn}'^2 b \,\mathrm{sn}^2 v)(1-k^2 \,\mathrm{sn}^2 a \,\mathrm{sn}^2 u) = 1, \text{ oder auch} \\ (1-\lambda^2 \,\mathrm{sn}^2 (bi) \,\mathrm{sn}^2 v)(1-k^2 \,\mathrm{sn}^2 a \,\mathrm{sn}^2 u) = 1. \end{cases}$$

Diese Formel drückt den Lehrsatz aus: *Man darf v mit u und λ mit k, also λ' mit k' vertauschen, wenn man a mit bi vertauscht.*

In Anwendung dieses Lehrsatzes, wodurch eine Reciprocität ausgedrückt wird, lassen sich alle Formeln und Bestimmungen des §. 214. sofort umkehren, wenn man nur beachtet, dafs wegen der Vertauschung der Moduln λ und k auch die Quadranten L und K und L' und K' mit einander vertauscht werden müssen.

Bei der angezeigten Veränderung bleiben die Formeln (4. §. 214.) ungeändert. Die Formel $\mathrm{tn}\, v = \mathrm{dn}\, a \,\mathrm{tn}\, u$ verwandelt sich in

$$5. \quad \begin{cases} \mathrm{tn}\, u = \frac{\mathrm{tn}\, v}{\mathrm{snc}' b}; \quad \text{ferner ist} \quad \mathrm{sn}\, u = \frac{\mathrm{sn}\, v}{\mathrm{snc}' b \sqrt{(1+\lambda^2 \,\mathrm{tn}'^2 \,\mathrm{sn}^2 v)}}, \\ \mathrm{cn}\, u = \frac{\mathrm{cn}\, v}{\sqrt{(1+\lambda^2 \,\mathrm{tn}'^2 b \,\mathrm{sn}^2 v)}} \quad \text{und} \quad \mathrm{dn}\, u = \frac{\mathrm{dn}\, v}{\sqrt{(1+\lambda^2 \,\mathrm{tn}'^2 b \,\mathrm{sn}^2 v)}} \quad \text{oder} \\ \mathrm{dnc}\, u = \frac{\mathrm{dnc}\, v \sqrt{(1+\lambda^2 \,\mathrm{tn}'^2 b \,\mathrm{sn}^2 v)}}{\mathrm{dn}\, bi} = \mathrm{snc}' b \,\mathrm{dnc}\, v \sqrt{(1+\lambda^2 \,\mathrm{tn}'^2 b \,\mathrm{sn}^2 v)}. \end{cases}$$

Die Formel (8.) verwandelt sich in

$$6. \quad \mathrm{am}\, u = \tfrac{1}{2}(\mathrm{am}(v+bi) + \mathrm{am}(v-bi))$$

und hat nun also eine imaginäre Form. Für $v = L$ ist $u = K$, für $v = 2L$ ist $u = 2K$ u. s. w. Ferner ist für

$$7. \quad \begin{cases} v = i(L'-b), & u = iK', \\ v = 2iL', & u = 2iK', \\ v = i(3L'-b), & u = 3iK', \\ v = 4iL', & u = 4iK', \\ u = i(5L'-b), & u = 5iK' \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Das im §. 215. entwickelte Integral verwandelt sich aber in

$$8. \quad u = \int_0 \frac{dv}{\mathrm{snc}' b \sqrt{(1+\lambda^2 \,\mathrm{tn}'^2 b \,\mathrm{sn}^2 v)}}.$$

Obgleich also der Zusammenhang zwischen u und v so verwickelt ist, dafs weder v durch u, noch umgekehrt u durch v sich bequem ausdrücken läfst, so ist dennoch die Differenzial-Gleichung umgekehrt worden.

§. 218.

Die Umkehrung der conjugirten Relationen unter den Functionen der Argumente v und u, deren Moduln das frühere Verhältnifs zu einander haben.

Vom Integrale $u=\int_0 \frac{\mathrm{dn}'b.\mathrm{cn}v.dv}{\sqrt{(1-\mathrm{dn}'^2b\,\mathrm{sn}^2v)}}=\int_0 \frac{\mathrm{dn}'b.\mathrm{snc}v.dv}{\sqrt{(1-\mathrm{cn}'^2b\,\mathrm{cnc}^2v)}}$.

Auch die Formeln des §. 216. können in Anwendung des in §. 217. bewiesenen allgemeinen Theorems sofort umgekehrt werden, ohne dafs der durch die Formeln §. 217. ausgedrückte Zusammenhang zwischen den beiden Constanten a und b dadurch verändert wird.

Da nämlich $\lambda'\,\mathrm{sn}'b=\frac{k'\,\mathrm{sn}\,a}{\mathrm{dn}\,a}=\mathrm{cnc}\,a$ ist, so ist $\lambda'\,\mathrm{sn}'b.\mathrm{tn}v=\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{tnc}\,a\sqrt{(1-k'^2\,\mathrm{tn}^2a\,\mathrm{tn}^2u)}}$, oder $\lambda'\,\mathrm{sn}'b\,\mathrm{tn}v=\frac{k'\,\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{tn}\,u}{\sqrt{(1-k'^2\,\mathrm{tn}^2o\,\mathrm{tn}^2u)}}$, und also

$$1.\quad (1+\lambda'^2\,\mathrm{sn}'^2b\,\mathrm{tn}^2v)(1-k'^2\,\mathrm{tn}^2a.\mathrm{tn}^2u)=1.$$

Diese Gleichung drückt aber aus, dafs u mit v vertauscht wird, wenn man k mit λ, k' mit λ' und a mit bi vertauscht. Hiernach bleibt die Gleichung

$$2.\quad \mathrm{dn}\,u=\mathrm{dn}\,v$$

ungeändert. Ferner ist

$$3.\ \begin{cases}\mathrm{sn}\,u=\mathrm{dn}'b.\mathrm{sn}v,\quad \mathrm{cn}\,u=\sqrt{(1-\mathrm{dn}'^2b\,\mathrm{sn}^2v)},\quad \mathrm{tn}\,u=\frac{\mathrm{dn}'b\,\mathrm{sn}v}{\sqrt{(1-\mathrm{dn}'^2b\,\mathrm{sn}^2v)}}\\ \qquad\text{oder}\quad \mathrm{tn}\,u=\frac{\mathrm{dn}'b.\mathrm{tn}v}{\sqrt{(1+\lambda'^2\,\mathrm{sn}'^2b\,\mathrm{tn}'^2v)}},\end{cases}$$

$$4.\quad \mathrm{cnc}\,u=\mathrm{cn}'b\,\mathrm{cnc}\,v,\quad \mathrm{snc}\,u=\sqrt{(1-\mathrm{cn}'^2b\,\mathrm{cnc}^2v)},$$

$$5.\quad \mathfrak{L}\,\mathrm{am}\,u=\tfrac{1}{2}[\mathfrak{L}\,\mathrm{am}(v+bi)+\mathfrak{L}\,\mathrm{am}(v-bi)],$$

$$6.\quad \mathrm{am}\left(ku,\frac{1}{k}\right)=\mathrm{am}\left(\lambda u,\frac{1}{\lambda}\right).$$

Die Formeln (7. und 10. §. 216.) aber verwandeln sich in

$$7.\quad u=\int\frac{\mathrm{dn}'b\,\mathrm{cn}v.dv}{\sqrt{(1-\mathrm{dn}'^2b\,\mathrm{sn}^2v)}}=\int\frac{\mathrm{dn}'b\,\mathrm{snc}\,v.dv}{\sqrt{(1-\mathrm{cn}'^2b\,\mathrm{cnc}^2v)}}=\int\frac{\mathrm{dn}'b.dv}{\sqrt{(1+\lambda'^2\,\mathrm{sn}'^2b\,\mathrm{tn}^2v)}}.$$

Ferner ist

$$8.\ \begin{cases}u=K & \text{für}\quad v=L-bi,\\ u=2K & \text{für}\quad v=2L,\\ u=3K & \text{für}\quad v=3L-bi,\\ u=4K & \text{für}\quad v=4L,\\ u=5K & \text{für}\quad v=5L-bi\\ \quad\text{u. s. w.}\end{cases}$$

Auch ist $u=iK'$ für $v=iL'$ und $u=K+iK'$ für $v=L+iL'$. Die Formeln (8.) gelten vereint mit den Formeln (10. §. 237.), daher gehören

folgende Werthe zusammen:

$$9. \quad \begin{cases} u = K \pm a, & v = L, \\ u = K, & v = L \pm bi, \\ u = 2K, & v = 2L, \\ u = 3K \pm a, & v = 3L, \\ u = 3K, & v = 3L \pm bi, \\ u = 4K, & v = 4L, \\ u = 5K \pm a, & v = 5L, \\ u = 5K, & v = 5L \pm bi \end{cases}$$

u. s. w.

§. 219.

Ein neues Geschlecht von Integralen, welche sich als Modular-Integrale der zweiten Art darstellen lassen.

Wir befassen uns zunächst mit denjenigen Integralen, welche sich als Modular-Integrale der ersten Classe darstellen lassen. Nach §. 118. ist mit Beziehung auf den Modul λ, woran schon die Gröfsen v und b erinnern,

$$\mathrm{S}(v, b) = \int_0 \frac{\lambda^2 \operatorname{tn}' b \operatorname{dn}' b . \operatorname{sn}^2 v . dv}{\operatorname{sn}'^2 b (1 + \lambda^2 \operatorname{tn}'^2 b . \operatorname{sn}^2 v)},$$

$$\mathrm{C}(v, b) = \int_0 \frac{\lambda^2 \operatorname{tn}' b . \operatorname{cn}^2 v . dv}{\operatorname{dn}' b (1 + \lambda^2 \operatorname{tn}'^2 b . \operatorname{sn}^2 v)},$$

$$\mathrm{D}(v, b) = \int_0 \frac{\operatorname{tn}' b \operatorname{dn}' b . \operatorname{dn}^2 v . dv}{1 + \lambda^2 \operatorname{tn}'^2 b . \operatorname{sn}^2 v}.$$

Da nun nach §. 217. $\dfrac{1}{1 + \lambda^2 \operatorname{tn}'^2 b \operatorname{sn}^2 v} = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u$ und $dv = \dfrac{\operatorname{dn} a . du}{\sqrt{(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u)}}$, also

$$\frac{dv}{1 + \lambda^2 \operatorname{tn}'^2 b \operatorname{sn}^2 v} = \operatorname{dn} a . du \sqrt{(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u)}$$

ist, so erhält man

$$\frac{\operatorname{sn}^2 v . dv}{1 + \lambda^2 \operatorname{tn}'^2 b \operatorname{sn}^2 v} = \frac{\operatorname{dn}^3 a . \operatorname{sn}^2 u . du}{\sqrt{(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u)}},$$

$$\frac{\operatorname{cn}^2 v . dv}{1 + \lambda^2 \operatorname{tn}'^2 b \operatorname{sn}^2 v} = \frac{\operatorname{dn} a . \operatorname{cn}^2 u . du}{\sqrt{(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u)}},$$

$$\frac{\operatorname{dn}^2 v . dv}{1 + \lambda^2 \operatorname{tn}'^2 b \operatorname{sn}^2 v} = \frac{\operatorname{dn} a . \operatorname{dn}^2 u . du}{\sqrt{(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u)}}.$$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit $\dfrac{\lambda^2 \operatorname{tn}' b \operatorname{dn}' b}{\operatorname{cn}'^2 b}$, welches nach

§. 217. gleich $\frac{k^2 \operatorname{sn} a}{\operatorname{dn}^3 a}$ ist, die zweite Gleichung aber mit $\frac{\lambda^2 \operatorname{tn}' b}{\operatorname{dn}' b} = \frac{k^2 \operatorname{sn} a}{\operatorname{dn} a}$ und die dritte mit $\operatorname{tn}' b \operatorname{dn}' b = \frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{dn} a}$, so erhält man durch die Integration die drei Formeln

$$1. \quad \begin{cases} \mathrm{S}(v, b) = \int_0 \frac{k^2 \operatorname{sn} a . \operatorname{sn}^2 u . du}{\sqrt{(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u)}}, \\ \mathrm{C}(v, b) = \int_0 \frac{k^2 \operatorname{sn} a . \operatorname{cn}^2 u . du}{\sqrt{(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u)}}, \\ \mathrm{D}(v, b) = \int_0 \frac{\operatorname{sn} a . \operatorname{dn}^2 u . du}{\sqrt{(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u)}}, \end{cases}$$

in welchen die Gröfsen u und v, so wie a und b nach den in §. 214. und §. 217. entwickelten Formeln von einander abhängen.

Vertauschen wir in diesen Formeln λ und k, u und v, a und bi, so erhalten wir die reciproken Formeln

$$2. \quad \begin{cases} \mathfrak{S}(u, a) = \int_0 \frac{\lambda^2 \operatorname{tn}' b . \operatorname{sn}^2 v . dv}{\sqrt{(1 + \lambda^2 \operatorname{tn}'^2 b . \operatorname{sn}^2 v)}}, \\ \mathfrak{C}(u, a) = \int_0 \frac{\lambda^2 \operatorname{tn}' b . \operatorname{cn}^2 v \, dv}{\sqrt{(1 + \lambda^2 \operatorname{tn}'^2 b . \operatorname{sn}^2 v)}}, \\ \mathfrak{D}(u, a) = \int_0 \frac{\operatorname{tn}' b . \operatorname{dn}^2 v . dv}{\sqrt{(1 + \lambda^2 \operatorname{tn}'^2 b . \operatorname{sn}^2 v)}}, \end{cases}$$

in welchen der Zusammenhang zwischen u und v, zwischen a und b und den Moduln λ und k derselbe ist, wie in §. 214. und §. 217. Die drei Modular-Integrale haben den Modul k.

Vertauschen wir in den Formeln (1.) die conjugirten Modul, also k mit k' und λ mit λ', indem wir ai statt a, bi statt b, ui statt u und vi statt v setzen, so erhalten wir

$$3. \quad \begin{cases} {}'\mathrm{S}(v, b) = \int_0 \frac{k'^2 \operatorname{tn} a \operatorname{tn}^2 u . du}{(1 - k'^2 \operatorname{tn}^2 a \operatorname{tn}^2 u)} = \int_0 \frac{k'^2 \operatorname{tn} a . \operatorname{sn}^2 u . du}{\operatorname{cn} u \sqrt{\left(1 - \frac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{snc}^2 a}\right)}}, \\ {}'\mathrm{C}(v, b) = \int_0 \frac{k'^2 \operatorname{tn} a . du}{\operatorname{cn}^2 u \sqrt{(1 - k'^2 \operatorname{tn}^2 a \operatorname{tn}^2 u)}} = \int_0 \frac{k'^2 \operatorname{tn} a . du}{\operatorname{cn} u \sqrt{\left(1 - \frac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{snc}^2 a}\right)}}, \\ {}'\mathrm{D}(v, b) = \int_0 \frac{\operatorname{tn} a . \operatorname{dn}^2 u . du}{\operatorname{cn}^2 u \sqrt{(1 - k'^2 \operatorname{tn}^2 a \operatorname{tn}^2 u)}} = \int_0 \frac{\operatorname{tn} a . \operatorname{dn}^2 u . du}{\operatorname{cn} u \sqrt{\left(1 - \frac{\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{snc}^2 a}\right)}}. \end{cases}$$

In diesen Formeln beziehen sich die Integrale $'\mathrm{S}(v, b)$, $'\mathrm{C}(v, b)$ und $'\mathrm{D}(v, b)$ wieder auf den Modul λ. Den Zusammenhang zwischen u und v drücken die Formeln §. 216. und die §. 218. aus. Der Zusammenhang zwischen a und b, λ und k, λ' und k' aber ist der frühere.

Durch dasselbe Verfahren verwandeln sich die Formeln (2.) in

$$4.\quad \begin{cases} {}'\mathfrak{S}(u,a) = \int_0 \frac{\lambda'^2 \operatorname{sn}'b \operatorname{tn}^2 v . dv}{\sqrt{(1+\lambda'^2 \operatorname{sn}'^2 b \operatorname{tn}^2 v)}} = \int_0 \frac{\lambda'^2 \operatorname{sn}'b \operatorname{sn}^2 v . dv}{\operatorname{cn} v \sqrt{(1-\operatorname{dn}'^2 b \operatorname{sn}^2 v)}}, \\ {}'\mathfrak{C}(u,a) = \int_0 \frac{\lambda'^2 \operatorname{sn}'b . dv}{\operatorname{cn}^2 v \sqrt{(1+\lambda'^2 \operatorname{sn}'^2 b \operatorname{tn}^2 v)}} = \int_0 \frac{\lambda'^2 \operatorname{sn}'b . dv}{\operatorname{cn} v \sqrt{(1-\operatorname{dn}'^2 b \operatorname{sn}^2 v)}}, \\ {}'\mathfrak{D}(u,a) = \int_0 \frac{\operatorname{sn}'b \operatorname{dn}^2 v . dv}{\operatorname{cn}^2 v \sqrt{(1+\lambda'^2 \operatorname{sn}'^2 b \operatorname{tn}^2 v)}} = \int_0 \frac{\operatorname{sn}'b \operatorname{dn}^2 v . dv}{\operatorname{cn} v \sqrt{(1-\operatorname{dn}'^2 b \operatorname{sn}^2 v)}}. \end{cases}$$

In diesen Formeln ist der Zusammenhang zwischen u und v wieder derselbe, wie in §. 216. und §. 218.

Zusatz. Aus den Formeln $dv = \frac{\operatorname{dn} a . du}{\sqrt{(1-k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u)}}$ und $\operatorname{dn}^2 v = \frac{\operatorname{dn}^2 u}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u}$ folgt durch Multiplication und Integration:

$$5.\quad \operatorname{el} v = \int_0 \frac{\operatorname{dn} a \operatorname{dn}^2 u . du}{\sqrt{(1-k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u)^3}}.$$

Aus den Formeln $du = \frac{dv}{\operatorname{snc}'b \sqrt{(1+\lambda^2 \operatorname{tn}'^2 b \operatorname{sn}^2 v)}}$ und $\operatorname{dn}^2 u = \frac{\operatorname{dn}^2 v}{1+\lambda^2 \operatorname{tn}'^2 b \operatorname{sn}^2 v}$ folgt auf gleiche Weise die reciproke Formel

$$6.\quad \operatorname{el} u = \int_0 \frac{\operatorname{dn}^2 v . dv}{\operatorname{snc}'b \sqrt{(1+\lambda^2 \operatorname{tn}'^2 b \operatorname{sn}^2 v)^3}}.$$

Der Zusammenhang zwischen u und v in diesen Formeln ist derselbe wie in §. 214. und §. 217. Aus den Formeln $dv = \frac{\operatorname{cn} u . du}{\sqrt{(\operatorname{snc}^2 a - \operatorname{sn}^2 u)}}$ und $\operatorname{dn} v = \operatorname{dn} u$ §. 116. folgt

$$7.\quad \operatorname{el} v = \int_0 \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn}^2 u . du}{\sqrt{(\operatorname{snc}^2 a - \operatorname{sn}^2 u)}}.$$

Die reciproke Formel ist also

$$8.\quad \operatorname{el} u = \int_0 \frac{\operatorname{dn}'b \operatorname{cn} v \operatorname{dn}^2 v . dv}{\sqrt{(1-\operatorname{dn}'^2 b \operatorname{sn}^2 v)}}.$$

Der Zusammenhang zwischen u und v in diesen Formeln (7. und 8.) ist derselbe wie in §. 216. und §. 218. Die Function $\operatorname{el} v$ bezieht sich auf den Modul $\lambda = k \operatorname{snc} a$ und die Function $\operatorname{el} u$ auf den Modul $k = \frac{\lambda}{\operatorname{dn}'b}$.

§. 220.

Reihen für die Integrale $\int_0^u -u . d \operatorname{amc} u$ und $\int_0^u u . d \operatorname{am} u$.

Differenziirt man das Product $u . \operatorname{amc} u$, so erhält man $d(u . \operatorname{amc} u) = u . d \operatorname{amc} u + \operatorname{amc} u . du$; daher ist rückwärts:

$$\int_0 u.d\,\mathrm{amc}\,u = u.\mathrm{amc}\,u - \int_0 \mathrm{amc}\,u.du \text{ und eben so}$$

$$\int_0 u.\,d\,\mathrm{am}\,u = u.\,\mathrm{am}\,u - \int_0 \mathrm{am}\,u.du.$$

Diesen Formeln gemäfs hat man nur die Integrale $\int_0 \mathrm{am}\,u.du$ und $\int_0 \mathrm{amc}\,u.du$ in Reihen zu entwickeln, und zwar in solche, welche rasch convergiren, wenn der Modul $k < \sin\frac{1}{4}\pi$ ist, und auch in solche, deren Convergenz grofs ist, wenn $k > \sin\frac{1}{4}\pi$ ist.

Es ist $\mathrm{am}\,u = \eta u + \frac{\sin 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta K'} + \frac{1}{2}.\frac{\sin 4\eta u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta K'} + \frac{1}{3}.\frac{\sin 6\eta u}{\mathfrak{Cos}\,6\eta K'} + \ldots$ Multiplicirt man diese Reihe mit $\eta\,du$, so erhält man durch Integration:

$$\int_0 \mathrm{am}\,u.d(\eta u) = \text{const.} + \frac{\eta^2 u^2}{2} - \frac{1}{2}.\frac{\cos 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta K'} - \frac{1}{8}.\frac{\cos 4\eta u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta K'} - \frac{1}{18}.\frac{\cos 6\eta u}{\mathfrak{Cos}\,6\eta K'} - \ldots$$

Setzt man, um die Constante zu finden, $u = 0$, so hat man

$$0 = \text{const.} - \frac{1}{2}.\frac{1}{\mathfrak{Cos}\,2\eta K'} - \frac{1}{8}.\frac{1}{\mathfrak{Cos}\,4\eta K'} - \frac{1}{18}.\frac{1}{\mathfrak{Cos}\,6\eta K'} - \ldots;$$

daher erhält man durch Subtraction:

$$1.\ \int_0 \mathrm{am}\,u.d(\eta u) = \frac{\eta^2 u^2}{2} + \frac{\sin^2 \eta u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta K'} + \frac{1}{4}.\frac{\sin^2 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta K'} + \frac{1}{9}.\frac{\sin^2 3\eta u}{\mathfrak{Cos}\,6\eta K'} + \frac{1}{16}.\frac{\sin^2 4\eta u}{\mathfrak{Cos}\,8\eta K'} + \ldots$$

Da $\frac{1}{2}\pi - \mathrm{amc}\,u = \eta u - \frac{\sin 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta K'} + \frac{1}{2}.\frac{\sin 4\eta u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta K'} - \frac{1}{3}.\frac{\sin 6\eta u}{\mathfrak{Cos}\,6\eta K'} + - \ldots$, so findet man auf gleiche Weise

$$2.\ \int_0 (\tfrac{1}{2}\pi - \mathrm{amc}\,u)\,d(\eta u) = \frac{\eta^2 u^2}{2} - \frac{\sin^2 \eta u}{\mathfrak{Cos}\,2\eta K'} + \frac{1}{4}.\frac{\sin^2 2\eta u}{\mathfrak{Cos}\,4\eta K'} - \frac{1}{9}.\frac{\sin^2 3\eta u}{\mathfrak{Cos}\,6\eta K'} + \frac{1}{16}.\frac{\sin^2 4\eta u}{\mathfrak{Cos}\,8\eta K'} - + \ldots$$

Die Reihe

$$\mathrm{am}\,u = l(\eta' u) + 2p.\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,\eta' K} - \frac{2p^3}{3}.\frac{\mathfrak{Sin}\,3\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,3\eta' K} + \frac{2p^5}{5}.\frac{\mathfrak{Sin}\,5\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,5\eta' K} - \frac{2p^7}{7}.\frac{\mathfrak{Sin}\,7\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,7\eta' K} + - \ldots$$

giebt, mit $d(\eta' u)$ multiplicirt, wenn man der Kürze wegen

$$\int_0 l(\eta' u).d(\eta' u) = \Phi(\eta' u) \text{ setzt,}$$

$$\int_0 \mathrm{am}\,u.d(\eta' u) = \Phi(\eta' u) + 2p.\frac{\mathfrak{Cos}\,\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,\eta' K} - \frac{2p^3}{9}.\frac{\mathfrak{Cos}\,3\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,3\eta' K} + \frac{2p^5}{25}.\frac{\mathfrak{Cos}\,5\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,5\eta' K} - + \ldots + \text{const.},$$

und wird $u = 0$ gesetzt, so hat man

$$0 = \frac{2p}{\mathfrak{Sin}\,\eta' K} - \frac{2p^3}{3^2}.\frac{1}{\mathfrak{Sin}\,3\eta' K} + \frac{2p^5}{5^2}.\frac{1}{\mathfrak{Sin}\,5\eta' K} - \ldots + \text{const.},$$

also ist

$$3.\ \int_0 \mathrm{am}\,u.d(\eta' u) = \Phi(\eta' a) + \frac{4p}{1^2}.\frac{\mathfrak{Sin}^2\frac{1}{2}(\eta' u)}{\mathfrak{Sin}\,\eta' K} - \frac{4p^3}{3^2}.\frac{\mathfrak{Sin}^2\frac{1}{2}(3\eta' u)}{\mathfrak{Sin}\,3\eta' K} + \frac{4p^5}{5^2}.\frac{\mathfrak{Sin}^2\frac{1}{2}(5\eta' u)}{\mathfrak{Sin}\,5\eta' K} - \frac{4p^7}{7^2}.\frac{\mathfrak{Sin}^2\frac{1}{2}(7\eta' u)}{\mathfrak{Sin}\,7\eta' K} + - \ldots$$

Diese Reihe convergirt desto rascher, je gröfser der Modul k ist. Es bleibt noch das Integral $\Phi(\eta' u)$ nachträglich zu entwickeln übrig. Es ist bekanntlich $l(\eta' u) = \frac{1}{2}\pi - 2 \operatorname{arc\,tang}(e^{-\eta' u}) = \frac{1}{2}\pi - 2e^{-\eta' u} + \frac{2}{3}e^{-3\eta' u} - \frac{2}{5}e^{-5\eta' u} + \ldots.;$ daher ist

$$\Phi(\eta' u) = -\text{const.} + \tfrac{1}{2}\pi.\eta' u + 2e^{-\eta' u} - \frac{2}{3^2}.e^{-3\eta' u} + \frac{2}{5^2}.e^{-5\eta' u} - \frac{2}{7^2}.e^{-7\eta' u} + - \ldots.$$

Setzt man, um die Constante zu finden, $u = 0$, so hat man

$$\text{const.} = \mu = 2 - \frac{2}{3^2} + \frac{2}{5^2} - \frac{2}{7^2} + \frac{2}{9^2} - \ldots., \quad \text{also}$$

$$\Phi(\eta' u) = \tfrac{1}{2}\pi.\eta' u - \mu + 2.e^{-\eta' u} - \frac{2}{3^2}.e^{-3\eta' u} + \frac{2}{5^2}.e^{-5\eta' u} - \frac{2}{7^2}.e^{-7\eta' u} + \frac{2}{9^2}.e^{-9\eta' u} - + \ldots.$$

Im achten Bande des gegenwärtigen Journals befindet sich eine von *Clausen* berechnete Tabelle der Werthe der Reihe $\sin\varphi + \frac{1}{2^2}\sin 2\varphi + \frac{1}{4^2}\sin 4\varphi \ldots.$ Setzt man in dieser Reihe $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, so wird sie die Reihe für $\frac{1}{2}\mu$, also $\frac{1}{2}\mu = 0{,}91596\ 55941\ 772190$, und folglich

$$\mu = 1{,}83193\ 11883\ 544380.$$

Andere Reihen für das Integral $\Phi(\eta' u)$ findet man an einer späteren Stelle.

Gehen wir nun von der Reihe

$$\tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{amc} u = 2.\frac{\operatorname{Sin}\eta' u}{\operatorname{Sin}\eta' K} - \frac{2}{3}.\frac{\operatorname{Sin} 3\eta' u}{\operatorname{Sin} 3\eta' K} + \frac{2}{5}.\frac{\operatorname{Sin} 5\eta' u}{\operatorname{Sin} 5\eta' K} - + \ldots.$$

aus, so finden wir sofort

$$4. \quad \int_0 (\tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{amc} u)\, d(\eta' u) =$$

$$4.\frac{\operatorname{Sin}^2 \frac{1}{2}(\eta' u)}{\operatorname{Sin}\eta' K} - \frac{4}{3^2}.\frac{\operatorname{Sin}^2 \frac{1}{2}(3\eta' u)}{\operatorname{Sin} 3\eta' K} + \frac{4}{5^2}.\frac{\operatorname{Sin}^2 \frac{1}{2}(5\eta' u)}{\operatorname{Sin} 5\eta' K} - \frac{4}{7^2}.\frac{\operatorname{Sin}^2 \frac{1}{2}(7\eta' u)}{\operatorname{Sin} 7\eta' K} + - \ldots.$$

Aus den vorstehenden Reihen folgt

$$5. \begin{cases} \displaystyle\int_0^u \eta u.\, d \operatorname{am} u = \eta u.\operatorname{am} u - \frac{\eta^2 u^2}{2} - \frac{\sin^2 \eta u}{1.\operatorname{Cos} 2\eta K'} - \frac{\sin^2 2\eta u}{4.\operatorname{Cos} 4\eta K'} - \frac{\sin^2 3\eta u}{9.\operatorname{Cos} 6\eta K'} \\ \displaystyle\qquad - \frac{\sin^2 4\eta u}{16.\operatorname{Cos} 8\eta K'} - \ldots., \\ \displaystyle\int_0^u -\eta u.\, d \operatorname{amc} u = \eta u(\tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{amc} u) - \frac{\eta^2 u^2}{2} + \frac{\sin^2 \eta u}{1.\operatorname{Cos} 2\eta K'} - \frac{\sin^2 2\eta u}{4.\operatorname{Cos} 4\eta K'} \\ \displaystyle\qquad + \frac{\sin^2 3\eta u}{9.\operatorname{Cos} 6\eta K'} - \frac{\sin^2 4\eta u}{16.\operatorname{Cos} 8\eta K'} + - \ldots., \\ \displaystyle\int_0^u \eta' u.\, d \operatorname{am} u = \eta' u.\operatorname{am} u - \Phi(\eta' u) - \frac{4p}{1^2}.\frac{\operatorname{Sin}^2 \frac{1}{2}(\eta' u)}{\operatorname{Sin}\eta' K} + \frac{4p^3}{3^2}.\frac{\operatorname{Sin}^2 \frac{1}{2}(3\eta' u)}{\operatorname{Sin} 3\eta' K} \\ \displaystyle\qquad - \frac{4p^6}{5^2}.\frac{\operatorname{Sin}^2 \frac{1}{2}(5\eta' u)}{\operatorname{Sin} 5\eta' K} + - \ldots., \\ \displaystyle\int_0^u -\eta' u.\, d \operatorname{amc} u = \eta' u(\tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{amc} u) - 4.\frac{\operatorname{Sin}^2 \frac{1}{2}(\eta' u)}{\operatorname{Sin}\eta' K} + \frac{4}{3^2}.\frac{\operatorname{Sin}^2 \frac{1}{2}(3\eta' u)}{\operatorname{Sin} 3\eta' K} \\ \displaystyle\qquad - \frac{4}{5^2}.\frac{\operatorname{Sin}^2 \frac{1}{2}(5\eta' u)}{\operatorname{Sin} 5\eta' K} + - \ldots., \end{cases}$$

Die beiden ersten von diesen Reihen convergiren rasch, wenn $k < \sin\frac{1}{4}\pi$ oder nicht viel $> \sin\frac{1}{4}\pi$ ist; die beiden letzten convergiren rasch, wenn $k > \sin\frac{1}{4}\pi$ ist.

§. 221.

Merkwürdige Ausdrücke für $\operatorname{el} u$ und $\operatorname{elc} u$.

Setzt man in §. 96. die willkürlichen Gröfsen $b' = 1$, $a' = 0$, $b = 0$ und $a' = 1$, so erhält man, der dortigen Formel $\alpha\, d\alpha' - \alpha'\, d\alpha = \frac{1}{2}(b\,a' - a\,b').\frac{dk}{k\,k'^2}$ gemäfs, $K\,dK' - K'\,dK = -\frac{1}{2}\pi.\frac{dk}{k\,k'^2}$, und wird, wie früher in §. 175. und §. 179.,

$$v = \eta\,K' = \tfrac{1}{2}\pi.\frac{K'}{K} \quad \text{und} \quad v' = \eta'\,K = \tfrac{1}{2}\pi.\frac{K}{K'}$$

gesetzt, so ist $dv = \frac{1}{2}\pi.\frac{K\,dK' - K'\,dK}{K^2}$, also $dv = -\left(\frac{\pi}{2\,K}\right)^2\frac{dk}{k\,k'^2}$, oder

$$dv = -\eta^2.\frac{dk}{k\,k'^2},$$

und also rückwärts $dk = -\frac{1}{\eta^2}.k\,k'^2.dv$. Wird dieser Werth in den Formeln §. 93. substituirt, so erhält man

$$1.\ \left\{\begin{aligned} \frac{dK}{dv} &= -\frac{E - k'^2\,K}{\eta^2}, & \frac{dE}{dv} &= \frac{k'^2\,(K - E)}{\eta^2}, \\ \frac{dK'}{dv} &= \frac{E' - k^2\,K}{\eta^2}, & \frac{dE'}{dv} &= -\frac{k^2\,(K' - E')}{\eta^2}, \\ \frac{d(K - E)}{dv} &= -\frac{k^2.E}{\eta^2}, & \frac{d(K' - E')}{dv} &= \frac{k'^2.E'}{\eta^2}. \end{aligned}\right.$$

Ferner ist $\eta = \frac{\pi}{2K}$, also $d\eta = -\frac{1}{2}\pi.\frac{dK}{K^2}$; also ist

$$2.\quad \frac{d\eta}{dv} = \frac{E - k'^2\,K}{\frac{1}{2}\pi} = \frac{2\,E}{\pi} - \frac{k'^2}{\eta}.$$

Nach §. 90. ist $k.\frac{du}{dk} = \frac{du - k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{snc} u}{k'^2} - u = \frac{E - \operatorname{elc} u}{k'^2} - u$, wenn $\operatorname{am} u$ als constant angesehen wird; daher ist unter derselben Voraussetzung

$$3.\quad \frac{du}{dv} = \frac{k'^2.u - (E - \operatorname{elc} u)}{\eta^2}.$$

Addirt man die Gleichungen $\frac{u\,d\eta}{dv} = \frac{2\,E.u}{\pi} - \frac{k'^2\,u}{\eta}$ und $\frac{\eta\,du}{dv} = \frac{k'^2\,u}{\eta} - \frac{E - \operatorname{elc} u}{\eta}$, so erhält man

$$\frac{d(\eta u)}{dv} = \frac{\operatorname{elc} u}{\eta} - \frac{E(K - u)}{\frac{1}{2}\pi}.$$

Da $\eta u = \frac{1}{2}\pi - \eta(K - u)$, also $d(\eta u) = -d(\eta(K - u))$ ist, so findet sich

$$\frac{-d(\eta(K - u))}{dv} = \frac{\operatorname{elc} u}{\eta} - \frac{E(K - u)}{\frac{1}{2}\pi}.$$

Setzt man in dieser Gleichung $K-u$ statt u, so erhält man $\frac{-d(\eta u)}{dv} = \frac{\mathrm{el}\,u}{\eta} - \frac{Eu}{\frac{1}{2}\pi}$ unter der Voraussetzung, daſs $\mathrm{amc}\,u$ constant ist, und also rückwärts

$$4. \quad \begin{cases} \mathrm{el}\,u = \frac{E}{K}u - \eta . \frac{d(\eta u)}{dv} \text{ für } \mathrm{amc}\,u = \text{const. und} \\ \mathrm{elc}\,u = E - \frac{E}{K}u + \eta . \frac{d(\eta u)}{dv} \text{ für } \mathrm{am}\,u = \text{const.} \end{cases}$$

Es ist nicht gleichgültig, welche von den beiden Gröſsen $\mathrm{am}\,u$ und $\mathrm{amc}\,u$ als constant angesehen wird, da das Product $\tang \mathrm{am}\,u . \tang \mathrm{amc}\,u = \frac{1}{k'}$ ist und also von $v = \eta K'$ abhängt.

Da $v.v' = (\frac{1}{2}\pi)^2$, so ist $dv = (\frac{1}{2}\pi)^2 . \frac{-dv'}{v'^2} = -\left(\frac{K'}{K}\right)^2 . dv'$ oder $dv = -\frac{\eta^2}{\eta'^2}.dv'$: daher ist

$$5. \quad \frac{du}{dv'} = \frac{E - \mathrm{elc}\,u - k'^2 u}{\eta'^2} \text{ für } \mathrm{am}\,u = \text{const.},$$

$$\frac{dK}{dv'} = \frac{E - k'^2 K}{\eta'^2}, \text{ also}$$

$$\frac{d(K-u)}{dv'} = \frac{\mathrm{elc}\,u - k'^2(K-u)}{\eta'^2} \text{ für } \mathrm{am}\,u = \text{const., oder}$$

$$6. \quad \frac{du}{dv'} = \frac{\mathrm{el}\,u - k'^2 . u}{\eta'^2} \text{ für } \mathrm{amc}\,u = \text{const.}$$

Vertauscht man in der Gleichung (2.) die conjugirten Modul, so erhält man $\frac{d\eta'}{dv'} = \frac{2E'}{\pi} - \frac{k^2}{\eta'}$, oder

$$\frac{u.d\eta'}{dv'} = \frac{\left(\frac{E'}{K'} - k^2\right)u}{\eta'},$$

und da der Formel (6.) gemäſs $\frac{\eta' du}{dv'} = \frac{\mathrm{el}\,u - k'^2 u}{\eta'}$ ist, so erhält man durch Addition

$$\frac{d(\eta' u)}{dv'} = \frac{\mathrm{el}\,u - \left(1 - \frac{E'}{K'}\right)u}{\eta'},$$

oder rückwärts

$$7. \quad \mathrm{el}\,u = \left(1 - \frac{E'}{K'}\right).u + \eta' . \frac{d(\eta' u)}{dv'} \text{ für } \mathrm{amc}\,u = \text{const.}$$

Setzt man in dieser Gleichung $K-u$ statt u, so erhält man $\mathrm{elc}\,u = \left(1 - \frac{E'}{K'}\right)(K-u) + \eta' . \frac{d(v' - \eta' u)}{dv'} = \left(1 - \frac{E'}{K'}\right)K + \eta' - \left(1 - \frac{E'}{K'}\right)u - \eta' . \frac{d(\eta' u)}{dv'}$, und da $1 - \frac{E}{K} - \frac{E'}{K'} = -\frac{\pi}{2KK'}$, also $\left(1 - \frac{E'}{K'}\right)K = E - \eta'$ ist, so erhält man

$$8. \quad \mathrm{elc}\,u = E - \left(1 - \frac{E'}{K'}\right)u - \eta' . \frac{d(\eta' u)}{dv'} \text{ für } \mathrm{am}\,u = \text{const.}$$

§. 222.

Reihen für die Integrale $\int_0 - \text{el}u.d\,\text{amc}u$ und $\int_0 \text{elc}u.d\,\text{am}u$.

Da nach §. 221. $\text{el}u = \frac{E}{K}.u - \eta.\frac{d(\eta u)}{dv}$, wenn $v = \eta K$ ist und $\text{amc}u$ als constant angesehen wird, so ist auch

$$-\text{el}u.d\,\text{amc}u = -\frac{E}{K}u.d\,\text{amc}u + \eta.\frac{d(\eta u).d\,\text{amc}u}{dv} \text{ und also}$$

$$\int_0^u - \text{el}u.d\,\text{amc}u = \frac{E}{\pi}.\int_0^u - u.d\,\text{amc}u + \eta.\int_0^u d(\eta u).\frac{d\,\text{amc}u}{dv}, \text{ oder auch}$$

$$\int_0^u - \text{el}u.d\,\text{amc}u = \frac{2E}{\pi}.\int_0^u - \eta u.d\,\text{amc}u + \eta.\int_0^u \frac{d(\eta u).d\,\text{amc}u}{dv}.$$

Das Integral $\int_0^u - \eta u.d\,\text{amc}u$ wurde schon im §. 220. entwickelt; das Integral $\int_0^u \frac{d(\eta u).d\,\text{amc}u}{dv}$ aber kann auf zwei verschiedene Arten gefunden werden: man kann entweder $d(\eta u).\text{amc}u$ nach u integriren und das Integral wieder in Beziehung auf v so differenziiren, dafs u und ηu als constant betrachtet werden, worauf man durch dv dividirt, oder man kann auch zuerst das Differenzial-Verhältnifs $\frac{d\,\text{amc}u}{dv}$ in der angegebenen Weise entwickeln, dieses dann mit $d(\eta u)$ multipliciren und integriren; beide Verfahrungs-Arten führen zu demselben Resultate.

Da $\text{amc}u = \frac{1}{2}\pi - \eta u + \frac{\sin 2\eta u}{\text{Cos}2v} - \frac{1}{2}.\frac{\sin 4\eta u}{\text{Cos}4u} + \frac{1}{3}.\frac{\sin 6\eta u}{\text{Cos}6v} - \frac{1}{4}.\frac{\sin 8\eta u}{\text{Cos}8v} + - \ldots$ ist, so ist

$$\frac{d\,\text{amc}u}{dv} = -2.\frac{\text{Tang}2v.\sin 2\eta u}{\text{Cos}2v} + 2.\frac{\text{Tang}4v.\sin 4\eta u}{\text{Cos}4v} - 2.\frac{\text{Tang}6v.\sin 6\eta u}{\text{Cos}6v} + - \ldots,$$

und also

$$\int_0^u \frac{d(\eta u).d\,\text{amc}u}{dv}$$

$$= -2.\frac{\text{Tang}2v.\sin^2\eta u}{\text{Cos}2v} + \frac{2}{2}.\frac{\text{Tang}4v.\sin^2 2\eta u}{\text{Cos}4v} - \frac{2}{3}.\frac{\text{Tang}6v.\sin^2 3\eta u}{\text{Cos}6v} + \ldots$$

Substituiren wir auch die zweite von den Reihen (5. §. 220.), so erhalten wir

$$1. \int_0^u - \text{el}.d\,\text{amc}u =$$

$$\frac{2E}{\pi}\left\{\frac{1}{2}\pi - \text{amc}u)\eta u - \frac{\eta^2u^2}{2} + \frac{\sin^2\eta u}{1.\text{Cos}2\eta K'} - \frac{\sin^2 2\eta u}{4.\text{Cos}4\eta K'} + \frac{\sin^2 3\eta u}{9.\text{Cos}6\eta K'} - \frac{\sin^2 4\eta u}{16.\text{Cos}8\eta u} + - \ldots\right\}$$

$$-\frac{2\eta\,\text{Tang}2\eta K'.\sin^2\eta u}{1.\text{Cos}2\eta K'} + \frac{2\eta\,\text{Tang}4\eta K'.\sin^2 2\eta u}{2.\text{Cos}4\eta K'} - \frac{2\eta\,\text{Tang}6\eta K'.\sin^2 3\eta u}{3.\text{Cos}6\eta K'} + \frac{2\eta\,\text{Tang}8\eta K'.\sin^2 4\eta u}{4.\text{Cos}8\eta K'} - + \ldots$$

Diese Reihe hat einen hohen Grad der Convergenz, wenn der Modul $k < \sin\frac{1}{4}\pi$ ist. Wir erhalten noch sogleich eine ähnliche Reihe, wenn wir $k'u$ statt u und $\frac{ik}{k'}$ statt des Moduls k setzen; dadurch verwandelt sich $\operatorname{el} u$ in $\frac{E-\operatorname{elc} u}{k'}$, also E in $\frac{E}{k'}$ und η in $\frac{\eta}{k'}$; daher erhalten wir

$$2.\quad \int_0^u (E-\operatorname{elc} u)\, d\operatorname{am} u$$

$$=\frac{2E}{\pi}\Big(\eta u.\operatorname{am} u-\frac{\eta^2u^2}{2}-\frac{\sin^2\eta u}{1.\mathfrak{Cos}2\eta K}-\frac{\sin^2 2\eta u}{4.\mathfrak{Cos}4\eta K'}-\frac{\sin^2 3\eta u}{9.\mathfrak{Cos}6\eta K'}-\frac{\sin^2 4\eta u}{16.\mathfrak{Cos}8\eta u}-\ldots\Big)$$
$$+\frac{2\eta\,\mathfrak{Tang}2\eta K'.\sin^2\eta u}{1.\mathfrak{Cos}2\eta K'}+\frac{2\eta\,\mathfrak{Tang}4\eta K'.\sin^2 2\eta u}{2.\mathfrak{Cos}4\eta K'}+\frac{2\eta\,\mathfrak{Tang}6\eta K'.\sin^2 3\eta u}{3.\mathfrak{Cos}6\eta K'}$$
$$+\frac{2\eta\,\mathfrak{Tang}8\eta K'.\sin^2 4\eta u}{4.\mathfrak{Cos}8\eta K'}+\ldots$$

Multipliciren wir die Gleichung (7. §. 221.) mit $-d\operatorname{amc} u$, so entsteht

$$\int_0^u -\operatorname{el} u.d\operatorname{amc} u=\Big(1-\frac{E'}{K'}\Big)\int_0^u -u.\,d\operatorname{amc} u+\eta'\int_0^{u} -\frac{d(\eta'u).d\operatorname{amc} u}{dv'}$$

oder

$$\int_0^u -\operatorname{el} u.d\operatorname{amc} u=\frac{2(K'-E')}{\pi}\int_0^u -\eta' u.d\operatorname{amc} u+\eta'\int_0^u -\frac{d(\eta'u).d\operatorname{amc} u}{dv'}.$$

Da nach §. 220.

$$\int_0^u d(\eta u)(\tfrac{1}{2}\pi-\operatorname{amc} u)=4.\frac{\mathfrak{Sin}^2\frac{1}{2}\eta' u}{\mathfrak{Sin}\, v'}-\frac{4}{3^2}.\frac{\mathfrak{Sin}^2\frac{1}{2}3\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,3v'}+\frac{4}{5}.\frac{\mathfrak{Sin}^2\frac{5}{2}\eta u}{\mathfrak{Sin}\,5v'}-+\ldots$$

ist, so ist

$$\int_0^u -\frac{d(\eta u).d\operatorname{amc} u}{dv'}$$
$$=-4.\frac{\mathfrak{Cot}\,v'.\mathfrak{Sin}^2\frac{1}{2}\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,v'}+\frac{4}{3}.\frac{\mathfrak{Cot}\,3v'.\mathfrak{Sin}^2\frac{3}{2}\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,3v'}-\frac{4}{5}.\frac{\mathfrak{Cot}\,5v'.\mathfrak{Sin}^2\frac{5}{2}\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,5v'}+-\ldots;$$

daher erhalten wir durch Zusammensetzung

$$3.\quad \int_0 -\operatorname{el} u.d\operatorname{amc} u=$$

$$\frac{2(K'-E')}{\pi}\Big\{(\tfrac{1}{2}\pi-\operatorname{amc} u)\eta' u-\frac{4}{1^2}.\frac{\mathfrak{Sin}^2\frac{1}{2}\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,\eta' K}+\frac{4}{3^2}.\frac{\mathfrak{Sin}^2\frac{3}{2}\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,3\eta' K}-\frac{4}{5^2}.\frac{\mathfrak{Sin}^2\frac{5}{2}\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,5\eta' K}+-\ldots\Big\}$$
$$-4\eta'\frac{\mathfrak{Cot}\,\eta' K.\mathfrak{Sin}^2\frac{1}{2}\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,\eta' K}+\frac{4\eta'}{3}.\frac{\mathfrak{Cot}\,3\eta' K.\mathfrak{Sin}^2\frac{3}{2}\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,3\eta' K}-\frac{4\eta'}{5}.\frac{\mathfrak{Cot}\,5\eta' K.\mathfrak{Sin}^2\frac{5}{2}\eta' u}{\mathfrak{Sin}\,5\eta' K}+-\ldots$$

Der Formel (8. §. 221.) gemäfs ist $E-\operatorname{elc} u=\Big(1-\frac{E'}{K'}\Big)u+\eta'.\frac{d(\eta' u)}{dv'}$, also ist $\int_0^u (E-\operatorname{elc} u)\,d\operatorname{am} u=\Big(1-\frac{E'}{K'}\Big)\int_0^u u.d\operatorname{am} u+\eta'\int_0^u \frac{d(\eta' u).d\operatorname{am} u}{dv'}=$ $\frac{2(K'-E')}{\pi}\int_0^u \eta' u.\,d\operatorname{am} u+\eta'\int_0^u \frac{d(\eta' u)\,d\operatorname{am} u}{dv'}$. Da die Reihe (3. §. 220.) auch

also dargestellt werden kann:

$$\int_0^u d(\eta' u).\mathrm{am}\, u = \Phi(\eta' u) + \frac{4}{1^2}(\mathfrak{Cot}\, v' - 1).\mathfrak{Sin}^2 \tfrac{1}{2}\eta' u - \frac{4}{3^2}(\mathfrak{Cot}\, 3v' - 1).\mathfrak{Sin}^2 \tfrac{3}{2}\eta' a + \frac{4}{5^2}(\mathfrak{Cot}\, 5v' - 1).\mathfrak{Sin}^2 \tfrac{5}{2}\eta' a - + \ldots,$$

so hat man

$$\int_0^u \frac{d(\eta' u)\, d\, \mathrm{am} u}{dv'} = -\frac{4}{1}.\frac{\mathfrak{Sin}^2 \frac{1}{2}\eta' u}{\mathfrak{Sin}^2 v'} + \frac{4}{3}.\frac{\mathfrak{Sin}^2 \frac{3}{2}\eta' u}{\mathfrak{Sin}^2 3v'} - \frac{4}{5}.\frac{\mathfrak{Sin}^2 \frac{5}{2}\eta' u}{\mathfrak{Sin}^2 5v'} + - \ldots,$$

und also

$$4.\quad \int_0^u (E - \mathrm{elc}\, u)\, d\, \mathrm{am}\, u =$$

$$\frac{2(K'-E')}{\pi}\left\{\eta' u.\mathrm{am}\, u - \Phi(\eta' u) - \frac{4p}{1^2}.\frac{\mathfrak{Sin}^2 \frac{1}{2}\eta' u}{\mathfrak{Sin}\, \eta' K} + \frac{4p^3}{3^2}.\frac{\mathfrak{Sin}^2 \frac{3}{2}\eta' u}{\mathfrak{Sin}\, 3\eta' K} - \frac{4p^5}{5^2}.\frac{\mathfrak{Sin}^2 \frac{5}{2}\eta' u}{\mathfrak{Sin}\, 5\eta' K} + - \ldots\right\}$$

$$- \frac{4\eta'}{1}.\frac{\mathfrak{Sin}^2 \frac{1}{2}\eta' u}{\mathfrak{Sin}^2 \eta' K} + \frac{4\eta'}{3}.\frac{\mathfrak{Sin}^2 \frac{3}{2}\eta' u}{\mathfrak{Sin}^2 3\eta K'} - \frac{4\eta'}{5}.\frac{\mathfrak{Sin}^2 \frac{5}{2}\eta' u}{\mathfrak{Sin}^2 5\eta K'} + \frac{4\eta'}{7}.\frac{\mathfrak{Sin}^2 \frac{7}{2}\eta' u}{\mathfrak{Sin}^2 7\eta' K} - + \ldots$$

Die Formeln (3. und 4.) convergiren rasch, wenn der Modul $k > \sin\frac{1}{4}\pi$ ist, und es hat $\Phi(\eta' u)$ dieselbe Bedeutung wie im §. 220.

Anmerkung. Im zehnten Bande des gegenwärtigen Journals ist in der Abhandlung: „Motus corporum coelestium in medio resistente auct. Dr. *Sohncke*" die Auflösung des erwähnten Problems auf die beiden Integrale $\int_0^u - u.d\,\mathrm{amc}\, u$ und $\int_0^u - \mathrm{el}\, u.d\,\mathrm{amc}\, u$ zurückgeführt. Die beiden Integrale sind am angeführten Orte in Reihen entwickelt worden, welche mit der zweiten von den Reihen (5. §. 220.) und mit der vorstehenden Reihe (1.) übereinstimmen. Aus Rücksicht auf das angeführte Problem sind hier die zu benutzenden Reihen in gröfserer Vollständigkeit entwickelt worden. Andere Reihen für dieselben Integrale sind am Schlusse des Zwei und zwanzigsten Abschnitts hergeleitet worden.

Siebzehnter Abschnitt.

§. 223.

Die sieben verschiedenen Fälle der Integration $y = \int_0 \frac{\partial x}{\sqrt{R}}$, wenn R die Form $A + Bx^2 + Cx^4$ hat.

Die Integration $y = \int_0 \frac{\partial x}{\sqrt{(m^2 \pm 2mn\gamma x^2 + n^2 x^4)}}$ für $\gamma < 1$.

Verstehen wir unter m und n beliebige positive, also unter m^2 und n^2 ebenfalls positive Zahlen, so kann R eine von den Formen haben:

$$R = m^2 \pm 2mn\gamma x^2 + n^2 x^4 \quad \text{für} \quad \gamma < 1,$$
$$R = m^2 - 2mn\gamma x^2 + n^2 x^4 \quad \text{für} \quad \gamma > 1,$$
$$R = m^2 + 2mn\gamma x^2 + n^2 x^4 \quad \text{für} \quad \gamma > 1,$$
$$R = m^2 + 2mn\gamma x^2 - n^2 x^4 \quad \text{für} \quad \gamma \gtrless 0,$$
$$R = -m^2 + 2mn\gamma x^2 + n^2 x^4 \quad \text{für} \quad \gamma \lesseqgtr 0,$$
$$R = -m^2 + 2mn\gamma x^2 - n^2 x^4 \quad \text{für} \quad \gamma > 1.$$

Der zweite Fall gestattet noch eine Unter-Abtheilung, wie wir nachher sehen werden, je nachdem $\frac{nx^2}{m} < 1$ oder $\frac{nx^2}{m} > 1$ ist, so daſs es also sieben von einander zu unterscheidende Fälle der Integration giebt, welche wir der Reihe nach in Betracht ziehen werden.

Befassen wir uns zunächst mit der Integration

$$y = \int_0 \frac{\partial x}{\sqrt{(m^2 + 2mn\gamma x^2 + n^2 x^4)}}$$

unter der Voraussetzung, daſs im Ausdrucke $R = m^2 + 2mn\gamma x^2 + n^2 x^4$ die absolute Gröſse von $\gamma < 1$ ist, daſs übrigens γ positiv oder auch negativ sein dürfe. Unter dieser Voraussetzung kann R nicht in zwei reelle quadratische Factoren von der Form $\alpha + \beta x^2$ und $\alpha' + \beta' x^2$ zerlegt werden. Stellen wir den Ausdruck zunächst also dar:

$$y = \frac{1}{m} \int \frac{\partial x}{\sqrt{\left(1 + \frac{2n}{m}\gamma x^2 + \frac{n^2}{m^2} x^4\right)}},$$

und erinnern wir uns, dafs dem §. 47. gemäfs $u=\int_0 \frac{2\partial t}{\sqrt{(1+2(k'^2-k^2)t^2+t^4)}}$ ist, wenn $t=\sqrt{\frac{1-\text{cn}\,u}{1+\text{cn}\,u}}$ gesetzt wird, so werden wir $1+\frac{2n}{m}\gamma x^2+\frac{n^2}{m^2}x^4$ mit $1+2(k'^2-k^2)t^2+t^4$ identificiren; hieraus folgt $\frac{nx^2}{m}=t^2$, also $x=t\sqrt{\frac{m}{n}}$ und $\frac{n}{m}\gamma x^2=(k'^2-k^2)t^2=(1-2k^2)t^2$, oder $\gamma=1-2k^2$, $\partial x=\partial t\sqrt{\frac{m}{n}}$, also $\partial y=\frac{1}{\sqrt{(mn)}}\cdot\frac{\partial t}{\sqrt{(1+2(k'^2-k^2)t^2+t^4)}}=\frac{\frac{1}{2}\partial u}{\sqrt{(mn)}}$, und da für $u=0$ $t=x=0$ ist, so folgt

1. $y=\frac{\frac{1}{2}\cdot u}{\sqrt{(mn)}}$,

2. $x=\sqrt{\frac{m}{n}}\cdot\sqrt{\frac{1-\text{cn}\,u}{1+\text{cn}\,u}}=\sqrt{\frac{m}{n}}\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\text{am}\,u=\sqrt{\frac{m}{n}}\cdot\frac{1-\text{cn}\,u}{\text{sn}\,u}=\sqrt{\frac{m}{n}}\cdot\frac{\text{sn}\,u}{1+\text{cn}\,u}$,

3. $k=\sqrt{\frac{1-\gamma}{2}}$ und $k'=\sqrt{\frac{1+\gamma}{2}}$.

Vertauscht man γ mit $-\gamma$, so bleibt der Modul reell; es vertauscht sich nur k mit k'.

Für $u=0$ ist $x=0$ und $y=0$; für $u=K$ ist $x=\sqrt{\frac{m}{n}}$ und $y=\frac{\frac{1}{2}K}{\sqrt{(mn)}}$; für $u=2K$ ist $x=\frac{1}{0}$ und $y=\frac{K}{\sqrt{(mn)}}$. Setzt man $\gamma=\cos 2\theta$, so ist $k=\sin\theta$ und $k'=\cos\theta$. Ist das Integral $y=\int\frac{-\partial x}{\sqrt{(m^2+2mn\gamma x^2+n^2x^4)}}$ gegeben, so hat man nur $K-u$ für u zu setzen.

Zusatz. In manchen Fällen ist es zweckmäfsig, $2u$ für u zu setzen. Man hat dann

$$y=\frac{u}{\sqrt{(mn)}} \quad \text{und} \quad x=\sqrt{\frac{m}{n}}.\text{tn}\,u\,\text{dn}\,u=\sqrt{\frac{m}{n}}\cdot\frac{\text{sn}\,u}{\text{snc}\,u},$$

und die Bestimmungen des Moduls sind wieder $k=\sqrt{\frac{1-\gamma}{2}}$ und $k'=\sqrt{\frac{1+\gamma}{2}}$.

§. 224.

Die Integration $y=\int_0\frac{\partial x}{\sqrt{(m^2-2mn\gamma x^2+n^2x^4)}}$ für $\gamma>1$.

Soll $y=\int_0\frac{\partial x}{\sqrt{R}}$ integrirt werden und ist im Ausdrucke

$$R=m^2-2mn\gamma x^2+n^2x^4$$

die Gröfse γ positiv und zwar >1, so müssen zwei Fälle unterschieden werden, je nachdem $\frac{nx^2}{m}<1$ oder >1 ist.

1. Ist *erstens* $\frac{nx^2}{m} < 1$, so identificire man im Ausdrucke $\partial y = \frac{\partial x}{m.\sqrt{\left(1-\frac{2n}{m}\gamma.x^2+\frac{n^2x^4}{m^2}\right)}}$ die Wurzelgröfse mit dem Nenner im Ausdrucke von $\partial u = \frac{\partial t}{\sqrt{(1-(1+k^2)t^2+k^2t^4)}}$ für $t = \text{sn}\,u$; dann ist

$$\frac{nx}{m} = kt^2 \quad \text{und} \quad t^2(1+k^2) = \frac{2n}{m}\gamma.x^2, \quad \text{also} \quad \frac{1+k^2}{2k} = \gamma;$$

hieraus folgt aber durch Auflösung:

$$1. \quad k = \gamma - \sqrt{(\gamma^2-1)},$$

$$2. \quad x = \sqrt{\left(\frac{mk}{n}\right)}.\,\text{sn}\,u,$$

$$3. \quad y = \sqrt{\frac{k}{mn}}.u.$$

Diesen Formeln gemäfs ist für $u=0$, $x=0$ und $y=0$; für $u=K$ ist $x=\sqrt{\frac{mk}{n}}$ und $y=\sqrt{\frac{k}{mn}}.K$, und für $u=2K$ ist $x=0$ und $y=\sqrt{\frac{k}{mn}}.2K$.

Setzt man $\gamma = \frac{1}{\sin 2\theta}$, so ist $k = \frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$, oder

$$k = \text{tang}\,\theta \quad \text{und} \quad k' = \frac{\sqrt{(\cos 2\theta)}}{\cos\theta}.$$

Soll y abnehmen beim Wachsen von x, so hat man nur $K-u$ für u zu setzen. Man beachte auch, dafs $\sqrt{\frac{\gamma+1}{2}} = \frac{1+k}{2\sqrt{k}}$ und $\sqrt{\frac{\gamma-1}{2}} = \frac{1-k}{2\sqrt{k}}$, also $\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} = \frac{1-k}{1+k}$ ist.

2. Ist *zweitens* $\frac{nx^2}{m} > 1$, so erinnere man sich, dafs man, wenn $t = \mathfrak{D}\text{n}'u = \frac{1}{\text{snc}\,u}$ ist, dem §. 17. gemäfs $u = \int_1 \frac{\partial t}{\sqrt{(k^2-(1+k^2)t^2+t^4)}}$ hat; die Werthe von t, von $t=1$ an, wachsen ohne Ende.

Vergleichen wir nun mit der Formel

$$ku = \int_1 \frac{\partial t}{\sqrt{\left(1-\frac{(1+k^2)}{k^2}t^2+\frac{t^4}{k^2}\right)}} \text{ die gegebene } y = \frac{1}{m}.\int \frac{\partial x}{\sqrt{\left(1-\frac{2n}{m}\gamma x^2+\frac{n^2}{m^2}x^4\right)}}$$

und setzen zu dem Ende $\frac{nx^2}{m} = \frac{t^2}{k}$ und $\frac{1+k^2}{k^2}t^2 = \frac{2n}{m}\gamma.x^2$, so erhalten wir $x = \sqrt{\left(\frac{m}{nk}\right)}.t$, $\partial x = \sqrt{\left(\frac{m}{nk}\right)}.\partial t$, also $y = \sqrt{\frac{1}{mnk}}.ku$, oder $y = \sqrt{\frac{k}{mn}}.u$, und $\frac{1+k^2}{2k} = \gamma$; daher haben wir nun wieder

$$1.\quad k = \gamma - \sqrt{(\gamma^2 - 1)},$$

$$2.\quad x = \sqrt{\left(\frac{m}{nk}\right)} \cdot \frac{1}{\operatorname{snc} u},$$

$$3.\quad y = \sqrt{\left(\frac{k}{mn}\right)} \cdot u.$$

Es ist aber für $u = 0$, $x = \sqrt{\frac{m}{nk}}$, $y = 0$; für $u = K$ ist $x = \frac{1}{0}$ und $y = \sqrt{\frac{k}{mn}} . K$.

Zusatz. Will man einen gröſseren Modul k mit einem gröſseren Argumente u dem §. 51. gemäſs einführen, so hat man in den drei Formeln *des ersten Falles* k' statt $\frac{1-k}{1+k'}$ zu setzen, und also

$$1.\quad k' = \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}}, \quad k = \sqrt{\frac{2}{\gamma + 1}},$$

$$2.\quad x = \sqrt{\frac{m}{n}} \cdot \sqrt{\frac{1 - \operatorname{dn} u}{1 + \operatorname{dn} u}},$$

$$3.\quad y = \sqrt{\frac{1}{mn}} \cdot \frac{ku}{2} = \sqrt{\frac{2}{mn(\gamma + 1)}} \cdot \frac{u}{2},$$

so, daſs man, wenn man den Modul nicht weiter ändert, aber $2u$ statt u setzt,

$$x = \sqrt{\frac{m}{n}} . k \operatorname{sn} u \operatorname{snc} u \qquad \text{und} \quad y = \sqrt{\frac{1}{mn}} . ku, \text{ oder}$$

$$x = \sqrt{\frac{2m}{n(1+\gamma)}} . \operatorname{sn} u . \operatorname{snc} u \quad \text{und} \quad y = \sqrt{\frac{2}{mn(1+\gamma)}} . u$$

erhält.

Will man auch *im zweiten Falle,* wo $\frac{nx^2}{m} > 1$ ist, statt des früheren Moduls einen gröſseren setzen, so hat man, wenn er wieder mit k bezeichnet wird, ebenfalls

$$1.\quad k = \sqrt{\frac{2}{\gamma + 1}} \quad \text{und} \quad k' = \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}};$$

$$2.\quad x = \sqrt{\frac{m}{n}} \cdot \sqrt{\frac{1 + \operatorname{dnc} u}{1 - \operatorname{dnc} u}},$$

$$3.\quad y = \sqrt{\frac{1}{mn}} \cdot \frac{ku}{2} = \sqrt{\frac{2}{mn(1+\gamma)}} \cdot \frac{u}{2},$$

so daſs man, wenn man auch nun $2u$ statt u setzt, ohne den Modul $k = \sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}$ zu verändern,

$$x = \sqrt{\frac{m}{n}} \cdot \sqrt{\frac{1+k'}{1-k'}} \cdot \frac{1 + k' \operatorname{tn}^2 u}{1 - k' \operatorname{tn}^2 u} \quad \text{und} \quad y = \sqrt{\frac{2}{mn(1+\gamma)}} \cdot u$$

erhält.

§. 225.

Die Integration $y=\int_0 \frac{\partial x}{\sqrt{(m^2+2mn\gamma . x^2+n^2x^4)}}$ für $\gamma>1$.

Die vorgelegte Integration bezieht sich darauf, dafs für $t=\operatorname{tn} u$, $u=\int_0 \frac{\partial t}{\sqrt{(1+(1+k'^2)t^2+k'^2t^4)}}$ ist. Da $y=\frac{1}{m}.\int_0 \frac{\partial x}{\sqrt{\left(1+\frac{2n}{m}\gamma x^2+\frac{n^2}{m^2}x^4\right)}}$ ist, so setzen wir

$$\frac{n}{m}x^2=k'.t^2 \quad \text{und} \quad \frac{2n}{m}\gamma x^2=(1+k'^2)t^2.$$

Hieraus folgt $x=\sqrt{\frac{mk'}{n}}.t$, also $\partial x=\sqrt{\frac{mk'}{n}}.\partial t$, folglich

$$y=\sqrt{\frac{k'}{mn}}.\int \frac{\partial t}{\sqrt{(1+(1+k'^2)t^2+k'^2t^4)}}.$$

Ferner haben wir

$$\gamma=\frac{1+k'^2}{2k'}, \text{ also } \sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}=\frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}, \quad \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}}=\frac{2\sqrt{k'}}{1-k'}, \quad \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}=\frac{1-k'}{1+k'}$$

und

$$1. \quad k'=\gamma-\sqrt{(\gamma^2-1)},$$

$$2. \quad x=\sqrt{\left(\frac{mk'}{n}\right)}.\operatorname{tn} u,$$

$$3. \quad y=\sqrt{\left(\frac{k'}{mn}\right)}.u.$$

Diesen Formeln gemäfs ist für $u=0$ auch $x=0$ und $y=0$; aber für $u=K$ ist $x=\frac{1}{0}$ und $y=\sqrt{\left(\frac{k'}{mn}\right)}.K$.

Will man statt des früheren Moduls k, dem §. 51. gemäfs, den nächst kleineren einführen und ihn wieder mit k bezeichnen, so hat man

$$k=\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}, \quad k'=\sqrt{\frac{2}{\gamma+1}},$$

$$x=\sqrt{\frac{m}{n}}.\frac{k'\operatorname{tn} u}{\operatorname{dn} u}=\sqrt{\frac{m}{n}}.\frac{\operatorname{cnc} u}{\operatorname{cn} u}=\sqrt{\frac{m}{n}}.\sqrt{\frac{1-\operatorname{snc} 2u}{1+\operatorname{snc} 2u}},$$

$$y=\sqrt{\frac{1}{mn}}.k'u=u\sqrt{\frac{2}{mn(1+\gamma)}}.$$

§. 226.

Die Integration $y = \int_0 \frac{\partial x}{\sqrt{(m^2 + 2mn\gamma x^2 - n^2 x^4)}}$ für $\gamma \gtrless 0$.

Setzt man $t = \operatorname{cnc} u$, so ist $u = \int_0 \frac{\partial t}{\sqrt{(k'^2 + (k^2 - k'^2) t^2 - k^2 t^4)}}$ oder
$k' u = \int_0 \frac{\partial t}{\sqrt{\left(1 + \frac{(k^2 - k'^2)}{k'^2} t^2 - \frac{k^2}{k'^2} t^4\right)}}$. Da $y = \frac{1}{m} \int_0 \frac{\partial t}{\sqrt{\left(1 + \frac{2n}{m} \gamma . x^2 - \frac{n^2}{m^2} x^4\right)}}$
ist, so wird man

$$\frac{2n\gamma}{m} . x^2 = \frac{k^2 - k'^2}{k'^2} . t^2 \quad \text{und} \quad \frac{n x^2}{m} = \frac{k}{k'} . t^2$$

setzen, also $x = \sqrt{\left(\frac{mk}{nk'}\right)} . t$ und $\partial x = \sqrt{\left(\frac{mk}{nk'}\right)} . \partial t$, mithin

$$y = \sqrt{\left(\frac{k}{mnk'}\right)} . \int_0 \frac{\partial t}{\sqrt{\left(1 + \frac{k^2 - k'^2}{k'^2} t^2 - \frac{k^2}{k'^2} t^4\right)}}.$$

Da aufserdem

$$\gamma = \frac{k^2 - k'^2}{2kk'} = \frac{1 - \left(\frac{k'}{k}\right)^2}{2\left(\frac{k'}{k}\right)}$$

ist, so findet man

$$\frac{k'}{k} = \sqrt{(1 + \gamma^2)} - \gamma, \quad \text{oder} \quad \frac{k}{k'} = \sqrt{(1 + \gamma^2)} + \gamma,$$

also

$$1. \quad k = \sqrt{\frac{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{(\gamma^2 + 1)}}}{2}} \quad \text{und} \quad k' = \sqrt{\frac{1 - \frac{\gamma}{\sqrt{(\gamma^2 + 1)}}}{2}},$$

$$2. \quad x = \sqrt{\left(\frac{mk}{nk'}\right)} . \operatorname{cnc} u,$$

$$3. \quad y = \sqrt{\left(\frac{kk'}{mn}\right)} . u = \frac{\sqrt{\frac{1}{2mn}}}{\sqrt[4]{(\gamma^2 + 1)}} . u.$$

Hiernach ist für $u = 0$ auch $x = 0$ und $y = 0$; für $u = K$ aber ist $x = \sqrt{\frac{mk}{nk'}}$ und $y = \sqrt{\left(\frac{kk'}{mn}\right)} . K$; für $x = 2K$ ist $x = 0$ und $y = \sqrt{\left(\frac{kk'}{mn}\right)} . 2K$.

§. 227.

Die Integration $y = \int \frac{\partial x}{\sqrt{(-m^2 + 2mn\gamma . x^2 + n^2 x^4)}}$ für $\gamma \gtrless 0$.

Nach §. 17. ist, wenn $t = \mathfrak{Cn}' u = \frac{1}{\operatorname{cn} u}$ gesetzt wird,

$$ku = \int_1 \frac{\partial t}{\sqrt{\left(-1 + \frac{k^2 - k'^2}{k^2} t^2 + \frac{k'^2}{k^2} t^4\right)}},$$

und da $y = \frac{1}{m} . \int \frac{\partial x}{\sqrt{\left(-1 + \frac{2n\gamma}{m} x^2 + \frac{n^2}{m^2} x^4\right)}}$ ist, so wird man setzen:

$$\frac{2n\gamma}{m} . x^2 = \frac{k^2 - k'^2}{k^2} . t^2 \quad \text{und} \quad \frac{nx^2}{m} = \frac{k' t^2}{k},$$

woraus $x = \sqrt{\left(\frac{mk'}{nk}\right)} . t$ folgt, also $\partial x = \sqrt{\left(\frac{mk'}{nk}\right)} . \partial t$, folglich $y = \sqrt{\left(\frac{k'}{mnk}\right)} . ku$ und

$$\text{[illegible]} = \frac{k^2 - k'^2}{2kk'},$$

also

$$\frac{k'}{k} = \sqrt{(1 + \gamma^2)} - \gamma \quad \text{oder} \quad \frac{k}{k'} = \sqrt{(1 + \gamma^2)} + \gamma.$$

Daraus folgt:

$$1. \quad k = \sqrt{\frac{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{(\gamma^2 + 1)}}}{2}} \quad \text{und} \quad k' = \sqrt{\frac{1 - \frac{\gamma}{\sqrt{(\gamma^2 + 1)}}}{2}},$$

$$2. \quad x = \sqrt{\left(\frac{mk'}{nk}\right)} . \frac{1}{\operatorname{cn} u},$$

$$3. \quad y = \sqrt{\left(\frac{kk'}{mn}\right)} . u = \frac{\sqrt{\frac{1}{2mn}}}{\sqrt[4]{(\gamma^2 + 1)}} . u.$$

Für $u = 0$ hat man also $x = \sqrt{\left(\frac{mk'}{nk}\right)}$ und $y = 0$; für $u = K$ hat man aber $x = \frac{1}{0}$ und $y = \sqrt{\left(\frac{kk'}{mn}\right)} . K$; für $u = 2K$ hat man $x = -\sqrt{\frac{mk'}{nk}}$ und $y = \sqrt{\left(\frac{kk'}{mn}\right)} . 2K$.

Anmerkung. Setzt man in §. 226. und §. 227. $\gamma = -\cot 2\theta$, so ist

$$k = \sin\theta \quad \text{und} \quad k' = \cos\theta, \quad \text{also} \quad \frac{k}{k'} = \operatorname{tang}\theta.$$

§. 228.

Die Integration $y = \int \frac{\partial x}{\sqrt{(-m^2 + 2mn\gamma x^2 - n^2 x^4)}}$ für $\gamma > 1$.

Wird $t = \text{dnc}\, u$ gesetzt, so ist $k' \partial u = \frac{\partial t}{\sqrt{\left(-1 + \frac{(1+k'^2)}{k'^2} . t^2 - \frac{t^4}{k'^2}\right)}}$

und da $\partial y = \frac{\partial x}{m \sqrt{\left(-1 + \frac{2n\gamma}{m} . x^2 - \frac{n^2 x^4}{m^2}\right)}}$ ist, so wird man setzen:

$$\frac{2n\gamma}{m} . x^2 = \frac{1+k'^2}{k'^2} . t^2 \quad \text{und} \quad \frac{nx^2}{m} = \frac{t^2}{k'}.$$

Hieraus folgt $x = \sqrt{\left(\frac{m}{nk'}\right)} . t$, $\partial x = \sqrt{\left(\frac{m}{nk'}\right)} . \partial t$ und

$$\gamma = \frac{1+k'^2}{2k'},$$

also $\sqrt{\frac{2}{\gamma+1}} = \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}$, $\sqrt{\frac{2}{\gamma-1}} = \frac{2\sqrt{k'}}{1-k'}$, $\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} = \frac{1-k'}{1+k'}$, und

$$1. \quad k' = \gamma - \sqrt{(\gamma^2 - 1)},$$

$$2. \quad x = \sqrt{\left(\frac{m}{nk'}\right)} . \text{dnc}\, u = \sqrt{\left(\frac{mk'}{n}\right)} . \frac{1}{\text{dn}\, u},$$

$$3. \quad y = \sqrt{\left(\frac{k'}{mn}\right)} . u.$$

Hiernach ist für $u = 0$ die Gröfse $x = \sqrt{\left(\frac{mk'}{n}\right)}$ und $y = 0$; für $u = K$ ist $x = \sqrt{\left(\frac{m}{nk'}\right)}$ und $y = \sqrt{\left(\frac{k'}{mn}\right)} . K$ und für $x = 2K$ ist $x = \sqrt{\left(\frac{mk'}{n}\right)}$ und $y = \sqrt{\left(\frac{k'}{mn}\right)} . 2K$.

Will man statt des früheren Moduls, dem §. 51. gemäfs, den nächst kleineren einführen, und ihn wieder durch k, das neue Argument aber wieder durch u bezeichnen, so hat man

$$k = \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}, \quad k' = \sqrt{\frac{2}{\gamma+1}},$$

$$x = \sqrt{\frac{m}{n}} . \sqrt{\frac{1-k}{1+k} . \frac{1+k\,\text{sn}^2 u}{1-k\,\text{sn}^2 u}},$$

$$y = \sqrt{\frac{1}{mn}} . k'u = \sqrt{\frac{2}{mn(\gamma+1)}} . u.$$

§. 229.

Die Integration von $y=\int\frac{\partial x}{\sqrt{R}}$, wenn R eine biquadratische Form mit vier imaginären Factoren vom ersten Grade in Ansehung von x ist.

Ist $\partial y=\frac{\partial x}{\sqrt{R}}$ zu integriren und ist $R=0$ eine biquadratische Gleichung mit vier imaginären Wurzeln, so kann R jedenfalls dargestellt werden als ein Product von zwei quadratischen Formen

$$1.\quad R=(a+2bx+cx^2)(a'+2b'x+cx^2),$$

so dafs a, b, c, a', b', c' reell sind. Die Gleichung $a+2bx+cx^2=0$ giebt zwei imaginäre Wurzeln und $a'+2bx'+c'x^2=0$ die beiden anderen.

Wir betrachten beide quadratische Formen als positiv; denn wäre die eine positiv und die andere negativ, so wäre $\sqrt{R}$ imaginär.

Wird $a+2bx+cx^2=0$ gesetzt, so erhält man $x=\frac{-b\pm\sqrt{(b^2-ac)}}{c}$, und beide Wurzeln sind imaginär, wenn $ac-b^2$ positiv ist; aus demselben Grunde mufs $a'c'-b'^2$ positiv sein. Wir setzen also

$$2.\quad m^2=ac-b^2,\quad m'^2=a'c'-b'^2.$$

Da $a+2bx+cx^2=\frac{(a+bx)^2+m^2x^2}{a}=\frac{(cx+b)^2+m^2}{c}$ ist, so ist, da die Zähler dieser Brüche positiv sind, $a+2bx+cx^2$ nur dann positiv, wenn a und c positiv sind; aus demselben Grunde müssen a' und c' positiv sein. Von den sechs Gröfsen a, b, c, a', b', c' dürfen also nur b und b' als positiv oder negativ angesehen werden; die vier übrigen Gröfsen sind immer positiv.

Setzen wir

$$3.\quad v^2=\frac{a+2bx+cx^2}{a'+2b'x+c'x^2},$$

so hat man rückwärts zur Bestimmung von x die unrein-quadratische Gleichung

$$4.\quad x^2+2\left(\frac{b-b'v^2}{c-c'v^2}\right)x+\frac{a-a'v^2}{c-c'v^2}=0,$$

und setzt man zur Abkürzung

$$V=(b-b'v^2)^2-(a-a'v^2)(c-c'v^2),$$

so haben wir, durch Auflösung,

$$5.\quad x=\frac{-(b-b'.v^2)\pm\sqrt{V}}{c-c'v^2}=\frac{a-a'v^2}{-(b-b'v^2)\mp\sqrt{V}},$$

also $(c-c'v^2)x+(b-b'v^2)=\pm\sqrt{V}$, oder auch $b+cx-(b'+c'x)v_2=\pm\sqrt{V}$. Das eine von den beiden Vorzeichen $\pm$ bezieht sich auf die eine, das andere auf die andere Wurzel der Gleichung (4). Wir werden unter x im Nachfolgenden diejenige Wurzel verstehen, für welche $\sqrt{V}$ das Vorzeichen $+$ hat, so dafs also

$$b+cx-(b'+c'x)v^2=\sqrt{V}$$

ist. Differenziiren wir die Gleichung $(a'+2b'x+c'x^2)v^2=a+2bx+cx^2$, so erhalten wir

$$(b'+c'x)v^2\partial x+(a'+2b'x+c'x^2)v.\partial v=(b+cx)\partial x,$$

oder

$$(b+cx-(b'+c'x)v^2)\partial x=\partial v.\sqrt{R},$$

also

$$\partial x.\sqrt{V}=\partial v.\sqrt{R}, \quad \text{oder} \quad \frac{\partial x}{\sqrt{R}}=\frac{\partial v}{\sqrt{V}},$$

und also

$$6. \quad y=\int\frac{\partial v}{\sqrt{V}}.$$

Das vorgelegte Differenzial ist also nun in ein ähnliches, aber einfacheres umgeformt worden; und da nun der Ausdruck V nur die zweite und vierte Potenz von v enthält, so kann das Integral nach den früheren Bestimmungen gefunden werden.

§. 230.

Entwickeln wir den Ausdruck V, so erhalten wir

$$V=-m^2+(ac'+ca'-2bb')v^2-m'^2v^4,$$

oder

$$V=-m^2+2mm'\gamma.v^2-m'^2v^4,$$

wenn wir zur Vereinfachung setzen:

$$2mm'\gamma=ac'+ca'-2bb',$$

und also

$$1. \quad \gamma=\frac{ac'+ca'-2bb'}{2\sqrt{(ac-b^2)}\sqrt{(a'c'-b'^2)}}.$$

Dem §. 228. gemäfs finden wir nun sogleich die folgenden Formeln: $\operatorname{dn}u=\sqrt{\frac{mk'}{m}}\cdot\frac{1}{v}$ oder

$$2. \quad \begin{cases} \operatorname{dn}u=\sqrt{\left(\frac{mk'}{m'}\right)}\cdot\sqrt{\frac{a+2b'x+c'x^2}{a+2bx+cx^2}} \text{ und} \\ \operatorname{dnc}u=\sqrt{\left(\frac{m'k'}{m}\right)}\cdot\sqrt{\frac{a+2bx+cx^2}{a'+2b'x+c'x^2}}, \end{cases}$$

3. $\begin{cases} k' = \gamma - \sqrt{(\gamma^2 - 1)}, \text{ also } k = \sqrt{((2\sqrt{(\gamma^2-1)}).(\gamma - \sqrt{(\gamma^2-1)}))} \\ \qquad\qquad = \sqrt{(2k')}.\sqrt{(\gamma^2-1)} = \sqrt{(2k')}.\sqrt[4]{(\gamma^2-1)}. \end{cases}$

4. $y = \sqrt{\left(\frac{k}{mm'}\right)}.u.$

Vertauscht man die beiden quadratischen Formen $a + 2bx + cx^2$ und $a' + 2b'x + c'x^2$ mit einander, also a mit a', b mit b', c mit c', folglich auch m mit m', so bleibt γ und folglich auch k' ungeändert, aber u wird, den Formeln (2.) gemäfs, dadurch mit $K - u$ vertauscht.

Man findet eigentlich $\partial y = \pm\sqrt{\left(\frac{k'}{mm'}\right)}.\partial u$, und wir haben $\partial y = +\sqrt{\frac{k'}{mm'}}$ geschrieben, unter der Voraussetzung, dafs beim Wachsen von u auch y und x wächst. Es lassen sich in der That diese Bedingungen mit einander vereinigen. Da $\frac{m}{m'k'}.\text{dnc}^2 u = \frac{a+2bx+cx^2}{a'+2b'x+c'x^2}$ von $u = 0$ an wachsen soll, so mufs das Differenzial-Verhältnifs $\frac{\partial z}{\partial x}$ positiv sein, wenn wir $z = \frac{a+2bx+cx^2}{a'+2b'x+c'x^2}$ setzen; wir finden aber

$$\frac{1}{2}.\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(a'+2b'x+c'x^2)(b+cx)-(a+2bx+cx^2)(b'+c'x)}{(a'+2b'x+c'x^2)^2}$$
$$= \frac{ba'-ab'+(ca'-ac')x+(cb'-bc')x^2}{(a'+2b'x+c'x^2)^2};$$

und soll dieser Bruch positiv sein, so mufs

$$ba'-ab'+(ca'-ac')x+(cb'-bc')x^2$$

positiv sein. Wir werden bald nachher einen einfacheren Ausdruck der Bedingung finden, unter welcher die drei Gröfsen x, y und u gleichzeitig wachsen und abnehmen. Da $\partial u = \sqrt{\left(\frac{mm'}{k'}\right)}.\partial y = \sqrt{\left(\frac{mm'}{k'}\right)}.\frac{\partial x}{\sqrt{R}}$ ist, so erhalten wir

$$\text{dn}\,u.\partial u = \frac{m\partial x}{a+2bx+cx^2} = \frac{mc\partial x}{(cx+b)^2+m^2} = \frac{\partial\left(\frac{cx}{m}\right)}{1+\left(\frac{cx+b}{m}\right)^2}.$$

Das Integral dieser Gleichung ist

$$5. \qquad \text{am}\,u = \text{arc tang}\left(\frac{cx+b}{m}\right) + \alpha,$$

wenn man durch α die Constante der Integration bezeichnet. Setzt man ferner A gleich dem Werthe von x, für welchen $u = 0$, und B gleich dem

Werthe von x, für welchen $u = K$ ist, so haben wir die Formeln

$$\operatorname{tang}\alpha = -\frac{cA+b}{m} \quad \text{und} \quad \cot\alpha = \frac{cB+b}{m},$$

woraus rückwärts folgt:

$$6. \quad A = \frac{-b-m\operatorname{tang}\alpha}{c}, \quad B = \frac{-b+m\cot\alpha}{c}.$$

Hieraus leiten wir $B-A = \frac{m}{c}(\cot\alpha + \operatorname{tang}\alpha)$ ab, oder auch

$$7. \quad B-A = \frac{2m}{c\sin 2\alpha}.$$

Hiernach wächst also x wirklich, wenn α positiv und $< \frac{1}{2}\pi$ ist, oder zwischen den Grenzen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ enthalten ist, und wird B sogar unendlich, und $A = -\frac{b}{c}$, wenn $\alpha = 0$ ist.

Multiplicirt man die Formel für $\operatorname{dnc} u$ mit ∂u, so erhält man

$$\operatorname{dnc} u . \partial u = \frac{m'\partial x}{a'+2b'x+c'x^2} = \frac{m'c'\partial x}{(c'x+b)^2+m'^2},$$

also

$$8. \quad \operatorname{amc} u = \alpha' - \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{c'x+b'}{m'}\right),$$

wo α' ebenfalls eine Constante der Integration bezeichnet. Hieraus folgt, wenn man $u = 0$ und $u = K$ setzt,

$$\cot\alpha' = -\frac{c'A+b'}{m'} \quad \text{und} \quad \operatorname{tang}\alpha' = \frac{c'B+b'}{m'},$$

also

$$9. \quad A = \frac{-b'-m'\cot\alpha'}{c'} \quad \text{und} \quad B = \frac{-b'+m'\operatorname{tang}\alpha'}{c'},$$

woraus wir noch durch Subtraction herleiten:

$$B-A = \frac{m'}{c'}(\cot\alpha' + \operatorname{tang}\alpha'),$$

oder

$$10. \quad B-A = \frac{2m'}{c'.\sin 2\alpha'}.$$

Die Vergleichung der beiden Formeln für $B-A$ giebt noch die Proportion

$$\frac{m'}{m} = \frac{c'.\sin 2\alpha'}{c.\sin 2\alpha}.$$

§. 231.

Um die beiden Constanten α und α' in den Formeln (5.) und (8.) zu ermitteln, d. h. durch die gegebenen Constanten auszudrücken und noch

andern Relationen zu finden, schlagen wir einen besonderen Weg ein. Es ist $\operatorname{tn}^2 u = \frac{1-\operatorname{dn}^2 u}{\operatorname{dn}^2 u - k'^2}$. Substituiren wir hierin den Werth

$$\operatorname{dn}^2 u = \frac{mk'}{m'} \cdot \frac{a' + 2b'x + c'x^2}{a + 2bx + cx^2},$$

so erhalten wir

$$\operatorname{tn}^2 u = \frac{1}{k'} \cdot \frac{m'(a+2bx+cx^2) - mk'(a'+2b'x+c'x^2)}{m(a'+2b'x+c'x^2) - m'k'(a+2bx+cx^2)},$$ oder, anders geordnet,

$$\operatorname{tn}^2 u = \frac{(m'a - mk'a') + 2(m'b - mk'b')x + (m'c - mk'c')x^2}{k'(ma' - m'k'a) + 2k'(mb' - m'k'b)x + k'(mc' - m'k'c)x^2}.$$

Nimmt man aber in der Gleichung (5.) §. 230. auf beiden Seiten die cyklischen Tangenten, so erhält man

$$\operatorname{tn} u = \frac{cx + b + m\operatorname{tang}\alpha}{m - (cx+b)\operatorname{tang}\alpha} = \frac{(b + m\operatorname{tang}\alpha) + cx}{(m - b\operatorname{tang}\alpha) - cx\operatorname{tang}\alpha},$$ also

$$\operatorname{tn}^2 u = \frac{(b + m\operatorname{tang}\alpha)^2 + 2c(b + m\operatorname{tang}\alpha)x + c^2x^2}{(m - b\operatorname{tang}\alpha)^2 - 2c\operatorname{tang}\alpha(m - b\operatorname{tang}\alpha)x + c^2\operatorname{tang}^2\alpha . x^2}.$$

Dividirt man den Zähler und Nenner des ersten Bruches durch $m'c - mk'c'$ und den Zähler und Nenner des zweiten Bruches durch c^2, damit x^2 in den Zählern beider Brüche Eins zum Coëfficienten habe, so müssen die beiden Ausdrücke für $\operatorname{tn}^2 u$ identisch sein; daher haben wir die Gleichungen

$$\left(\frac{b + m\operatorname{tang}\alpha}{c}\right)^2 = \frac{m'a - mk'a'}{m'c - mk'c'},$$

$$\frac{b + m\operatorname{tang}\alpha}{c} = \frac{m'b - mk'b'}{m'c - mk'c'},$$

$$\left(\frac{m - b\operatorname{tang}\alpha}{c}\right)^2 = \frac{k'(ma' - m'k'a)}{m'c - mk'c'},$$

$$-\operatorname{tang}\alpha\frac{(m - b\operatorname{tang}\alpha)}{c} = \frac{k'(mb' - mk'b')}{m'c - mk'c'},$$

$$\operatorname{tang}^2\alpha = \frac{k'(mc' - m'k'c)}{m'c - mk'c'}.$$

Dividirt man die erste Gleichung durch die zweite, und die vierte durch die fünfte, ferner die dritte durch die vierte, so erhält man, ohne alle Zweideutigkeit,

$$1.\quad A = \frac{-b - m\operatorname{tang}\alpha}{c} = -\frac{m'k - mk'b'}{m'c - mk'c'} = -\frac{m'a - mk'a'}{m'b - mk'b'},$$

$$2.\quad B = \frac{-b + m\cot\alpha}{c} = -\frac{mb' - m'k'b}{mc' - m'k'c} = -\frac{ma' - m'k'a}{mb' - m'k'b},$$

und es sind also schon A und B auf zwei verschiedene Arten durch a, b, c, a', b', c' und den conjugirten Modul k' ausgedrückt worden. Iden-

tificirt man die beiden Ausdrücke für A und auch die beiden für B, so erhält man die Gleichungen

$$(m'b - mk'b')^2 = (m'a - mk'a')(m'c - mk'c'),$$
$$(mb' - m'k'b)^2 = (ma' - m'k'a)(mc' - m'k'c);$$

entwickelt man dieselben, so reducirt sich eine jede auf

$$k'^2 - 2\gamma . k' + 1 = 0,$$

woraus, wie oben, folgt:

$$k' = \gamma - \sqrt{(\gamma^2 - 1)}.$$

Nach diesen Vorbereitungen ist es nicht mehr schwer, die Tangenten der Constanten α und α' in den Formeln (5.) und (8.) §. 230. ebenfalls durch die gegebenen Constanten auszudrücken. Die Formel $\tang^2\alpha = \frac{k(mc' - m'k'c)}{m'c - mk'c'}$ übergehen wir, weil sie eine Zweideutigkeit mit sich bringt. Da $m \tang \alpha = -cA - b$ ist, so finden wir, als einfachste Ausdrücke:

$$3. \quad \tang\alpha = \frac{k'(bc' - cb')}{m'c - mk'c'} = \frac{mc' - m'k'c}{bc' - cb'},$$

$$4. \quad \cot\alpha' = \frac{bc' - cb'}{m'c - mk'c'} = \frac{mc' - m'k'c}{k'(bc' - cb')},$$

woraus auf der Stelle die einfache Relation

$$5. \quad \tang\alpha . \tang\alpha' = k'$$

folgt. Da ferner

$$\cot\alpha + \tang\alpha = \frac{\frac{m'c}{k'} - mc' + mc' - m'k'c}{bc' - cb'} = \frac{m'ck^2}{k'(bc' - cb')} = \frac{2}{\sin 2\alpha} \quad \text{und}$$

$$\cot\alpha' + \tang\alpha' = \frac{\frac{mc'}{k'} - m'c + m'c - mk'c'}{bc' - cb'} = \frac{mc'k^2}{k'(bc' - cb')} = \frac{2}{\sin 2\alpha'}$$

ist, so erhält man

$$6. \quad B - A = \frac{mm'k^2}{k'(bc' - cb')}.$$

Da nun x von A bis B wachsen soll, während u von Null bis K wächst, so mufs die Differenz $B - A$ positiv sein, und da $\frac{mm'k^2}{k'}$ positiv ist, so mufs

$$bc' - cb' \text{ positiv sein.}$$

Findet sich die Differenz $bc' - cb'$ negativ, so wird x abnehmen, wenn u zunimmt; und umgekehrt. Man kann aber immer bewirken, dafs diese Differenz positiv ist, indem man nur a mit a', b mit b', c mit c', und m mit m' vertauscht.

Kehren wir die Gleichungen (5.) und (8.) um, so ist

$$\text{tang}(\text{am}\,u-\alpha)=\frac{cx+b}{m}\quad\text{und}\quad\text{tang}(\alpha'-\text{amc}\,u)=\frac{c'x+b'}{m'},\ \text{also}$$

$$x=-\frac{b}{c}+\frac{m}{c}\cdot\frac{\text{tn}\,u-\text{tang}\,\alpha}{1+\text{tang}\,\alpha\,\text{tn}\,u},$$

$$x=-\frac{b'}{c'}+\frac{m'}{c'}\cdot\frac{\text{tang}\,\alpha'-\text{tnc}\,u}{1+\text{tang}\,\alpha'.\,\text{tnc}\,u},$$

oder

$$x=\frac{\frac{-b-m\,\text{tang}\,\alpha}{c}+\left(\frac{m-b\,\text{tang}\,\alpha}{c}\right)\text{tn}\,u}{1+\text{tang}\,\alpha.\,\text{tn}\,u}.$$

Werden die Werthe $\frac{-b-m\,\text{tang}\,\alpha}{c}=\frac{bb'-ac'+mm'k'}{bc'-cb'}$, $\frac{m-b\,\text{tang}\,\alpha}{c}=\frac{m'k'b-mb'}{bc'-cb'}$ und $\text{tang}\,\alpha=\frac{mc'-m'k'c}{bc'-cb'}$ substituirt, so erhält man endlich

$$7.\quad x=\frac{bb'-ac'+mm'k'+(m'k'b-mb')\,\text{tn}\,u}{bc'-cb'+(mc'-m'k'c)\,\text{tn}\,u}=\frac{A+B\,\text{tang}\,\alpha.\,\text{tn}\,u}{1+\text{tang}\,\alpha.\,\text{tn}\,u}.$$

Aus der Formel $\gamma=\frac{ac'+ca'-2bb'}{2\sqrt{(ac-b^2)}\sqrt{(ac'-b'^2)}}$ §. 230. leiten wir noch her:

$$\sqrt{(\gamma^2-1)}=\frac{\sqrt{[(ac'-ca')^2-4(bc'-cb')(ab'-a'b')]}}{2\sqrt{(ac-b^2)}\sqrt{(a'c'-b'^2)}};\ \text{daher ist}$$

$$8.\quad k'=\frac{ac'+ca'-2bb'-\sqrt{((ac'-ca')^2-4(bc'-cb')(ab'-ba'))}}{2\sqrt{(ac-b^2)}.\sqrt{(a'c'-b'^2)}}.$$

Setzt man $\gamma=\frac{1}{\sin 2\theta}$, also

$$\sin 2\theta=\frac{2\sqrt{(ac-b^2)}\sqrt{(a'c'-b^2)}}{ac'+ca'-2bb'},\ \text{so hat man}$$

$$k'=\text{tang}\,\theta\quad\text{und}\quad k=\frac{\sqrt{(\cos 2\theta)}}{\cos\theta}.$$

§. 232.

Zweites Verfahren der Integration.

Ist einmal die Form des Werthes von x bei der Integration von $\int\frac{\partial x}{\sqrt{R}}$ bekannt, unter der Voraussetzung, daſs $R=(a+2bx+cx^2)(a'+2b'x+c'x^2)$ ein Product von vier imaginären Factoren des ersten Grades ist, so kann die Integration leicht noch auf die folgende Art vorgenommen werden. Es sei

$$x=\frac{p+qrt}{1+rt},\quad\text{also}\quad\partial x=\frac{(q-p)\,r\,\partial t}{(1+rt)^2}:$$

dann ist, wenn wir zur Abkürzung

$$L = a + 2bp + cp^2; \quad L' = a' + 2b'p + c'p^2,$$
$$M = a + bq + bp + cpq; \quad M' = a' + b'q + b'p + c'pq,$$
$$N = a + 2bq + cq^2; \quad N' = a' + 2b'q + c'q^2,$$
$$m^2 = ac - b^2, \quad m'^2 = a'c' - b'^2 \text{ setzen,}$$

$$a + 2bx + cx^2 = \frac{L + 2Mrt + Nr^2t^2}{(1+rt)^2} \text{ und } a' + 2b'x + c'x^2 = \frac{L' + 2M'rt + N'r^2t^2}{(1+rt)^2},$$

also

$$\partial y = \frac{(q-p)r\partial t}{\sqrt{(L + 2Mrt + Nr^2t^2)}\sqrt{(L' + 2M'rt + N'r^2t^2)}};$$

außerdem ist bekannt, daſs L, N, L' und N' positive Gröſsen sind. Setzt man nun

$$\frac{Nr^2}{L} = 1, \quad \frac{N'r^2}{L'} = k'^2, \quad M = 0 \quad \text{und} \quad M' = 0,$$

so reducirt sich der Ausdruck auf

$$y = \frac{(q-p)r}{\sqrt{(LL')}} \cdot \int \frac{\partial t}{\sqrt{(1+t^2)}\sqrt{(1+k'^2t^2)}},$$

und es ist also $y = \frac{(q-p)r}{\sqrt{(LL')}} u$, wenn $x = \frac{p + qr\,\mathrm{tn}\,u}{1 + r\,\mathrm{tn}\,n}$, oder $t = \mathrm{tn}\,u$ gesetzt wird.

Die vier vorhergehenden Gleichungen dienen nun zur Bestimmung von p, q, r und k'. Man findet durch wirkliche Entwicklung

$$LN - M^2 = m^2(q-p)^2 \quad \text{und} \quad L'N' - M'^2 = m'^2(q-p)^2,$$

und da $M = M' = 0$ sein soll, so hat man einfacher

$$LN = m^2(q-p)^2 \quad \text{und} \quad L'N' = m'^2(q-p)^2. \quad \text{Da ferner}$$
$$\frac{Nr^2}{L} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{N'r^2}{L'} = k'^2$$

sein soll, so hat man $N^2r^2 = m^2(q-p)^2$, $L^2 = r^2m^2(q-p)^2$, $N'^2r^2 = k'^2m'^2(q-p)^2$ und $L'^2 = \frac{r^2}{k'^2}m'^2(q-p)^2$, also

$$Nr = m(q-p), \quad L = rm(q-p), \quad N'r = k'm(q-p), \quad L' = \frac{rm'}{k'}(q-p).$$

Hieraus folgt $LL' = \frac{r^2mm'(q-p)^2}{k'}$, also $\frac{1}{\sqrt{(LL')}} = \sqrt{\frac{k'}{mm'}} \cdot \frac{1}{r(q-p)}$, und also

$$y = \sqrt{\left(\frac{k'}{mm'}\right)} \cdot u,$$

wie schon oben gefunden wurde. Ferner haben wir

$$L = L - M = b(p-q) + cp(p-q) = (b + cp)(p-q),$$
$$N = N - M = b(q-p) + cq(q-p) = (b + cq)(q-p),$$
$$L' = L' - M' = b'(p-q) + c'p(p-q) = (b' + c'p)(p-q),$$
$$N' = N' - M' = b'(q-p) + c'q(q-p) = (b' + c'q)(q-p),$$

und werden diese Gleichungen mit den vorigen verbunden, so erhält man

$$rm = -(b+cp) \quad \text{und} \quad \frac{rm'}{k'} = -(b'+c'p),$$

$$m = r(b+cq) \quad - \quad k'm' = r(b'+c'q),$$

oder

$$r = -\frac{b+cp}{m} = \frac{m}{b+cq}, \quad \frac{k'}{r} = -\frac{m'}{b'+c'p} = \frac{b'+c'q}{m'}.$$

Die Gleichungen $M=0$ und $M'=0$ geben

$$a+b(q+p)+cpq = 0, \qquad a'+b'(q+p)+c'pq = 0,$$

und hieraus folgt

$$q+p = \frac{ca'-ac'}{bc'-cb'} \quad \text{und} \quad pq = \frac{ab'-ba'}{bc'-cb'}.$$

Diese beiden Gleichungen dienen zur Bestimmung von p und q, während die beiden vorigen Gleichungen zur Bestimmung von r und k dienen.

Ehe wir nun die Formeln für p und q selbst herleiten, beachten wir, daſs, dem Ausdrucke

$$x = \frac{p+qr\,\mathrm{tn}\,u}{1+r.\mathrm{tn}\,u}$$

gemäſs, für $u=0$, $x=p$ und für $u=K$, $x=q$ ist und also p und q dieselben Gröſsen sind, welche früher mit A und B bezeichnet wurden. Betrachten wir nun $bc'-cb'$ als positiv, so haben wir

$$q-p = \frac{\sqrt{[(ac'-ca')^2-4(ab'-ba')(bc'-cb')]}}{bc'-cb'} \text{ oder auch}$$

$$q-p = \frac{\sqrt{[(ac'+ca'-2bb')^2-4m^2m'^2]}}{bc'-cb'} \text{ und also}$$

$$q = \frac{ca'-ac'+\sqrt{[(ac'+ca'-2bb')^2-4m^2m'^2]}}{2(bc-cb')},$$

$$p = \frac{ca'-ac'-\sqrt{[(ac'+ca'-2bb')^2-4m^2m'^2]}}{2(bc'-cb')}.$$

Ferner ist $r = \frac{-b-cp}{m}$ und $\frac{1}{r} = \frac{b+cq}{m}$; also ist

$$r+\frac{1}{r} = \frac{c(q-p)}{m}, \quad \text{oder} \quad r^2 = \frac{c(q-p)}{m}.r+1 = 0.$$

Setzen wir also $r = \mathrm{tang}\,\alpha$, wie früher, so haben wir $\frac{2}{\sin 2\alpha} = \frac{c(q-p)}{m}$, also

$$\sin 2\alpha = \frac{2m}{c(q-p)}.$$

Eben so findet man $\frac{1}{r}-r = \frac{2b+c(p+q)}{m}$, oder auch

$$\cot 2\alpha = \frac{1}{2m}(2b+c(p+q)).$$

Weiter ist $k' = -\frac{(b+cp)(b'+c'q)}{mm'}$ und $\frac{1}{k'} = -\frac{(b'+c'p)(b+cq)}{mm'}$, also ist

$$k' + \frac{1}{k'} = -\frac{[2bb' + (bc+cb')(p+q) + cc'pq]}{mm'},$$

und werden hierin für $p+q$ und pq die vorhin gefundenen Werthe substituirt, so erhält man

$$(bc'+cb')(p+q) + 2cc'pq = \frac{(bc'+cb')(ca'-ac') + 2cc'(ab'-ba')}{bc'-cb'} = -ac'-ca',$$

und es ist also

$$k' + \frac{1}{k'} = \frac{ac'+ca'-2bb'}{mm'} \quad \text{oder} \quad k'^2 - \frac{ac'+ca'-2bb'}{mm'}k' + 1 = 0$$

wie früher die zur Bestimmung von k' und also auch von k selbst dienende quadratische Gleichung, woraus, wenn man

$$\gamma = \frac{ac'+ca'-2bb'}{2mm'} \text{ setzt, } k' = \gamma - \sqrt{(\gamma^2-1)} \text{ folgt.}$$

Somit sind alle in den Formeln $x = \frac{p+qr\,\text{tn}\,u}{1+r\,\text{tn}\,u}$ und $y = \sqrt{\frac{k'}{mm'}}.u$ vorkommende Constanten bestimmt worden.

Aus der Formel $x = \frac{p+qr\,\text{tn}\,u}{1+r\,\text{tn}\,u}$ folgt durch Umkehrung $\text{tn}\,u = \frac{x-p}{r(q-x)}$, und werden hierin die aus den Gleichungen $rm = -(b+cp)$ und $m = r(b+cp)$ gezogenen Werthe

$$p = -\frac{rm+b}{c} \quad \text{und} \quad q = \frac{m-rb}{cr}$$

substituirt, so erhält man $\text{tn}\,u = \frac{cx+b+rm}{m-rb-crx} = \frac{r + \frac{cx+b}{m}}{1 - r.\left(\frac{cx+b}{m}\right)}$ oder

$$\text{am}\,u = \text{arc tang}(r) + \text{arc tang}\left(\frac{cx+b}{m}\right), \text{ oder auch}$$

$$\text{am}\,u = \alpha + \text{arc tang}\left(\frac{cx+b}{m}\right).$$

Differenziirt man diese Gleichung, so erhält man

$$\text{dn}\,u.\partial u = \frac{mc\,\partial x}{m^2+b^2+2bcx+c^2x^2} = \frac{m\,\partial x}{a+2bx+cx^2},$$

und weil $\sqrt{\left(\frac{k'}{mm'}\right)}u = y$, also

$$\sqrt{\left(\frac{k}{mm'}\right)}\,\partial u = \partial y = \frac{\partial x}{\sqrt{(a+2bx+cx^2)}\sqrt{(a'+2b'x+c'x^2)}}$$

ist, so erhält man durch die Division, wie vorhin

$$\text{dn}\,u = \sqrt{\left(\frac{mk'}{m'}\right)}.\sqrt{\frac{a'+2b'x+c'x^2}{a+2bx+cx^2}}.$$

Das hier gefundene Integral ist

$$y = \int_p \frac{\partial x}{\sqrt{(a+2bx+cx^2)}\sqrt{(a'+2b'x+c'x^2)}};$$

das Integral $\int \frac{\partial x}{\sqrt{(a+2bx+cx^2)}.\sqrt{(a'+2b'x+c'x^2)}}$ ist also $= \sqrt{\left(\frac{k'}{mm'}\right)}.(u-u')$, wenn man u' nach der Formel $\operatorname{tn} u' = -\frac{p}{q.r}$ oder $\operatorname{dn} u' = \sqrt{\left(\frac{m a' k'}{m a'}\right)}$ bestimmt. Für $x = \frac{1}{0}$ ist $\operatorname{tn} u = \frac{-1}{r}$, also $\operatorname{am} u = \frac{1}{2}\pi + \alpha$ und $\operatorname{dn} u = \sqrt{\frac{m c' k'}{m' c}}$, und für $x = \frac{p+q}{2}$ ist $\operatorname{tn} u = \frac{1}{r}$, also $\operatorname{am} u = \frac{1}{2}\pi - \alpha$.

§. 233.

Die Integration $y = \int \frac{\partial x}{\sqrt{R}}$, wenn R zwei reelle und zwei imaginäre Factoren hat, welche Formen des ersten Grades in Ansehung von x sind.

Hat die Gleichung $R = 0$ vier Wurzeln, und sind zwei derselben $x = p$ und $x = q$ reell, und zwei imaginär, so mag $a + 2bx + cx^2$ die quadratische Form sein, welche, $= 0$ gesetzt, die beiden imaginären Wurzeln giebt. Wir sehen wieder a und mithin auch c als positiv an und setzen auch wieder

$$m^2 = ac - b^2,$$

indem diese Gröſse positiv ist. Unter der Voraussetzung, daſs a positiv sei, ist der Ausdruck $a + 2bx + cx^2$ immer positiv, welcher reelle Werth auch für x genommen werden mag; daher sind namentlich die Ausdrücke $a + 2bp + cp^2$ und $a + 2bq + cq^2$ positiv. Wir setzen also

$$n^2 = a + 2bp + cp^2 \quad \text{und} \quad n'^2 = a + 2bq + cq^2.$$

Wenn die Wurzeln p und q sich gleich wären, so würde man das Integral in Anwendung der Potenzial-Functionen finden; daher sehen wir die beiden Wurzeln als verschieden an, und zwar sei wieder

$$q > p, \quad \text{oder} \quad q - p \text{ positiv.}$$

Bei der Integration müssen drei Fälle unterschieden werden, jenachdem x entweder kleiner als die kleinste Wurzel p sein soll, oder zwischen den Grenzen p und q enthalten ist, oder gröſser als die gröſste Wurzel q sein soll. Wir behandeln den mittleren Fall zuerst.

I. Ist x zwischen den Grenzen p und q enthalten, so sind die Differenzen $x - p$ und $q - x$ positiv, oder mindestens $= 0$, und da $a + 2bx + cx^2$ immer positiv ist, so setzen wir nun

$$R = (x-p)(q-x)(a+2bx+cx^2)$$

und integriren also eigentlich

$$\gamma = \int_p \frac{\partial x}{\sqrt{R}}.$$

Da $\frac{x-p}{q-x}$ positiv ist, so setzen wir $\frac{x-p}{q-x} = v^2$. Dann ist rückwärts

$$x = \frac{p+qv^2}{1+v^2}, \quad \text{also} \quad \partial x = \frac{2(q-p)v\partial v}{(1+v^2)^2}, \quad \text{ferner}$$

$$x-p = \frac{(q-p)v^2}{1+v^2}, \quad q-x = \frac{q-p}{1+v^2}, \quad \sqrt{((x-p)(q-x))} = \frac{(q-p)v}{1+v^2};$$

auch findet man

$$a+2bx+cx^2 = \frac{n^2+2(a+b(p+q)+cpq)v^2+n'^2.v^4}{(1+v^2)^2}.$$

Setzen wir also noch zur Abkürzung

$$a+b(p+q)+c.pq = nn'.\gamma,$$

so haben wir schon die Umformung

$$\gamma = \int_0 \frac{2\partial v}{\sqrt{(n^2+2nn'\gamma.v^2+n'^2.v^4)}}.$$

Durch eine leichte Entwicklung findet sich $n^2.n'^2-(nn'\gamma)^2 = m^2(q-p)^2$, oder

$$\sqrt{(1-\gamma^2)} = \frac{m(q-p)}{nn'},$$

woraus ersichtlich ist, dafs $\gamma^2 < 1$ ist und die weitere Integration also unmittelbar nach §. 223. ausgeführt werden kann. Setzen wir also

$$k = \sqrt{\frac{1-\gamma}{2}}, \quad k' = \sqrt{\frac{1+\gamma}{2}}, \quad \text{so ist}$$

$$v = \sqrt{\frac{x-p}{q-x}} = \sqrt{\frac{n}{n'}}.\text{tang}\tfrac{1}{2}\,\text{am}\,u,$$

$$\gamma = \frac{u}{\sqrt{(nn')}}.$$

Setzt man nun $\gamma = \cos 2\theta$, also

$$\cos 2\theta = \frac{a+b(p+q)+cpq}{\sqrt{(a+2bp+cp^2)}\sqrt{(a+2bq+cq^2)}},$$

$$\sin 2\theta = \frac{m(q-p)}{\sqrt{(a^2+2bp+cp^2)}\sqrt{(a+2bq+cq^2)}},$$

$$\text{tang}\,2\theta = \frac{m(q-p)}{a+b(p+q)+cpq},$$

so hat man

$$k = \sin\theta \quad \text{und} \quad k' = \cos\theta.$$

Aus der Formel $\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,\text{am}\,u = \sqrt{\left(\frac{n'}{n}.\frac{x-p}{q-x}\right)}$ folgt rückwärts

$$x = \frac{nq(1-\text{cn}\,u)+n'p(1+\text{cn}\,u)}{n(1-\text{cn}\,u)+n'(1+\text{cn}\,u)} = \frac{nq+n'p+(n'p-nq)\,\text{cn}\,u}{n'+n+(n'-n)\,\text{cn}\,u}.$$

Für $u = 0$ ist $x = p$ und $y = 0$; für $u = K$ ist $x = \frac{nq + n'p}{n + n'}$ und $y = \frac{K}{\sqrt{(nn')}}$; für $u = 2K$ ist $x = q$ und $y = \frac{2K}{\sqrt{(nn')}}$.

Man findet leicht

$$\text{cn}\,u = \frac{n(q-x) - n'(x-p)}{n(q-x) + n'(x-p)}, \quad \text{also} \quad \text{sn}\,u = \frac{2\sqrt{(nn')}.\sqrt{((q-x)(x-p))}}{n(q-x) + n'(x-p)}.$$

Differenziirt man die erste von diesen Formeln, so erhält man

$$\text{sn}\,u.\text{dn}\,u\,\partial u = \frac{2nn'(q-p)\,\partial x}{(n(q-x) + n'(x-q))^2},$$

und da $\partial u = \frac{\sqrt{(nn')}.\partial x}{\sqrt{R}}$ ist,

$$\text{sn}\,u\,\text{dn}\,u = \frac{2\sqrt{(nn')}.(q-p).\sqrt{R}}{(n(q-x) + n'(x-p))^2}, \text{ also}$$

$$\frac{\text{sn}\,u}{\text{dn}\,u} = \frac{2\sqrt{(nn')}}{q-p}.\frac{(q-x)(x-p)}{\sqrt{R}}, \text{ oder}$$

$$\text{cnc}\,u = \frac{2k'\sqrt{(nn')}}{q-p}.\sqrt{\frac{(q-x)(x-p)}{a + 2bx + cx^2}}.$$

Es kann dieser Ausdruck noch etwas einfacher dargestellt werden. Es ist $\frac{2k'.\sqrt{(nn')}}{q-p} = \sqrt{\frac{4\cos^2\theta.nn'}{(q-p)^2}}$, und da $nn' = \frac{m(q-p)}{\sqrt{(1-\gamma^2)}} = \frac{m(q-p)}{2\sin\theta\cos\theta}$ ist, so hat man $\frac{2k'\sqrt{(nn')}}{q-p} = \sqrt{\frac{2\cot\theta.m}{q-p}}$, und also

$$\text{cnc}\,u = \sqrt{\frac{2mk'}{(q-p)k}}.\sqrt{\frac{(x-p)(q-x)}{a + 2bx + cx^2}}.$$

Zu derselben Formel gelangt man unmittelbar, wenn man das Integral $y = \int \frac{\partial x}{\sqrt{R}}$ auf ähnliche Art behandelt, wie in §. 229. und 230. gezeigt worden ist; an der Stelle der dortigen Function $\text{dnc}\,u$ haben wir jetzt die Function $\text{cnc}\,u$. Aus den vorigen Formeln folgt auch noch

$$\text{dn}\,u = \frac{(q-p)\sqrt{(a + 2bx + cx^2)}}{n(q-x) + n'(x-p)} \quad \text{und} \quad \text{snc}\,u = \frac{n(q-x) - n'(x-p)}{(q-p)\sqrt{(a + 2bx + cx^2)}}.$$

Soll in den früheren Formeln x abnehmen, wenn u wächst, und umgekehrt, so hat man nur durchgängig $2K - u$ statt u, also $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\text{am}\,u$ statt $\frac{1}{2}\text{am}\,u$ zu setzen.

§. 234.

II. Ist die veränderliche Gröfse x kleiner als die kleinste reelle Wurzel p der Gleichung $R = 0$, so ist die Differenz $p - x$ und um so mehr also $q - x$ positiv. Wir setzen nun

$$R = (p-x)(q-x).(a + 2bx + cx^2),$$

und wieder $m^2 = ac - b^2$, sehen auch wieder a und mithin auch c als positiv an. Zu integriren ist nun

$$\gamma = \int_p \frac{-\partial x}{\sqrt{R}},$$

wenn γ für $x = p$ gleich Null sein und wachsen soll, während x von p an fortwährend abnimmt. Man erhält die auf diesen Fall sich beziehenden Formeln unmittelbar, wenn man in den Formeln des §. 233. $-R$ statt R, also $i\sqrt{R}$ statt $\sqrt{R}$, ui statt u setzt und aufserdem k mit k' vertauscht, wodurch $\cos 2\theta$ oder γ sich mit $-\cos 2\theta$ oder $-\gamma$ vertauscht. Setzt man also

$$\cos 2\theta = -\frac{a+b(p+q)+cpq}{\sqrt{(a+2bp+cp^2)}\sqrt{(a+2bq+cq^2)}} = -\gamma,$$

$$\sin 2\theta = \frac{m(q-p)}{\sqrt{(a+2bp+cp^2)}\sqrt{(a+2bq+cq^2)}} = \sqrt{(1-\gamma^2)},$$

$$\tang 2\theta = -\frac{m(q-p)}{a+b(p+q)+cpq} = -\frac{\sqrt{(1-\gamma^2)}}{\gamma},$$

$$k = \sin\theta \quad \text{und} \quad k' = \cos\theta,$$

so erhält man

$$\tang \tfrac{1}{2} \operatorname{am} u = \sqrt{\left(\frac{n'}{n} \cdot \frac{p-x}{q-x}\right)},$$

$$x = \frac{n'p(1+\operatorname{cn} u) - nq(1-\operatorname{cn} u)}{n'(1+\operatorname{cn} u) - n(1-\operatorname{cn} u)} = \frac{n'p - nq + (n'p+nq)\operatorname{cn} u}{n'-n+(n'+n)\operatorname{cn} u},$$

$$\gamma = \frac{u}{\sqrt{(nn')}},$$

wenn wieder gesetzt wird $n^2 = a + 2bp + cp^2$, $n'^2 = a + 2bq + cq^2$,

$$\gamma = \frac{a+b(p+q)+cpq}{nn'} \quad \text{und} \quad \sqrt{(1-\gamma^2)} = \frac{m(q-p)}{nn'}.$$

Nimmt man x unendlich grofs und negativ, so wird $\tang \frac{1}{2} \operatorname{am} u = \sqrt{\frac{n'}{n}} > 1$ und $< \frac{1}{0}$; daher ist nun u immer zwischen den Grenzen 0 und K enthalten.

III. Ist die veränderliche Gröfse x gröfser als die gröfste reelle Wurzel q der biquadratischen Gleichung $R = 0$, so ist $x - q$ positiv und also um so mehr $x - p$. Wir setzen nun

$$R = (x-q)(x-p)(a+2bx+cx^2),$$

und suchen also das Integral $\gamma = \int_q \frac{\partial x}{\sqrt{R}}$. Die Formeln sind denen in No. II. ähnlich; man hat in ihnen nur jetzt p mit q, also auch n mit n' zu vertauschen. Setzt man also

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\operatorname{am} u = \sqrt{\frac{n}{n'}}\cdot\frac{x-q}{x-p},$$

$$x = \frac{nq(1+\operatorname{cn} u) - n'p(1-\operatorname{cn} u)}{n(1+\operatorname{cn} u) - n'(1-\operatorname{cn} u)}, \quad \text{so ist} \quad y = \frac{u}{\sqrt{(nn')}}.$$

Für $x = q$ ist nun $u = 0$ und für $x = \frac{1}{0}$ ist $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\operatorname{am} u = \sqrt{\frac{n}{n'}}$.

Zusatz. Die Formel $\operatorname{dn} u$ in No. II. ist

$$\operatorname{dn} u = \frac{(q-p)\sqrt{(a+2bx+cx^2)}}{n(q-x)+n'(p-x)};$$

in No. III. ist sie also

$$\operatorname{dn} u = \frac{(q-p)\sqrt{(a+2bx+cx^2)}}{n'(x-p)+n(x-q)}.$$

§. 235.

Von den Integralen $y = \int_0 \frac{\partial x}{\sqrt{(1+x^4)}}$ und $y = \int_0 \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^4)}}$.

Es ist zunächst $(x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1) = x^4 + 1$; setzen wir aber in den Formeln §. 232. $a = 1$, $2b = \sqrt{2}$, also $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $c = 1$, $a' = 1$, $b' = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $c' = 1$; folglich $m^2 = 1 - \frac{1}{2} = m'^2$, oder $m = m' = \sqrt{\frac{1}{2}}$, so ist $p + q = 0$, $pq = -1$, also $p = -1$ und $q = 1$, $q - p = 2$, $r^2 - 2r\sqrt{2} + 1 = 0$, $\sin 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, also $2\alpha = \frac{1}{4}\pi$, folglich $r = \operatorname{tang}\alpha = \operatorname{tang}\frac{1}{8}\pi = \sqrt{2} - 1$ (oder $r = \sqrt{2} \pm 1$), $\gamma = \frac{2+1}{2mm'} = 3$, also $\sqrt{(\gamma^2 - 1)} = 2\sqrt{2}$, folglich $k' = 3 - 2\sqrt{2}$, also $k = 2\sqrt{(3\sqrt{2} - 4)}$. Es ist also

$$1. \begin{cases} x = \dfrac{-1 + \operatorname{tang}\frac{1}{8}\pi . \operatorname{tn} u}{+1 + \operatorname{tang}\frac{1}{8}\pi . \operatorname{tn} u}, \quad \text{oder} \\ \operatorname{am} u = \frac{1}{8}\pi + \operatorname{arc tang}(1 + x\sqrt{2}) \text{ und } \operatorname{dn} u = \sqrt{(3 - 2\sqrt{2})}.\sqrt{\dfrac{1 - x\sqrt{2} + x^2}{1 + x\sqrt{2} + x^2}}; \\ \displaystyle\int_{-1} \frac{\partial x}{\sqrt{(1+x^4)}} = u.\sqrt{(6 - 4\sqrt{2})}. \end{cases}$$

Hieraus folgt noch $\int_0 \frac{\partial x}{\sqrt{(1+x^4)}} = (u - u').\sqrt{(6 - 4\sqrt{2})}$, wenn das Argument u' durch die Formel $\operatorname{am} u' = \frac{3}{8}\pi$ bestimmt wird, in welcher der Modul ebenfalls $k = 2\sqrt{(3\sqrt{2} - 4)}$ ist.

Da $\sqrt{(1-x^4)} = \sqrt{(1-x^2)}\sqrt{(1+x^2)}$ ist, so integriren wir $\frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^4)}}$ nach §. 234. Es ist $p = -1$, $q = 1$, $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$, $q - p = 2$, $m = 1$, $p + q = 0$, $pq = -1$, also

$$\tang 2\theta = \frac{2}{1-1} = \tfrac{1}{0}, \text{ also } \theta = \tfrac{1}{4}\pi, \text{ folglich}$$
$$k = \sin\tfrac{1}{4}\pi = \sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

Ferner ist $n = \sqrt{2} = n'$, also $\tang\frac{1}{2}\operatorname{am} u = \frac{1+x}{1-x}$, $x = -\operatorname{cn} u$ und

$$\int_{-1}\frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^4)}} = \tfrac{1}{2}u, \text{ also } \int_0 \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^4)}} = \tfrac{1}{2}(u-K).$$

Man kann diese Integrale noch einfacher darstellen. Setzt man $-x$ für x, so hat man

$$2. \quad x = \operatorname{cn} u, \quad \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^4)}} = -\tfrac{1}{2}\partial u, \quad \text{also } \int_0 \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^4)}} = \tfrac{1}{2}(K-u),$$

und der Modular-Quadrant für den Modul $k = \sin\frac{1}{4}\pi$ ist

$$K = 1{,}85407\,46773\,01\ldots \text{ nach } \textit{Legendre}.$$

§. 236.

Die Integration von $y = \int\frac{\partial x}{\sqrt{R}}$, wenn $R = 0$ nur eine Gleichung des dritten Grades mit zwei imaginären und einer reellen Wurzel ist.

Ist R nur eine cubische Gleichung mit zwei imaginären Wurzeln, und hat diese Gleichung also eine reelle Wurzel, so können wir die Integration unter die beiden in §. 234. vorgenommenen Integrationen subsumiren, indem wir uns vorstellen, dafs entweder q positiv und $= \frac{1}{0}$, oder p negativ und $= \frac{1}{0}$ wird.

Im ersten Falle haben wir für ein immer kleiner werdendes x:

$$y = \int_p \frac{-\partial x}{\sqrt{((p-x)(a+2bx+cx^2))}},$$

und setzen wir

$$\cos 2\theta = -\frac{b+cp}{\sqrt{c}.\sqrt{(a+2bp+cp^2)}} = -\gamma,$$
$$\sin 2\theta = \frac{m}{\sqrt{c}.\sqrt{(a+2bp+cp^2)}} = \sqrt{(1-\gamma^2)},$$
$$\tang 2\theta = -\frac{m}{b+cp} = -\frac{\sqrt{(1-\gamma^2)}}{\gamma},$$

so ist wieder

$$k = \sin\theta, \quad k' = \cos\theta, \quad \text{oder} \quad k = \sqrt{\frac{1-\gamma}{2}} \quad \text{und} \quad k' = \sqrt{\frac{1+\gamma}{2}},$$

$\tang\frac{1}{2}\operatorname{am} u = \sqrt{\left(\frac{n'}{n}.(p-x)\right)}$, wenn $n^2 = a+2bp+cp^2$ und $n'^2 = c$ gesetzt wird,

$$y = \frac{u}{\sqrt{(nn')}} \quad \text{und} \quad \operatorname{dn} u = \frac{\sqrt{(a+2bx+cx^2)}}{n} = \sqrt{\frac{a+2bx+cx^2}{a+2bp+cp^2}}.$$

Im zweiten Falle haben wir zu integriren:

$$y = \int_q \frac{\partial x}{\sqrt{((x-q)(a+2bx+cx^2))}}.$$

Setzen wir

$$\cos 2\theta = \frac{b+cq}{\sqrt{a}.\sqrt{(a+2bq+cq^2)}}, \qquad \sin 2\theta = \frac{m}{\sqrt{a}.\sqrt{(a+2bq+cq^2)}},$$

$$\operatorname{tang} 2\theta = \frac{m}{b+cq},$$

so ist $k = \sin\theta$ und $k' = \cos\theta$; ferner

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \operatorname{am} u = \sqrt{\left(\frac{n}{n'}.(x-q)\right)},$$

wenn wir $n^2 = a$, $n'^2 = a + 2bq + cq^2$,

$$\operatorname{d\!n} u = \sqrt{\frac{a+2bx+cx^2}{a+2bq+cq^2}} \quad \text{und} \quad y = \frac{u}{\sqrt{(nn')}} \text{ setzen.}$$

Zusatz. Ist zu integriren $y = \int_{-1} \frac{\partial x}{\sqrt{(1+x^3)}}$, also $R = 1 + x^3 = (1+x)(1-x+x^2)$, so ist $q = -1$, $a = 1$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = 1$, also $n = 1$, $n'^2 = a + 2bq + cq^2 = 3$, also $n' = \sqrt{3}$; ferner $m^2 = 1 - \frac{1}{4}$, also $m = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$$\operatorname{tang} 2\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \text{also} \quad 2\theta = \pi - \tfrac{1}{6}\pi = \tfrac{5}{6}\pi \quad \text{und} \quad \theta = \tfrac{5}{12}\pi = 75^0,$$

$$k = \sin \tfrac{5}{12}\pi = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}, \quad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \operatorname{am} u = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}.\sqrt{(1+x)},$$

$$y = \int_{-1} \frac{\partial x}{\sqrt{(1+x^3)}} = \frac{u}{\sqrt[4]{3}}.$$

Aus dem gefundenen Resultate folgt $\int_0 \frac{\partial x}{\sqrt{(1+x^3)}} = \frac{u-u'}{\sqrt[4]{3}}$, wenn $\operatorname{tang} \frac{1}{2} \operatorname{am} u' = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ gesetzt wird.

Setzt man $-x$ statt x, so hat man

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \operatorname{am} u = \frac{\sqrt{(1+x)}}{\sqrt[4]{3}} \quad \text{und} \quad \int_0 \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^3)}} = \frac{u'-u}{\sqrt[4]{3}}.$$

Die Formel für u' bleibt dieselbe; wie auch der Modul $k = \sin \frac{5}{12}\pi$.

§. 237.

Die Integration $y = \int \frac{\partial x}{\sqrt{R}}$, wenn $R = 0$ eine biquadratische Gleichung mit vier reellen Wurzeln oder $R = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$ ist.

Soll $\frac{\partial x}{\sqrt{R}} = \partial y$ integrirt werden und hat die Gleichung $R = 0$ vier reelle Wurzeln, die wir durch a, b, c, d vorstellen, und die so geordnet sein

mögen, dafs $a<b<c<d$ sei, und also die Differenzen $b-a$, $c-b$, $d-c$, oder auch $d-c$, $d-b$, $d-a$ sämmtlich positiv sind, so ist entweder $R=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$ oder $R=-(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$; und im zweiten Falle mufs nothwendig einer von den vier zweigliedrigen Factoren negativ sein, weil $\sqrt{R}$ reell sein mufs.

Ist $R=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$, und wäre x zwischen den Grenzen a und b enthalten, so wäre die Differenz $x-a$ positiv, die drei anderen Factoren wären negativ, also $\sqrt{R}$ imaginär; ist x zwischen b und c enthalten, so sind $x-a$ und $x-b$ positiv, $x-c$ und $x-d$ aber negativ, also ist dann $\sqrt{R}$ reell und $=\sqrt{((x-a)(x-b)(c-x)(d-x))}$; ist x zwischen c und d enthalten, so sind die drei ersten Factoren positiv, der vierte ist negativ, also $\sqrt{R}$ imaginär; ist endlich x zwischen d und a enthalten, wobei man sich einen Uebergang durch $\pm\frac{1}{0}$ von d nach a vorstellen kann, so sind entweder alle vier Factoren positiv, oder alle vier Factoren sind negativ; daher ist $\sqrt{R}$ dann reell.

Also ist $\sqrt{((x-a)(x-b)(x-c)(x-d))}$ nur dann reell, wenn entweder x zwischen den Grenzen b und c,
oder x zwischen den Grenzen d und a enthalten ist.

Ist $R=-(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$, so ist $\sqrt{R}$ da reell, wo in früheren Falle $\sqrt{R}$ imaginär war; daher ist $\sqrt{(-(x-a)(x-b)(x-c)(x-d))}$ nur dann reell, wenn entweder
x zwischen den Grenzen a und b,
oder x zwischen den Grenzen c und d enthalten ist.

1. Beschäftigen wir uns zuerst mit dem Integrale $y=\int\frac{\partial x}{\sqrt{R}}$ unter der Voraussetzung, dafs $R=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$ und x zwischen den Grenzen d und a enthalten ist. Da nun $\frac{x-d}{x-a}=\frac{d-x}{a-x}$ ein positiver Bruch ist, welcher mit x zugleich wächst, da $a<b<c<d$ sein soll, so setzen wir

$$\frac{x-d}{x-a}=rv^2.$$

Dann ist rückwärts

$$x=\frac{d-arv^2}{1-rv^2},\quad \text{also}\quad \partial x=\frac{2r(d-a)v\partial v}{(1-rv^2)^2},$$

$$x-a=\frac{d-a}{1-rv^2},\ x-d=\frac{(d-a)rv^2}{1-rv^2},\ \text{also}\ \sqrt{((x-a)(x-d))}=\frac{(d-a)v\sqrt{r}}{1-rv^2},\ \text{und}$$

$$\frac{\partial x}{\sqrt{((x-a)(x-d))}}=\frac{2\sqrt{r}.\partial v}{1-rv^2};$$

weiter ist $x-c=\frac{d-c+(c-a)rv^2}{1-rv^2}$ und $x-b=\frac{d-b+(b-a)rv^2}{1-rv^2}$, also haben wir

$$\partial y=\frac{2\sqrt{r}.\partial v}{\sqrt{(d-c+(c-a)rv^2)}.\sqrt{(d-b+(b-a)rv^2)}}.$$

Da der Unterschied der beiden Brüche $\frac{c-a}{d-c}-\frac{b-a}{d-b}$ positiv und $=\frac{(c-b)(d-a)}{(d-c)(d-b)}$ ist, so setzen wir $\frac{c-a}{d-c}.r=1$, $\frac{b-a}{d-b}.r=k'^2$ und $v=\operatorname{tn}u$ für den Modul k; dann ist

$$y=\frac{2\sqrt{r}}{\sqrt{((d-c)(d-b))}}.u,$$

und da $\sqrt{r}=\sqrt{\frac{d-c}{c-a}}$ ist, so ist

1. $$y=\frac{2u}{\sqrt{((c-a)(d-b))}}=\int_d\frac{\partial x}{\sqrt{((x-a)(x-b)(x-c)(x-d))}},$$

2. $$\operatorname{tn}u=\sqrt{\frac{(c-a)(x-d)}{(d-c)(x-a)}}$$ und

3. $$k'=\sqrt{\frac{(b-a)(d-c)}{(c-a)(d-b)}},\quad \text{also}\quad k=\sqrt{\frac{(c-b)(d-a)}{(c-a)(d-b)}}.$$

Da $\operatorname{tnc}u=\frac{1}{k'\operatorname{tn}u}$ ist, so ist

4. $$\operatorname{tnc}u=\sqrt{\frac{(d-b)(x-a)}{(b-a)(x-d)}}.$$

Aus den Formeln für $\operatorname{tn}u$ und $\operatorname{tnc}u$ finden wir nun noch leicht die Formeln

5. $$\begin{cases}\operatorname{sn}u=\sqrt{\frac{(c-a)(x-d)}{(d-a)(x-c)}}, & \operatorname{snc}u=\sqrt{\frac{(d-b)(x-a)}{(d-a)(x-b)}},\\ \operatorname{cn}u=\sqrt{\frac{(d-c)(x-a)}{(d-a)(x-c)}}, & \operatorname{cnc}u=\sqrt{\frac{(b-a)(x-d)}{(d-a)(x-b)}},\\ k\operatorname{sn}u=\sqrt{\frac{(c-b)(x-d)}{(d-b)(x-c)}}, & k\operatorname{snc}u=\sqrt{\frac{(c-b)(x-a)}{(c-a)(x-b)}},\\ \operatorname{dn}u=\sqrt{\frac{(d-c)(x-b)}{(d-b)(x-c)}}, & \operatorname{dnc}u=\sqrt{\frac{(b-a)(x-c)}{(c-a)(x-b)}}.\end{cases}$$

Aus diesen Formeln lassen sich durch Zusammensetzung andere herleiten. Für $u=0$ ist $x=d$ und $y=0$; für $u=K$ aber ist $x=a$ und $y=\frac{2K}{\sqrt{((c-a)(d-b))}}=\int_d^a\frac{\partial x}{\sqrt{R}}$.

§. 238.

II. Soll $y=\int\frac{\partial x}{\sqrt{R}}$ unter der Voraussetzung gefunden werden, dafs $R=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$ ist und x zwischen den Grenzen b und c liegt, so setzen wir, da nun $\frac{x-b}{c-x}$ ein positiver Bruch ist,

$$\frac{x-b}{c-x}=rv^2;$$

dann ist rückwärts $x=\frac{b+crv^2}{1+rv^2}$, $\partial x=\frac{2(c-b)rv\partial v}{(1+rv^2)^2}$, $x-b=\frac{(c-b)rv^2}{1+rv^2}$, $c-x=\frac{c-b}{1+rv^2}$, $\sqrt{((x-b)(c-x))}=\frac{(c-b)\sqrt{r}.v}{1+rv^2}$, $x-a=\frac{b-a+(c-a)rv^2}{1+rv^2}$ und $d-x=\frac{d-b+(d-c)rv^2}{1+rv^2}$. Setzen wir nun

$$y=\int_b\frac{\partial x}{\sqrt{((x-a)(x-b)(c-x)(d-x))}},$$

so erhalten wir durch Zusammensetzung der vorigen Ausdrücke:

$$\partial y=\frac{2\sqrt{r}.\partial v}{\sqrt{((b-a)+(c-a)rv^2)}.\sqrt{(d-b+(d-c)rv^2)}},$$

und da nach §. 237. $\frac{c-a}{d-c}>\frac{b-a}{d-b}$, also auch $\frac{c-a}{b-a}>\frac{d-c}{d-a}$ ist, so setzen wir nun

$$\frac{c-a}{b-a}.r=1,\quad \frac{d-c}{d-b}.r=k'^2,\quad v=\text{tn}\,u;$$

dann ist zunächst

$$y=\frac{2\sqrt{r}}{\sqrt{((b-a)(d-b))}}u,\quad \text{oder, da}\quad r=\frac{b-a}{c-a}\quad\text{ist,}$$

$$1.\quad y=\frac{2u}{\sqrt{((c-a)(d-b))}}=\int_b\frac{\partial x}{\sqrt{((x-a)(x-b)(x-c)(x-d))}},$$

$$2.\quad k'=\sqrt{\frac{(b-a)(d-c)}{(c-a)(d-b)}}\quad\text{und}\quad k=\sqrt{\frac{(c-b)(d-a)}{(c-a)(d-b)}},$$

$$3.\quad \text{tn}\,u=\sqrt{\frac{(c-a)(x-b)}{(b-a)(c-x)}}\quad\text{und}\quad \text{tnc}\,u=\sqrt{\frac{(d-b)(c-x)}{(d-c)(x-b)}}.$$

Hieraus folgt

$$4.\quad\begin{cases}\text{sn}\,u=\sqrt{\frac{(c-a)(x-b)}{(c-b)(x-a)}}; & \text{snc}\,u=\sqrt{\frac{(d-b)(c-x)}{(c-b)(d-x)}},\\ \text{cn}\,u=\sqrt{\frac{(b-a)(c-x)}{(c-b)(x-a)}}; & \text{cnc}\,u=\sqrt{\frac{(d-c)(x-b)}{(c-b)(d-x)}},\\ \text{dn}\,u=\sqrt{\frac{(b-a)(d-x)}{(d-b)(x-a)}}; & \text{dnc}\,u=\sqrt{\frac{(d-c)(x-a)}{(c-a)(d-x)}}.\end{cases}$$

Für $u=0$ ist jetzt $x=b$ und $y=0$, und für $u=K$ ist $x=c$ und $y=\frac{2K}{\sqrt{((c-a)(d-b))}}$.

§. 239.

Von den coordinirten Werthen von x in den beiden Integrationen von $\frac{\partial x}{\sqrt{R}}$.

Ehe wir weiter gehen, stellen wir einige Betrachtungen über die in §. 237. und §. 238. gefundenen Resultate an. Wir haben gesehen, daſs das Differenzial $\frac{\partial x}{\sqrt{R}}$ auf zwei ganz verschiedene Arten in $\frac{2.\partial u}{\sqrt{((c-a)(d-b))}}$ umgeformt und demgemäſs auch auf zwei verschiedene Arten integrirt werden kann, wenn $R=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$ ein Product von vier reellen Factoren ist; die beiden Modul k und k' finden sich in übereinstimmender Gröſse bei beiden Integrationen; beide Integrationen geben die Werthe 0, wenn x den ersten Grenzwerth erhält, und beide Integrale werden $=\frac{2K}{\sqrt{((c-a)(d-b))}}$, wenn x den zweiten Grenzwerth erhält; *verschieden sind nur die Werthe von x, welche in den beiden Integrationen zu einem und demselben Argumente u gehören,* und solche zwei zu demselben Argumente u gehörige Werthe von x nennen wir einander *beigeordnete* oder *coordinirte* Werthe; coordinirt sind also die Grenzwerthe $x=d$ und $x=b$, weil beide zu $u=0$ gehören; coordinirt sind ferner die Werthe $x=a$ und $x=c$ in den beiden Integrationen, weil beide zu dem Argumente $u=K$ gehören. Um die übrigen coordinirten Werthe von x kennen zu lernen, habe u in beiden Integrationen denselben Werth, und der dazu gehörige Werth von x in §. 237. werde durch x selbst, der dazu gehörige coordinirte Werth von x in §. 238. aber werde durch x' bezeichnet: dann ist gleichzeitig

$$\operatorname{sn} u = \sqrt{\frac{(c-a)(x-d)}{(d-a)(x-c)}} = \frac{(c-a)(x'-b)}{(c-b)(x'-a)}.$$

Hieraus folgt rückwärts

$$1.\quad \begin{cases} x = \dfrac{d(c-a)-c(d-a)\operatorname{sn}^2 u}{c-a-\quad(d-a)\operatorname{sn}^2 u} = \dfrac{d(c-a)\operatorname{cn}^2 u - a(d-c)\operatorname{sn}^2 u}{(c-a)\operatorname{cn}^2 u - \quad(d-c)\operatorname{sn}^2 u}, \\ x' = \dfrac{b(c-a)-a(c-b)\operatorname{sn}^2 u}{c-a-\quad(c-b)\operatorname{sn}^2 u} = \dfrac{b(c-a)\operatorname{cn}^2 u + c(b-a)\operatorname{sn}^2 u}{(c-a)\operatorname{cn}^2 u + \quad(b-a)\operatorname{sn}^2 u}, \end{cases}$$

und hiernach lassen sich für jedes Argument u die beiden zugeordneten Werthe von x berechnen. Für $u=0$ geben sie wirklich $x=d$ und $x'=b$ und für $u=K$ erhalten wir $x=a$ und $x'=c$.

In Hinsicht auf die Verschiedenheit der coordinirten Werthe von x nennen wir die beiden Integrationen des §. 237. und §. 238. selbst coordinirt.

Vertauscht man in den Formeln, welche sich auf die eine Integration von $y=\int\frac{\pm\partial x}{\sqrt{B}}$ *beziehen, a mit c, b mit d und x mit x'* (unter der Voraussetzung, dafs in den Formeln des §. 238. *x in x' wirklich abgeändert worden ist*), *so bleiben die Gröfsen u, y, k und k' ungeändert und man erhält dadurch die sich auf die coordinirte Integration beziehenden Formeln.*

Als Umformungen der Ausdrucke (1.) mögen noch angemerkt werden:

$$2.\quad\begin{cases} x=\dfrac{a(d-c)-c(d-a)\,\mathrm{cn}^2 u}{d-c-(d-a)\,\mathrm{cn}^2 u}=\dfrac{b(d-c)-c(d-b)\,\mathrm{dn}^2 u}{d-c-(d-b)\,\mathrm{dn}^2 u},\\[2ex] x'=\dfrac{c(b-a)-a(b-c)\,\mathrm{cn}^2 u}{b-a-(b-c)\,\mathrm{cn}^2 u}=\dfrac{d(b-a)+a(d-b)\,\mathrm{dn}^2 u}{b-a+(d-b)\,\mathrm{dn}^2 u}.\end{cases}$$

Diese, wie die früheren Formeln, sind bei der Integration von $\frac{P\partial x}{\sqrt{R}}$ zu benutzen, wenn P eine Function von x vorstellt, welche in den meisten Fällen rational sein wird.

Es lassen sich auch leicht Formeln herleiten, nach welchen man auch die einander zugeordneten Werthe x und x' aus einander berechnen kann, ohne die Modular-Functionen des Argumentes u dabei in Rechnung zu bringen; solche Formeln erhält man, wenn man die Ausdrücke der Modular-Functionen von u im §. 237. mit denen des §. 238., worin aber x in x' abzuändern ist, identificirt. Dadurch erhält man die nachstehenden sechs Gleichungen in der Form von Proportionen.

$$3.\quad\begin{cases} \dfrac{x'-b}{x'-a}=\dfrac{c-b}{d-a}\cdot\dfrac{x-d}{x-c}, & \dfrac{x'-b}{c-x'}=\dfrac{b-a}{d-c}\cdot\dfrac{x-d}{x-a},\\[2ex] \dfrac{c-x'}{x'-a}=\dfrac{(d-c)(c-b)}{(d-a)(b-a)}\cdot\dfrac{x-a}{x-c}, & \dfrac{c-x'}{d-x'}=\dfrac{c-b}{d-a}\cdot\dfrac{x-a}{x-b},\\[2ex] \dfrac{d-x'}{x'-a}=\dfrac{d-c}{b-a}\cdot\dfrac{x-b}{x-c}, & \dfrac{x'-b}{d-x'}=\dfrac{(b-a)(c-b)}{(d-a)(d-c)}\cdot\dfrac{x-d}{x-b}.\end{cases}$$

Schafft man in diesen Gleichungen die Nenner fort, so lassen sie sich sämmtlich entwickelt also darstellen:

$$4.\quad (d+b-a-c)xx'-(bd-ac)(x+x')+bd(a+c)-ac(d+b)=0,$$

oder auch in einer der folgenden Formen:

$$5.\quad \frac{bd-xx'}{xx'-ac}=\frac{d+b-x-x'}{x+x'-a-c},\quad \frac{xx'-ac}{bd-ac}=\frac{x+x'-a-c}{d+b-a-c},\quad \frac{bd-xx'}{bd-ac}=\frac{d+b-x-x'}{d+b-a-c}.$$

Jede von den Gleichungen (3.), (4.), (5.) drückt also die Bedinguug der Coordination der Werthe x und x' aus, d. h. ist eine dieser Gleichungen befriedigt (also auch jede der übrigen), so gehört zu den Werthen x und x' entweder dasselbe Argument u, oder es gehören zu solchen zwei Werthen x und x' zwei Argumente, die sich zu $2K$ ergänzen; denn es wurden diese Gleichungen im Grunde nicht so hergeleitet, daſs man die gleichnamigen Modular-Functionen, sondern ihre Quadrate identificirte, und diese Quadrate bleiben ungeändert, wenn man $2K\pm u$ statt u setzt. Was hier in Beziehung auf $2K$ gesagt worden ist, gilt auch, wenn $2iK'$ statt $2K$ genommen wird.

Anmerkung. Der hier aufgestellte und noch ein zweiter ihm ähnlicher Begriff der coordinirten Werthe x und x' ist von der gröſsten Wichtigkeit in den Anwendungen der Theorie der Modular-Functionen auf die Geometrie und Mechanik; den coordinirten Werthen x und x' entsprechen in der Geometrie nicht selten coordinirte Puncte in zwei von einander getrennten Zweigen einer und derselben Curve, d. h. zu jedem Puncte des einen Zweiges gehört allemal ein mit jenem in einem unveränderlichen Zusammenhange stehender (coordinirter) Punct des andern Zweiges der Curve, deren merkwürdigste Eigenschaften ihr gerade in Ansehung der coordinirten Puncte zukommen, wie weiter unten an einer ausführlich behandelten Curve gezeigt werden soll, welche auch in statischer Hinsicht sehr bemerkenswerth ist. Sieht man eine solche Curve mit zwei Zweigen als durch Einhüllung entstanden an, so gehört zu einer Tangente des einen Zweiges allemal auch eine coordinirte Tangente des anderen Zweiges.

§. 240.

Die beiden Integrationen von $y=\int\frac{\partial x}{\sqrt{-R}}$, wenn $R=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$ ist.

1. Es ist schon in der Einleitung zum §. 237. vorgekommen, daſs, wenn a, b, c, d die vier Wurzeln der Gleichung $R=0$ sind und x zwischen a und b enthalten ist, unter der Voraussetzung, daſs $a<b<c<d$ ist, das Product $-R$ positiv sei, und alle vier Factoren von

$$-R = (x-a)(b-x)(c-x)(d-x)$$

positiv sind. Setzt man nun

$$\frac{x-a}{b-x} = rv^2,$$

also $x = \frac{a+brv^2}{1+rv^2}$, $x-a = \frac{(b-a)rv^2}{1+rv^2}$, $b-x = \frac{b-a}{1+rv^2}$, $c-x = \frac{c-a+(c-b)rv^2}{1+rv^2}$,
$d-x = \frac{d-a+(d-b)rv^2}{1+rv^2}$, $\partial x = \frac{2(b-a)rv\partial v}{(1+rv^2)^2}$, so findet man

$$\partial y = \frac{2\sqrt{r}.\partial v}{\sqrt{(c-a+(c-b)rv^2)}\sqrt{(d-a+(d-b)rv^2)}}.$$

Da $\frac{c-b}{c-a} - \frac{d-b}{d-a} = -\frac{(d-c)(b-a)}{(c-a)(d-a)}$, also $\frac{d-b}{d-a} > \frac{c-b}{c-a}$ ist, so setzen wir

$$\frac{d-b}{d-a}.r = 1, \quad \frac{c-b}{c-a}r = k'^2, \quad v = \operatorname{tn} u \text{ für den Modul } k,$$

wodurch wir erhalten $\partial y = \frac{2\sqrt{r}.\partial u}{\sqrt{(c-a)}\sqrt{(d-a)}}$ und, da $\sqrt{r} = \sqrt{\frac{d-a}{d-b}}$ ist,

$$1.\quad y = \frac{2u}{\sqrt{((c-a)(d-b))}} = \int \frac{\partial x}{\sqrt{((x-a)(b-x)(c-x)(d-x))}},$$

$$2.\quad k' = \sqrt{\frac{(c-b)(d-a)}{(c-a)(d-b)}}, \qquad k = \sqrt{\frac{(b-a)(d-c)}{(c-a)(d-b)}},$$

$$3.\quad \operatorname{tn} u = \sqrt{\frac{(d-b)(x-a)}{(d-a)(b-x)}}; \quad \operatorname{tnc} u = \sqrt{\frac{(c-a)(b-x)}{(c-b)(x-a)}}.$$

Aus den letzten Formeln leiten wir noch her:

$$4.\quad \begin{cases} \operatorname{sn} u = \sqrt{\frac{(d-b)(x-a)}{(b-a)(d-x)}}, & \operatorname{snc} u = \sqrt{\frac{(c-a)(b-x)}{(b-a)(c-x)}}, \\ \operatorname{cn} u = \sqrt{\frac{(d-a)(b-x)}{(b-a)(d-x)}}, & \operatorname{cnc} u = \sqrt{\frac{(c-b)(x-a)}{(b-a)(c-x)}}, \\ \operatorname{dn} u = \sqrt{\frac{(d-a)(c-x)}{(c-a)(d-x)}}, & \operatorname{dnc} u = \sqrt{\frac{(c-b)(d-x)}{(d-b)(c-x)}}, \end{cases}$$

und die umgekehrten Formeln sind

$$5.\quad x = \frac{a(d-b)+d(b-a)\operatorname{sn}^2 u}{d-b+(b-a)\operatorname{sn}^2 u} = \frac{b(d-a)-d(b-a)\operatorname{cn}^2 u}{d-a-(b-a)\operatorname{cn}^2 u} = \frac{c(d-a)-d(c-a)\operatorname{dn}^2 u}{d-a-(c-a)\operatorname{dn}^2 u}.$$

Vergleicht man den in dieser Integration vorkommenden Modul k mit den Formeln für k und k' in §. 237. und §. 238., so sieht man, daſs nur k mit k' vertauscht worden ist.

§. 241.

II. Die coordinirte Integration von $y = \int \frac{\partial x}{\sqrt{-R}}$, im Vergleiche mit der in §. 240., ist der vorigen ähnlich; nur wird jetzt vorausgesetzt, daſs x zwischen den Grenzen c und d enthalten sei. Daher finden wir auch ähnliche Resultate, wie früher. Setzen wir nun

$$\frac{x-c}{d-x} = rv^2,$$

also $x=\frac{c+drv^2}{1+rv^2}$, $x-c=\frac{(d-c)rv^2}{1+rv^2}$, $d-x=\frac{d-c}{1+rv^2}$, $x-a=\frac{c-a+(d-a)rv^2}{1+rv^2}$

und $x-b=\frac{c-b+(d-b)rv^2}{1+rv^2}$, $\partial x=\frac{2(d-c).rv\partial v}{1+rv^2}$, so findet man

$$\partial y=\frac{2\sqrt{r}.\partial v}{\sqrt{(c-a+(d-a)rv^2)}\sqrt{(c-b+(d-b)rv^2)}}.$$

Da $\frac{d-b}{c-b}>\frac{d-a}{c-a}$ ist, so setzen wir $\frac{d-b}{c-b}.r=1$, $\frac{d-a}{c-a}r=k'^2$ und $v=\operatorname{tn}u$; dann ist wieder

$$1.\quad y=\frac{2u}{\sqrt{((c-a)(d-b))}}=\int_c\frac{\partial x}{\sqrt{((x-a)(x-b)(x-c)(d-x))}},$$

$$2.\quad k'=\sqrt{\frac{(c-b)(d-a)}{(c-a)(d-b)}},\qquad k=\sqrt{\frac{(b-a)(d-c)}{(c-a)(d-b)}},$$

$$3.\quad \operatorname{tn}u=\sqrt{\frac{(d-b)(x-c)}{(c-b)(d-x)}},\qquad \operatorname{tnc}u=\sqrt{\frac{(c-a)(d-x)}{(d-a)(x-c)}}.$$

Ueberhaupt hat man nur in den Formeln §. 240. a mit c und b mit d zu vertauschen, um die gesuchten übrigen Formeln zu erhalten. Sie sind

$$4.\quad \begin{cases}\operatorname{sn}u=\sqrt{\frac{(d-b)(x-c)}{(d-c)(x-b)}}, & \operatorname{snc}u=\sqrt{\frac{(c-a)(d-x)}{(d-c)(x-a)}},\\ \operatorname{cn}u=\sqrt{\frac{(c-b)(d-x)}{(d-c)(x-b)}}, & \operatorname{cnc}u=\sqrt{\frac{(d-a)(x-c)}{(d-c)(x-a)}},\\ \operatorname{dn}u=\sqrt{\frac{(c-b)(x-a)}{(c-a)(x-b)}}, & \operatorname{dnc}u=\sqrt{\frac{(d-a)(x-b)}{(d-b)(x-a)}},\end{cases}$$

und die umgekehrten

$$5.\quad x=\frac{c(d-b)-b(d-c)\operatorname{sn}^2u}{d-b-(d-c)\operatorname{sn}^2u}=\frac{d(c-b)+b(d-c)\operatorname{cn}^2u}{c-b+(d-c)\operatorname{cn}^2u}=\frac{a(c-b)-b(c-a)\operatorname{dn}^2u}{c-b-(c-a)\operatorname{dn}^2u}.$$

§. 242.

Von den coordinirten Werthen von x in den beiden Integrationen von $y=\int\frac{\partial x}{\sqrt{-R}}$.

Man mag $\int\frac{\partial x}{\sqrt{-R}}$ wie in §. 240. unter der Voraussetzung integriren, dafs x zwischen den Grenzen a und b enthalten sei, oder, wie in §. 241., unter der Voraussetzung, dafs x zwischen den Grenzen c und d enthalten sei: in beiden Fällen finden wir ein Argument u, welches zwischen den Grenzen 0 und K enthalten ist; auch stimmen die Moduln in beiden Fällen überein. Für $x=a$, so wie für $x=c$, ist $u=0$, und für $x=b$, so wie im zweiten Falle für $x=d$, ist $u=K$.

Man kann also dem Argumente u in beiden Integrationen wieder denselben Werth geben, und die dazu gehörigen Werthe von x, welche dann allein verschieden sind, nennen wir coordinirt. Den Werth von x, welchen die Formeln (5.) §. 240. geben, bezeichnen wir mit x; den Werth von x aber, welchen die Formeln (5.) §. 241. geben, bezeichnen wir mit x'. Dann ist für $u = 0$, $x = a$ und $x' = c$, so wie für $u = K$, $x = b$ und $x' = d$; es sind also wieder a und c coordinirt, so wie b und d. Da überhaupt

$$\mathrm{sn}^2 u = \frac{(d-b)(x-a)}{(b-a)(d-x)} = \frac{(d-b)(x'-c)}{(d-c)(x'-b)},$$

ist, so haben wir die Gleichung

$$1. \quad \frac{x'-c}{x'-b} = \frac{d-c}{b-a} \cdot \frac{x-a}{d-x}.$$

Eben so finden sich die Gleichungen

$$2. \quad \frac{d-x'}{x'-b} = \frac{(d-a)(d-c)}{(b-a)(c-b)} \cdot \frac{b-x}{d-x},$$

$$3. \quad \frac{x'-c}{d-x'} = \frac{c-b}{d-a} \cdot \frac{x-a}{b-x},$$

$$4. \quad \frac{x'-a}{x'-b} = \frac{d-a}{c-b} \cdot \frac{c-x}{d-x},$$

$$5. \quad \frac{d-x'}{x'-a} = \frac{d-c}{b-a} \cdot \frac{b-x}{c-x},$$

$$6. \quad \frac{x'-c}{x'-a} = \frac{(c-b)(d-c)}{(b-a)(d-a)} \cdot \frac{x-a}{c-x}.$$

Dividirt man noch (1.) durch (5.), so erhält man die noch bemerkenswerthere Gleichung

$$7. \quad \sqrt{\frac{(x'-c)(x'-a)}{(x'-b')(d-x')}} = \sqrt{\frac{(x-a)(c-x)}{(d-x)(b-x)}} = \sqrt{\left(\frac{c-a}{d-b}\right)} \cdot \frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{snc}\,u}.$$

Sieht man in dieser Gleichung $\frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{snc}\,u} \cdot \sqrt{\left(\frac{c-a}{d-b}\right)}$ als gegeben an, so kann man mittelst derselben gleichzeitig x und x' als die Wurzeln einer und derselben quadratischen Gleichung darstellen. Schafft man in den Gleichungen (1—6.) die Nenner fort, so erhält man die Gleichung

$$8. \quad (d+b-a-c)xx' - (bd-ac)(x+x') + bd(a+c) - ac(d+b) = 0,$$

welche mit der Gleichung (4.) §. 239. übereinstimmt und auch wieder in den Formen

$$9. \quad \frac{bd-xx'}{xx'-ac} = \frac{d+b-x-x'}{x+x'-a-c}, \quad \frac{xx'-ac}{bd-ac} = \frac{x+x'-a-c}{b+d-a-c}, \quad \frac{bd-xx'}{bd-ac} = \frac{b+d-x-x'}{b+d-a-c}$$

dargestellt werden kann.

§. 243.

Eine zweite Art der Coordination bei der Integration $\int\frac{\partial x}{\sqrt{\pm R}}$ und $\int\frac{\partial x}{\sqrt{\pm R'}}$.

Ist $\partial y=\int\frac{\partial x}{\sqrt{-R}}$ bereits integrirt, und darin $a<b<c<d$, ferner etwa x zwischen den Grenzen a und b enthalten, so kann man aus den Resultaten sogleich noch eben so viele neue herleiten, wenn man, beachtend, daſs nun $-d<-c<-b<-a$ ist, a mit $-d$ und b mit $-c$ vertauscht; die Grenzen von x sind dann also $-d$ und $-c$, und da $-d$ wieder kleiner als $-c$ ist, weil $-c-(-d)=d-c$ positiv ist, so ist das neue Integral einstimmig mit dem alten. Verwandelt sich durch die genannte Vertauschung R in R', so hat man, da $R=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$ ist,

$$R'=(x+d)(x+c)(x+b)(x+a).$$

Das Integral $y=\int\frac{\partial x}{\sqrt{-R}}$ verwandelt sich also in $y=\int\frac{\partial x}{\sqrt{-R'}}$, und eben so $y=\int\frac{\partial x}{\sqrt{R}}$ in $y=\int\frac{\partial x}{\sqrt{R'}}$.

Ganz wie beim Integrale $y=\int\frac{\partial x}{\sqrt{-R}}$ den Grenzen a und b von x die Grenzen $-d$ und $-c$ von x im Integrale $y=\int\frac{\partial x}{\sqrt{-R'}}$ entsprechen, so entsprechen auch den Grenzen c und d von x in jenem Integrale die Grenzen $-b$ und $-a$ von x in diesem.

Weiter entsprechen den Grenzen d und a von x im Integrale $y=\int\frac{\partial x}{\sqrt{R}}$ die Grenzen $-a$ und $-d$ von x im Integrale $y=\int\frac{\partial x}{\sqrt{R'}}$, und eben so entsprechen den Grenzen b und c von x im Integrale $y=\int\frac{\partial x}{\sqrt{R}}$ die Grenzen $-c$ und $-d$ im Integrale $y=\int\frac{\partial x}{\sqrt{R'}}$.

Aus den vorhin entwickelten vier Arten von Formeln, welche sich auf die Integration von $y=\int\frac{\partial x}{\sqrt{\pm R}}$ beziehen, lassen sich also nach der vorstehenden allgemeinen Regel sogleich durch eine einfache Uebertragung noch eben so viele neue Formeln herleiten, welche sich auf die Integration von $y=\int\frac{\partial x}{\sqrt{\pm R'}}$ beziehen, und zu jeder von den vier ersten Arten von Formeln gehört auch nur eine von den vier letzten Arten.

Es verdient noch angemerkt zu werden, daſs sich die beiden Integrale $y=\int\frac{\partial x}{\sqrt{R}}$ und $y'=\int\frac{\partial x}{\sqrt{R'}}$ mit einander vertauschen, und daſs die

zusammengehörigen Grenzen sich ebenfalls vertauschen, wenn man gleichzeitig $-x$ statt x und $-y$ statt y setzt. Dasselbe gilt von den beiden Integralen $y=\int\frac{\partial x}{\sqrt{-R}}$ und $y=\int\frac{\partial x}{\sqrt{-R'}}$. Hat die Gleichung $R=0$ zwei positive und zwei negative Wurzeln, so hat die Gleichung $R'=0$ zwei negative und zwei positive Wurzeln. Ist $R=A+2Bx+Cx^2+Dx^3+x^4$, so ist $R'=A-2Bx+Cx^2-Dx^3+x^4$.

§. 244.

Vertauschen wir nun wirklich in den Formeln §. 240., dem §. 243. gemäfs, a mit $-d$ und b mit $-c$, so erhalten wir Formeln, welche sich auf die Integration $y=\int\frac{\partial x}{\sqrt{-R'}}$ beziehen unter der Voraussetzung, dafs *x zwischen den Grenzen $-d$ und $-c$* enthalten ist. Wir finden

$$1.\quad y=\frac{2u}{\sqrt{((c-a)(d-b))}}=\int_{-d}\frac{\partial x}{\sqrt{(-(x+a)(x+b)(x+c)(x+d))}},$$

$$2.\quad k=\sqrt{\frac{(d-c)(b-a)}{(d-b)(c-a)}}\quad\text{und}\quad k'=\sqrt{\frac{(d-a)(c-b)}{(d-b)(c-a)}},$$

$$3.\quad \operatorname{tn}u=\sqrt{\frac{(c-a)(x+d)}{(d-a)(-c-x)}}\quad\text{und}\quad \operatorname{tnc}u=\sqrt{\frac{(d-b)(-c-x)}{(c-b)(x+d)}}.$$

Hier stimmen also die Formeln (1.) und (2.) wieder mit denen §. 240. überein; was sehr bemerkenswerth und die Ursache ist, dafs wir diese Integration ebenfalls der in §. 240. coordinirt nennen. Die übrigen Formeln sind:

$$4.\quad\begin{cases}\operatorname{sn}u=\sqrt{\frac{(c-a)(x+d)}{(d-c)(-a-x)}}; & \operatorname{snc}u=\sqrt{\frac{(d-b)(-c-x)}{(d-c)(-b-x)}},\\ \operatorname{cn}u=\sqrt{\frac{(d-a)(-c-x)}{(d-c)(-a-x)}}; & \operatorname{cnc}u=\sqrt{\frac{(c-b)(x+d)}{(d-c)(-b-x)}},\\ \operatorname{dn}u=\sqrt{\frac{(d-a)(-b-x)}{(d-b)(-a-x)}}; & \operatorname{dnc}u=\sqrt{\frac{(c-b)(-a-x)}{(c-a)(-b-x)}},\end{cases}$$

und die umgekehrten,

$$5.\quad x=\frac{-d(c-a)-a(d-c)\operatorname{sn}^2u}{c-a+(d-c)\operatorname{sn}^2u}=\frac{-c(d-a)+a(d-c)\operatorname{cn}^2u}{d-a-(d-c)\operatorname{cn}^2u}$$
$$=\frac{-b(d-a)+a(d-b)\operatorname{dn}^2u}{d-a-(d-b)\operatorname{dn}^2u}.$$

Bezeichnen wir den nach diesen Formeln berechneten Werth von x mit x', hingegen den nach den Formeln (5.) §. 240. berechneten Werth

von x wieder mit x, so erhalten wir, wenn wir die hier vorkommenden Modular-Functionen von u mit den gleichlautenden in §. 240., mit welchen sie ohnehin im Modul übereinstimmen, identificiren, die Gleichungen

$$6.\quad \begin{cases} \dfrac{x'+d}{-a-x'} = \dfrac{(d-c)(d-b)}{(c-a)(b-a)}\cdot\dfrac{x-a}{d-x}, & \dfrac{-b-x'}{-a-x'} = \dfrac{d-b}{c-a}\cdot\dfrac{c-x}{d-x}, \\ \dfrac{-c-x'}{-a-x'} = \dfrac{d-c}{b-a}\cdot\dfrac{b-x}{d-x}, & \dfrac{-c-x'}{-b-x'} = \dfrac{(d-c)(c-a)}{(b-a)(d-b)}\cdot\dfrac{b-x}{c-x}, \\ \dfrac{x'+d}{-c-x'} = \dfrac{d-b}{c-a}\cdot\dfrac{x-a}{b-x}, & \dfrac{x'+d}{-b-x'} = \dfrac{d-c}{b-a}\cdot\dfrac{x-a}{c-x}, \end{cases}$$

welchen gemäfs man für jeden Werth von x den zugeordneten Werth von x' und umgekehrt jenen aus diesem berechnen kann. Wird die sechste Gleichung durch die zweite dividirt, so erhält man

$$7.\quad \sqrt{\frac{(x'+d)(-a-x')}{(-b-x')(-c-x')}} = \sqrt{\frac{(x-a)(d-x)}{(b-x)(c-x)}} = \frac{d-a}{\sqrt{((d-b)(c-a))}}\cdot\frac{\operatorname{tn}u}{\operatorname{dn}u}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{d-a}{c-b}\right)}\cdot\frac{\operatorname{cnc}u}{\operatorname{cn}u},$$

und hiernach lassen sich, wenn man $\dfrac{d-a}{\sqrt{((d-b)(c-a))}}\cdot\dfrac{\operatorname{tn}u}{\operatorname{dn}u}$ als gegeben betrachtet, x und $-x'$ oder $-x$ und x' als die Wurzeln einer und derselben quadratischen Gleichung darstellen. Zu demselben Resultate führt die Verbindung der dritten und vierten Gleichung. Schaffen wir in einer der Gleichungen (6.), welche auch durch Umformung aus einander hergeleitet werden können, die Nenner weg, so erhält man nach einer leichten Reduction die Gleichung

$$8.\quad (d+a-b-c).xx'+(ad-bc)(x-x')-ad(b+c)+bc(a+d)=0,$$

welche sich auch auf folgende Arten darstellen läfst:

$$9.\quad \frac{xx'+bc}{xx'+ad} = \frac{b+c-(x-x')}{d+a-(x-x')},\quad \frac{xx'+bc}{ad-bc} = \frac{b+c-(x-x')}{d+a-b-c} \text{ und}$$
$$\frac{xx'+ad}{ad-bc} = \frac{d+a-(x-x')}{d+a-b-c}.$$

Setzen wir für den Augenblick $\sqrt{\left(\dfrac{d-a}{c-b}\right)}\cdot\dfrac{\operatorname{cnc}u}{\operatorname{cn}u} = v$, so giebt die Gleichung (7.) die beiden quadratischen Gleichungen

$$(1+v^2)\,x^2-((b+c)v^2+a+d)\,x+bcv^2+ad = 0,$$
$$(1+v^2)x'^2+((b+c)v^2+a+d)x'+bcv^2+ad = 0,$$

wovon die erste mit der zweiten übereinstimmt, wenn man in jener $-x'$ statt x, oder in dieser $-x$ statt x' setzt; daher sind x und $-x'$ die Wur-

zeln der ersten, x' und $-x$ aber die Wurzeln der zweiten Gleichung. Aus diesen Gleichungen ziehen wir also

$$x.x' = -\frac{bcv^2+ad}{1+v^2}, \quad x-x' = \frac{(b+c)v^2+a+d}{1+v^2},$$

woraus nach einander folgt:

$$xx'+bc = \frac{-ad+bc}{1+v^2}, \quad xx'+ad = \frac{(-bc+ad)v^2}{1+v^2}, \text{ also}$$

$$-\frac{xx'+ad}{xx'+bc} = -\frac{d+a-(x-x')}{b+c-(x-x')} = v^2.$$

Aehnliche Resultate lassen sich auch aus den Formeln §. 241. und auch aus denen §. 237. und 238. herleiten; womit wir uns jedoch hier nicht länger aufhalten, da diese Herleitung keine Schwierigkeit hat.

§. 245.

Zweite ziemlich einfache Integration von $\frac{\partial x}{\sqrt{R}}$ und $\frac{\partial x}{\sqrt{-R}}$, $\frac{\partial x}{\sqrt{R'}}$ und $\frac{\partial x}{\sqrt{-R'}}$, welche zu einem reellen Modul führt, der <1 ist.

Bezeichnen wir in den früheren Integrationen das Argument mit v und den Modul mit λ, den conjugirten Modul also mit λ'; setzen also v statt u, λ statt k und λ' statt k', und erinnern uns der Formel $\sqrt{\lambda}.\,\mathrm{sn}\,v = \sqrt{\frac{1-\mathrm{dn}\,u}{1+\mathrm{dn}\,u}}$ in §. 51., so ist der neue Modul $k = \frac{2\sqrt{\lambda}}{1+\lambda}$, also $k' = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}$ und $v = \frac{u}{1+\lambda}$.

1. Benutzen wir diese Bezeichnung, so ist in §. 237. das Integral $\int\frac{\partial x}{\sqrt{R}} = \frac{2v}{\sqrt{((c-a)(d-b))}}$, $\lambda' = \sqrt{\frac{(b-a)(d-c)}{(c-a)(d-b)}}$ und $\lambda = \sqrt{\frac{(c-b)(d-a)}{(c-a)(d-b)}}$; daher ist der neue Modul

$$1.\quad \begin{cases} k = \dfrac{2\sqrt[4]{((c-a)(d-b)(c-b)(d-a))}}{\sqrt{((c-a)(d-b))}+\sqrt{((c-b)(d-a))}} \text{ und} \\ k' = \dfrac{\sqrt{((c-a)(d-b))}-\sqrt{((c-b)(d-a))}}{\sqrt{((c-a)(d-b))}+\sqrt{((c-b)(d-a))}}, \end{cases}$$

$$2.\ \int\frac{\partial x}{\sqrt{R}} = \frac{2u}{\sqrt{((c-a)(d-b))}+\sqrt{((c-b)(d-a))}} = \int_d \frac{\partial x}{\sqrt{((x-a)(x-b)(x-c)(x-d))}}.$$

Ferner ist

$$\sqrt{\frac{1-\mathrm{dn}\,u}{1+\mathrm{dn}\,u}} = \sqrt[4]{\frac{(c-b)(d-a)}{(c-a)(d-b)}}.\sqrt{\frac{(c-a)(x-d)}{(d-a)(x-c)}}, \text{ oder auch}$$

$$3.\quad \sqrt{\frac{1-\mathrm{dn}\,u}{1+\mathrm{dn}\,u}} = \sqrt[4]{\frac{(c-b)(c-a)}{(d-b)(d-a)}}.\sqrt{\frac{x-d}{x-c}},$$

und die umgekehrte Formel ist

$$4.\quad x=\frac{d\sqrt{((c-b)(c-a))}.(1+\mathrm{dn}\,u)-c\sqrt{((d-b)(d-a))}.(1-\mathrm{dn}\,u)}{\sqrt{((c-b)(c-a))}.(1+\mathrm{dn}\,u)-\sqrt{((d-b)(d-a))}.(1-\mathrm{dn}\,u)}.$$

Für $u=0$ ist nun $x=d$ und für $u=K$ ist $x=c$, wenn man beachtet, dafs dann $\mathrm{dn}\,u=k'$ und

$$\frac{1-k'}{1+k'}=\frac{\sqrt{((c-b)(d-a))}}{\sqrt{((c-a)(d-b))}}\ \text{ist.}$$

II. Soll dasselbe Integral $\int\frac{\partial x}{\sqrt{R}}$ unter der Voraussetzung, dafs x zwischen den Grenzen b und c enthalten sei, gefunden werden, so bleiben die Formeln (1.) und (2.) ungeändert, nur dafs jetzt y und u für $x=b$ verschwinden. Ferner ist nun

$$5.\quad \sqrt{\frac{1-\mathrm{dn}\,u}{1+\mathrm{dn}\,u}}=\sqrt[4]{\frac{(d-a)(c-a)}{(d-b)(c-b)}}.\sqrt[2]{\frac{x-b}{x-a}},$$

$$6.\quad x=\frac{b\sqrt{((d-a)(c-a))}.(1+\mathrm{dn}\,u)-a\sqrt{((d-b)(c-b))}.(1-\mathrm{dn}\,u)}{\sqrt{((d-a)(c-a))}.(1+\mathrm{dn}\,u)-\sqrt{((d-b)(c-b))}.(1-\mathrm{dn}\,u)}.$$

III. Soll das Integral $\int\frac{\partial x}{\sqrt{-R}}$ gefunden werden unter der Voraussetzung, dafs x zwischen den Grenzen a und b enthalten ist, so müssen wir, dem §. 240. gemäfs, $\lambda=\sqrt{\frac{(b-a)(d-c)}{(c-a)(d-b)}}$ setzen, wodurch wir erhalten:

$$7.\quad \begin{cases} k=\dfrac{2\sqrt[4]{((b-a)(d-c)(c-a)(d-b))}}{\sqrt{((c-a)(d-b))}+\sqrt{((b-a)(d-c))}}, \\ k'=\dfrac{\sqrt{((c-a)(d-b))}-\sqrt{((b-a)(d-c))}}{\sqrt{((c-a)(d-b))}+\sqrt{((b-a)(d-c))}}, \end{cases}$$

$$8.\quad y=\frac{2u}{\sqrt{((c-a)(d-b))}+\sqrt{((b-a)(d-c))}}=\int\frac{\partial x}{\sqrt{-R}},$$

$$9.\quad \sqrt{\frac{1-\mathrm{dn}\,u}{1+\mathrm{dn}\,u}}=\sqrt[4]{\frac{(d-c)(d-b)}{(c-a)(b-a)}}.\sqrt[2]{\frac{x-a}{d-x}},$$

$$10.\quad x=\frac{a\sqrt{((d-c)(d-b))}.(1+\mathrm{dn}\,u)+d\sqrt{((c-a)(b-a))}.(1-\mathrm{dn}\,u)}{\sqrt{((d-c)(d-b))}.(1+\mathrm{dn}\,u)+\sqrt{((c-a)(b-a))}.(1-\mathrm{dn}\,u)}.$$

Es ist nun $x=a$ für $u=0$ und $x=b$ für $u=K$.

IV. Soll das Integral $\int\frac{\partial x}{\sqrt{-R}}$ gefunden werden, und liegt x zwischen den Grenzen c und d, so gelten wieder die Formeln (7.) und (8.). Aufserdem ist

$$11.\quad \sqrt{\frac{1-\mathrm{dn}\,u}{1+\mathrm{dn}\,u}}=\sqrt[4]{\frac{(b-a)(d-b)}{(c-a)(d-c)}}.\sqrt{\frac{x-c}{x-b}},$$

$$12.\quad x=\frac{c\sqrt{((b-a)(d-b))}.(1+\mathrm{dn}\,u)-b\sqrt{((c-a)(d-c))}.(1-\mathrm{dn}\,u)}{\sqrt{((b-a)(d-b))}.(1+\mathrm{dn}\,u)-\sqrt{((c-a)(d-c))}.(1-\mathrm{dn}\,u)}.$$

Aus den vorstehenden Formeln erhält man, dem §. 243. gemäfs, sogleich noch eben so viele Formeln, indem man a mit $-d$ und b mit $-c$ vertauscht.

§. 246.

Die Integrationen von $\frac{\partial x}{\sqrt{R}}$ und $\frac{\partial x}{\sqrt{-R}}$, wenn $R=(x-a)(x-b)(x-c)$ und also nur eine cubische Form ist.

Ist R nur eine arithmetische Form des dritten Grades und $=(x-a)(x-b)(x-c)$, so erhält man die sich auf die Integration von $\frac{\partial x}{\sqrt{R}}$ und $\frac{\partial x}{\sqrt{-R}}$ beziehenden Formeln, wenn man nur in den früheren Formeln d positiv und $=\frac{1}{0}$ setzt. Dadurch erhält man sofort aus den Formeln §. 237., indem man wieder $a<b<c$ annimmt,

$$
1.\quad\begin{cases}
y=\int_{\frac{1}{0}}\frac{\partial x}{\sqrt{-R}}=\frac{2u}{\sqrt{(c-a)}},\\
k=\sqrt{\frac{c-b}{c-a}},\quad k'=\sqrt{\frac{b-a}{c-a}},\\
\operatorname{tn}u=\sqrt{\frac{(c-a)}{a-x}},\quad \operatorname{sn}u=\sqrt{\frac{c-a}{c-x}},\quad \operatorname{cn}u=\sqrt{\frac{x-a}{x-c}},\quad \operatorname{dn}u=\sqrt{\frac{x-b}{x-c}},\\
x=\frac{a-c.\operatorname{cn}^2u}{\operatorname{sn}^2u}.
\end{cases}
$$

Hiernach ist für $u=0$ die Gröfse $x=\frac{1}{0}$ und für $u=K$ ist $x=a$, und also x zwischen den Grenzen $\pm\frac{1}{0}$ und a enthalten.

II. Die Formeln §. 238. geben

$$
y=\int\frac{\partial x}{\sqrt{-R}}=\frac{2u}{\sqrt{(c-a)}},\quad k=\sqrt{\frac{c-b}{c-a}},\quad k'=\sqrt{\frac{b-a}{c-a}},
$$

$$
\operatorname{tn}u=\sqrt{\frac{(c-a)(x-b)}{(b-a)(c-x)}},\quad \operatorname{sn}u=\sqrt{\frac{(c-a)(x-b)}{(c-b)(x-a)}},\quad \operatorname{cn}u=\sqrt{\frac{(b-a)(c-x)}{(c-b)(x-a)}},
$$

$$
\operatorname{dn}u=\sqrt{\frac{b-a}{x-a}},
$$

$$
\operatorname{tnc}u=\sqrt{\frac{c-x}{x-b}},\quad \operatorname{snc}u=\sqrt{\frac{c-x}{c-b}},\quad \operatorname{cnc}u=\sqrt{\frac{x-b}{c-b}},\quad \operatorname{dnc}u=\sqrt{\frac{x-a}{c-a}},
$$

$$
x=\frac{b(c-a)-a(c-b)\operatorname{sn}^2u}{c-a-(c-b)\operatorname{sn}^2u}=\frac{b-a+a\operatorname{dn}^2u}{\operatorname{dn}^2u},
$$

und es ist also $x=b$ für $u=0$; ferner $x=c$ für $u=K$; also x zwischen den Grenzen b und c enthalten.

III. Die Formeln §. 240. geben nun

$$y = \int_a \frac{\partial x}{\sqrt{R}} = \frac{2u}{\sqrt{(c-a)}}, \qquad k = \sqrt{\frac{b-a}{c-a}}, \qquad k' = \sqrt{\frac{c-b}{c-a}},$$

$$\operatorname{tn} u = \sqrt{\frac{x-a}{b-x}}, \quad \operatorname{sn} u = \sqrt{\frac{x-a}{b-a}}, \quad \operatorname{cn} u = \sqrt{\frac{b-x}{b-a}}, \quad \operatorname{dn} u = \sqrt{\frac{c-x}{c-a}}, \text{ und}$$

$$x = a + (b-a)\operatorname{sn}^2 u = b - (b-a)\operatorname{cn}^2 u = c - (c-a)\operatorname{dn}^2 u.$$

Für $u = 0$ ist $x = a$ und für $u = K$ ist $x = b$, also x zwischen den Grenzen a und b enthalten.

IV. Die Formeln §. 241. geben

$$y = \int \frac{\partial x}{\sqrt{R}} = \frac{2u}{\sqrt{(c-a)}}, \qquad k = \sqrt{\frac{b-a}{c-a}}, \qquad k' = \sqrt{\frac{c-b}{c-a}},$$

$$\operatorname{tn} u = \sqrt{\frac{x-c}{c-b}}, \quad \operatorname{sn} u = \sqrt{\frac{x-c}{x-b}}, \quad \operatorname{cn} u = \sqrt{\frac{c-b}{x-b}}, \quad \operatorname{dn} u = \sqrt{\frac{(c-b)(x-a)}{(c-a)(x-b)}},$$

$$\operatorname{tnc} u = \sqrt{\frac{c-a}{x-c}}, \quad \operatorname{snc} u = \sqrt{\frac{c-a}{x-a}}, \quad \operatorname{cnc} u = \sqrt{\frac{x-c}{x-a}}, \quad \operatorname{dnc} u = \sqrt{\frac{x-b}{x-a}},$$

$$x = \sqrt{\frac{c - b\operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{cn}^2 u}}.$$

Diesen Formeln gemäfs ist $x = c$ für $u = 0$ und $x = \frac{1}{0}$ für $u = K$, also x im Allgemeinen zwischen den Grenzen c und $\frac{1}{0}$ enthalten.

§. 247.

Zweite Art der Integration von $\frac{\partial x}{\sqrt{R}}$ und $\frac{\partial x}{\sqrt{-R}}$, wenn $R = (x-a)(x-b)(x-c)$ ist.

Es sei wieder $a < b < c$. Setzen wir in den Formeln §. 245. ebenfalls $d = \frac{1}{0}$, so erhalten auf der Stelle die gesuchten Formeln.

I. Ist x zwischen $\pm\frac{1}{0}$ und a enthalten, so ist

$$k = \frac{2\sqrt[4]{((c-a)(c-b))}}{\sqrt{(c-a)}+\sqrt{(c-b)}} \quad \text{und} \quad k = \frac{\sqrt{(c-a)}-\sqrt{(c-b)}}{\sqrt{(c-a)}+\sqrt{(c-b)}},$$

$$\int_{\frac{1}{0}} \frac{\partial x}{\sqrt{-R}} = \frac{2u}{\sqrt{(c-a)}+\sqrt{(c-b)}}, \qquad \sqrt{\frac{1-\operatorname{dn} u}{1+\operatorname{dn} u}} = \sqrt[4]{\frac{(c-b)(c-a)}{(c-x)^2}},$$

$$x = \frac{\sqrt{((c-b)(c-a))}.(1+\operatorname{dn} u) - c(1-\operatorname{dn} u)}{\sqrt{((c-b)(c-a))}.(1+\operatorname{dn} u) - (1-\operatorname{dn} u)}.$$

II. Ist x zwischen b und c enthalten, so ist

$$k = \frac{2\sqrt[4]{((c-a)(c-b))}}{\sqrt{(c-a)}+\sqrt{(c-b)}}, \qquad k' = \frac{\sqrt{(c-a)}-\sqrt{(c-b)}}{\sqrt{(c-a)}+\sqrt{(c-b)}},$$

$$\int_b \frac{\partial x}{\sqrt{-R}} = \frac{2u}{\sqrt{(c-a)}+\sqrt{(c-b)}}, \quad \sqrt{\frac{1-\operatorname{dn} u}{1+\operatorname{dn} u}} = \sqrt[4]{\left(\frac{c-a}{c-b}\right)} \cdot \sqrt{\frac{x-b}{x-a}},$$

$$x = \frac{b\sqrt{(c-a)}.(1+\operatorname{dn} u) - a\sqrt{(c-b)}.(1-\operatorname{dn} u)}{\sqrt{(c-a)}.(1+\operatorname{dn} u) - \sqrt{(c-b)}.(1-\operatorname{dn} u)}.$$

III. Ist x zwischen den Grenzen a und b enthalten, so hat man

$$k = \frac{2\sqrt{(b-a)(c-a)}}{\sqrt{(c-a)}+\sqrt{(b-a)}}, \quad k' = \frac{\sqrt{(c-a)}-\sqrt{(b-a)}}{\sqrt{(c-a)}+\sqrt{(b-a)}},$$

$$\int_a \frac{\partial x}{\sqrt{R}} = \frac{2u}{\sqrt{(c-a)}+\sqrt{(b-a)}}, \quad \sqrt{\frac{1-\operatorname{dn} u}{1+\operatorname{dn} u}} = \sqrt[4]{\frac{(x-a)^2}{(c-a)(b-a)}},$$

$$x = \frac{a(1+\operatorname{dn} u)+\sqrt{((c-a)(b-a))}.(1-\operatorname{dn} u)}{1+\operatorname{dn} u}.$$

IV. Ist endlich x zwischen den Grenzen c und $\frac{1}{0}$ enthalten, so hat man

$$k = \frac{2\sqrt{((b-a)(c-a))}}{\sqrt{(c-a)}+\sqrt{(b-a)}}, \quad k' = \frac{\sqrt{(c-a)}-\sqrt{(b-a)}}{\sqrt{(c-a)}+\sqrt{(b-a)}},$$

$$\int_c \frac{\partial x}{\sqrt{R}} = \frac{2u}{\sqrt{(c-a)}+\sqrt{(b-a)}}, \quad \sqrt{\frac{1-\operatorname{dn} u}{1+\operatorname{dn} u}} = \sqrt[4]{\left(\frac{b-a}{c-a}\right)} \cdot \sqrt{\frac{x-c}{x-b}},$$

$$x = \frac{c\sqrt{(b-a)}.(1+\operatorname{dn} u) - b\sqrt{(c-a)}.(1-\operatorname{dn} u)}{\sqrt{(b-a)}.(1+\operatorname{dn} u) - \sqrt{(c-a)}.(1-\operatorname{dn} u)}.$$

§. 248.

Die Integration $y = \int \frac{X.\partial x}{\sqrt{R}}$, wenn X eine rationale (ganze oder gebrochene) Function von x, und R eine arithmetische Form des dritten und vierten Grades in Ansehung von x ist.

Es ist im Vorhergehenden umständlich davon gehandelt worden, wie das Differenzial $\frac{\partial x}{\sqrt{R}}$, wenn $R = 0$ eine Gleichung vom dritten oder vierten Grade in Beziehung auf x ist, jedesmal auf $M.\partial u$ reducirt werden kann, wo M eine Constante bezeichnet; und bei dieser Umformung ist, wenn t eine Modular-Function des Arguments u vorstellt, der Ausdruck von x entweder von der Form

$$x = \frac{A+Bt}{C+Dt} \text{ oder } x = \frac{A+Bt^2}{C+Dt^2}.$$

Substituirt man denselben Werth von x, durch welchen $\frac{\partial x}{\sqrt{R}} = M.\partial u$ wird, auch in dem Factor X, so erhält der Ausdruck $\frac{X.\partial x}{\sqrt{R}}$ die Form $U.\partial u$, und es ist also

$$y = \int U.\partial u,$$

wenn durch U eine rationale ganze Function von t bezeichnet wird. Ist U eine rationale ganze Function von t, so besteht U aus Gliedern von der Form at^{2n+1} und bt^{2n}, und da t eine Modular-Function des Arguments u ist, so können die Integrale $\int at^{2n+1}.\partial u$ und $\int bt^{2n}.\partial u$ nach den Reductionsformeln des §. 71. gefunden werden.

Ist aber U eine gebrochene Function von t, so kann sie zerfällt werden in Glieder von der Form at^{2n+1}, bt^{2n}, $\frac{a}{(\alpha+\beta t)^r}$ und $\frac{b}{(\alpha+\beta t^2)^r}$, welche mit ∂u multiplicirt und dann integrirt werden müssen.

Man kann aber auch vor der Zerfällung von U, $t = \frac{1}{t'}$ setzen; und wird die Zerfällung nun vorgenommen, so erhält man Glieder von der Form

$$\frac{a}{t'^{2n-1}}, \quad \frac{b}{t'^{2n-1}}, \quad \frac{a}{(\alpha+\beta t')^r} \text{ und } \frac{b}{(\alpha+\beta t'^2)^r},$$

welche einerlei sind mit

$$at^{2n-1}, \quad bt^{2n-1}, \quad \frac{at^r}{(\beta+\alpha t)^r} \text{ und } \frac{bt^{2r}}{(\beta+\alpha t^2)^{2r}}.$$

Es ist daher nur noch von der Integration der Brüche

$$\frac{\partial u}{(\alpha+\beta t)^r}, \quad \frac{t^r.\partial u}{(\alpha+\beta t)^r}, \quad \frac{\partial u}{(\alpha+\beta t^2)^r} \text{ und } \frac{t^{2r}.\partial u}{(\alpha+\beta t^2)^r}$$

zu handeln.

§. 249.

Die Integration von $\frac{\partial u}{(\alpha+\beta t)^r}$ und $\frac{t^r.\partial u}{(\alpha+\beta t)^r}$, wenn t eine Modular-Function von u ist.

Da t eine Modular-Function von u ist, so wird der Zusammenhang zwischen t und u durch eine Differenzial-Gleichung von der Form

$$\partial u = \frac{\pm\partial t}{\sqrt{(a+2bt^2+ct^4)}}$$

ausgedrückt, und es ist also, wenn $\partial y = \frac{\partial u}{(\alpha+\beta t)^r}$ ist,

$$\partial y = \frac{\pm\partial t}{(\alpha+\beta t)^r.\sqrt{(a+2bt^2+ct^4)}} \text{ oder } \pm y = \int \frac{\partial t}{(\alpha+\beta t)^r.\sqrt{(a+2bt^2+ct^4)}}.$$

Setzen wir nun $\alpha+\beta t = v$, also $t = \frac{v-\alpha}{\beta}$, $\partial t = \frac{\partial v}{\beta}$, $a+2bt^2+ct^4 = \frac{a\beta^4+2b\beta^2(v-\alpha)^2+c(v-\alpha)^4}{\beta^4} = \frac{A+4Bv+2Cv^2+4Dv^3+Ev^4}{\beta^4}$, wenn man zur Abkürzung setzt:

$$A = a\beta^4+2b\alpha^2\beta^2+c\alpha^4, \quad B = -(b\beta^2\alpha+c\alpha^3), \quad C = b\beta^2+3c\alpha^2,$$
$$D = -c\alpha, \quad E = c,$$

und also $\pm\gamma = \int \frac{\beta \partial v}{v^r \sqrt{(A+4Bv+2Cv^2+4Dv^3+Ev^4)}}$. Differenziirt man nun, zur Abkürzung setzend: $A+4Bv+2Cv^2+4Dv^3+Ev^4 = R$, also $\partial R = 4(B+Cv+3Dv^2+Ev^3).\partial v$, den Ausdruck $\frac{\sqrt{R}}{v^{r-1}}$, so erhält man $\partial\left(\frac{\sqrt{R}}{v^{r-1}}\right) = \frac{v.\frac{1}{2}\partial R-(r-1)R.\partial v}{v^r.\sqrt{R}}$, oder

$$\partial\left(\frac{\sqrt{R}}{v^{r-1}}\right) = -\frac{(r-1)A.\partial v}{v^r.\sqrt{R}} - \frac{2(2r-3)B.\partial v}{v^{r-1}.\sqrt{R}} - \frac{2(r-2)C.\partial v}{v^{r-2}.\sqrt{R}} - \frac{2(2r-5)D.\partial v}{v^{r-3}.\sqrt{R}} - \frac{E(r-3).\partial v}{v^{r-4}.\sqrt{R}}.$$

Da aber $\sqrt{R} = \beta^2.\sqrt{(a+2bt^2+ct^4)}$, also $\beta\frac{\partial v}{\sqrt{R}} = \frac{\partial t}{\sqrt{(a+2bt^2+ct^4)}} = \pm\partial u$ ist, so erhält man, wenn man

$$\int \frac{\partial u}{(\alpha+\beta t)^r} = [r]$$

setzt, die Reductions-Formel

$$\text{I.}\quad \frac{\pm\beta^3\sqrt{(a+2bt^2+t^4)}}{(\alpha+\beta t)^{r-1}} =$$

$$-(a\beta^4+2b\alpha^2\beta^2+c\alpha^4)(r-1).[r]+2(b\beta^2\alpha+c\alpha^3)(2r-3).[r-1]$$
$$-2(b\beta^2+3c\alpha^2)(r-2).[r-2]+2c\alpha(2r-5).[r-3]-c(r-3).[r-4].$$

Ist z. B. $t = \text{sn}\,u$, also $\partial u = \frac{\partial t}{\sqrt{(1-(1+k^2)t^2+k^2t^4)}}$, so hat man $a=1$, $2b = -(1+k^2)$, $c = k^2$, folglich

$$\frac{\beta^3\,\text{cn}\,u\,\text{dn}\,u}{(\alpha+\beta\,\text{sn}\,u)^{r-1}} =$$

$$-(\alpha^2-\beta^2)(k^2\alpha^2-\beta^2)(r-1)[r]+(2k^2\alpha^3-(1+k^2)\beta^2\alpha)(2r-3)[r-1]$$
$$+((1+k^2)\beta^2-6\alpha^2k^2)(r-2)[r-2]+2k^2\alpha(2r-5)[r-3]-k^2(r-3)[r-4].$$

Setzt man aufserdem $\alpha = 1$ und $\beta = k\,\text{sn}\,a$, so hat man

$$\frac{k\,\text{sn}\,a\,\text{cn}\,u\,\text{dn}\,u}{(1+k\,\text{sn}\,a\,\text{sn}\,u)^{r-2}} = -\frac{\text{dn}^2 a}{\text{tn}^2 a}(r-1).[r]+\frac{\text{cn}^2 a+\text{dn}^2 a}{\text{sn}^2 a}(2r-3).[r-1]$$
$$+\frac{-6+(1+k^2)\text{sn}^2 a}{\text{sn}^2 a}(r-2).[r-2]+\frac{2(2r-5)}{\text{sn}^2 a}.[r-3]-\frac{(r-3)}{\text{sn}^2 a}.r-4],$$

und in dieser Formel ist $[r] = \int \frac{\partial u}{(1+k\,\text{sn}\,a\,\text{sn}\,u)^r}$.

Ist $r=1$, so kann das Integral nach §. 210 — 213. gefunden werden. Wir können aus der vorigen allgemeinen Formel sogleich noch eine zweite herleiten, indem wir α mit β, a mit c und $\frac{1}{t}$ mit t vertauschen. Da-

durch verwandelt sich $\partial u = \pm \frac{\partial t}{\sqrt{(a+2bt^2+ct^4)}}$ in $\frac{-\partial t}{\pm t^2 \sqrt{\left(c+\frac{2b}{t^2}+\frac{a}{t^4}\right)}}$ $= \frac{-\partial u}{\pm\sqrt{(a+2bt^2+ct^4)}}$, d. h. es verwandelt sich ∂u in $-\partial u$. Setzen wir nun das Integral

$$\int \frac{t^r . \partial u}{(\alpha+\beta t)^r} = [r],$$

so haben wir noch die Formel

$$\text{II.} \quad \pm \frac{\alpha^3 . t^{r-3} . \sqrt{(a+2bt^2+ct^4)}}{(\alpha+\beta t)^{r-1}}$$

$$= (a\beta^4 + 2b\beta^2\alpha^2 + c\alpha^4)(r-1).[r] - 2(b\alpha^2\beta + a\beta^3)(2r-3).[r-1]$$
$$+ 2(b\alpha^2 + 3a\beta^2)(r-2).[r-2] - 2a\beta(2r-5).[r-3] - a(r-3).[r-4],$$

in welcher wieder $\partial u = \pm \frac{\partial t}{\sqrt{(a+2bt^2+ct^4)}}$ ist.

§. 250.

Die Integrationen von $\frac{\partial u}{(\alpha+\beta t^2)^r}$ und $\frac{t^{2r} . \partial u}{(\alpha+\beta t^2)^r}$, wenn t eine Modular-Function des Arguments u ist.

Ist $y = \int \frac{\partial u}{(\alpha+\beta t^2)^r}$ und wieder $\partial u = \frac{\pm \partial t}{\sqrt{(a+2bt^2+ct^4)}}$, also $\pm y$ $= \int \frac{\partial t}{(\alpha+\beta t^2)^r \sqrt{(a+2bt^2+ct^4)}}$, so setze man $\alpha+\beta t^2 = v$; alsdann ist $t =$ $\sqrt{\frac{v-\alpha}{\beta}}$, $\partial t = \frac{\partial v}{2\sqrt{\beta}.\sqrt{(v-\alpha)}}$; ferner $a+2bt^2+ct^4 = \frac{a\beta^2+2b\beta(v-\alpha)+c(v-\alpha)^2}{\beta^2}$; folglich

$$\pm\partial y = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\beta} . \partial v}{v^r \sqrt{(a\beta^2(v-\alpha)+2b\beta(v-\alpha)^2+c(v-\alpha)^3)}} \quad \text{oder}$$

$$\pm\partial y = \frac{\frac{1}{2} . \partial v}{v^r \sqrt{(A+Bv+Cv^2+Dv^3)}},$$

wenn man zur Abkürzung

$$A = -a\beta\alpha + 2b\alpha^2 - \frac{c}{\beta}\alpha^3, \quad B = a\beta - 4b\alpha + \frac{3c\alpha^2}{\beta},$$
$$C = 2b - \frac{3c\alpha}{\beta}, \qquad D = \frac{c}{\beta}$$

setzt. Ferner ist, wenn man $A+Bv+Cv^2+Dv^3 = R$ setzt, die Gröſse $R = a\beta(v-\alpha) + 2b(v-\alpha)^2 + \frac{c}{\beta}(v-\alpha)^3 = a\beta^2 t^2 + 2b\beta^2 t^4 + c\beta^2 t^6 =$ $\beta^2 t^2 (a+2bt^2+ct^4)$, also $\sqrt{R} = \beta t \sqrt{(a+2bt^2+ct^4)}$.

Differenziirt man nun $\frac{\sqrt{R}}{v^{r-1}}$, so erhält man $\partial\left(\frac{\sqrt{R}}{v^{r-1}}\right) = \frac{v\partial R-(2r-2)R.\partial v}{2v^r\sqrt{R}}$

oder $\partial\left(\frac{\sqrt{R}}{v^{r-1}}\right) = \frac{-(2r-2)A.\frac{1}{2}\partial v}{v^r.\sqrt{R}} - \frac{(2r-3)B.\frac{1}{2}\partial v}{v^{r-1}.\sqrt{R}} - \frac{2(r-4)C.\frac{1}{2}\partial v}{v^{r-2}.\sqrt{R}} - \frac{(2r-5)D.\frac{1}{2}\partial v}{v^{r-3}.\sqrt{R}}$,

und da $\frac{\frac{1}{2}\partial v}{\sqrt{R}} = \frac{\beta t.\partial t}{\beta t\sqrt{(a+2bt^2+ct^4)}} = \frac{\partial t}{\sqrt{(a+2bt^2+ct^4)}} = \pm\partial u$ ist, so hat man, wenn man gliedweise integrirt und zur Abkürzung

$$\int\frac{\partial u}{(\alpha+\beta t^2)^r} = [r]$$

setzt, die allgemeine Reductionsformel

$$\text{I.}\quad \pm\frac{\beta t\sqrt{(a+2bt^2+ct^4)}}{(\alpha+\beta t^2)^{r-1}}$$

$$= \left(a\beta\alpha - 2b\alpha^2 + \frac{c}{\beta}\alpha^3\right)(2r-2).[r] - \left(a\beta - 4b\alpha + \frac{3c\alpha^2}{\beta}\right)(2r-3).[r-1]$$
$$- \left(2b - \frac{3c\alpha}{\beta}\right).(2r-4).[r-2] - \frac{c}{\beta}(2r-5).[r-3].$$

Vertauscht man in dieser Formel a mit c, α mit β und $\frac{1}{t}$ mit t, wodurch sich ∂u in $-\partial u$ verwandelt, und setzt das Integral

$$\int\frac{t^{2r}.\partial u}{(\alpha+\beta t^2)^r} = [r],$$

so erhält man die neue Formel

$$\text{II.}\quad \pm\frac{\alpha t^{2r-5}.\sqrt{(a+2bt^2+ct^4)}}{(\alpha+\beta t^2)^{r-1}}$$

$$= -\left(c\alpha\beta - 2b\beta^2 + \frac{a\beta^3}{\alpha}\right)(2r-2).[r] + \left(c\alpha - 4b\beta + \frac{3a\beta^2}{\alpha}\right)(2r-3)[r-1]$$
$$+ \left(2b - \frac{3a\beta}{\alpha}\right)(2r-4).[r-2] + \frac{a}{\alpha}(2r-5)[r-3],$$

in welcher wieder $\partial u = \frac{\pm\partial t}{\sqrt{(a+2bt^2+ct^4)}}$ ist und also t eine beliebige Modular-Function des Arguments u oder auch seines Complements vorstellt.

§. 251.

Reduction des Unterschiedes zweier Modular-Integrale von der zweiten oder vierten Classe, deren Parameter sich zu K ergänzen, auf ein einziges Integral von derselben Classe.

Beziehen wir die Modular-Functionen des Arguments u auf den Modul k, und die des Arguments v auf den kleineren Modul λ, wie in §. 51—54., so ist nach Formel (13.) §. 52.

$$\text{dn}\,2v = \frac{\text{dn}\,u + \text{dnc}\,u}{1+k'},$$

also $\mathrm{dn}^2 2v = \frac{\mathrm{dn}^2 u + \mathrm{dnc}^2 u + 2k'}{(1+k')^2}$ und $2v = (1+k').u$, also $\partial(2v) = (1+k').\partial u$. Multiplicirt man hiermit die vorige Gleichung und integrirt, so entsteht

$$\mathrm{el}\,2v = \frac{\mathrm{el}\,u + E - \mathrm{elc}\,u + 2k'u}{1+k'}.$$

Setzt man in dieser Gleichung $u = K$, also $v = L$, und bezeichnet den zum Modul λ gehörigen elliptischen Quadranten mit E, so hat man, da $\mathrm{el}(2L) = 2E_1$ ist,

$$2E_1 = \frac{2E + 2k'.K}{1+k'}, \text{ und da } 2L = (1+k').K, \text{ also}$$

$$\frac{v}{L} = \frac{u}{K}, \text{ mithin}$$

$$\frac{E_1}{L}.2v = \frac{\frac{2E.u}{K} + 2k'u}{1+k'}$$

ist, so erhält man durch die Subtraction dieser Gleichung von der obigen:

$$\mathrm{el}\,2v - \frac{E_1}{L}.2v = \frac{\mathrm{el}\,u - \frac{E}{K}.u - \left(\mathrm{el}(K-u) - \frac{E}{K}(K-u)\right)}{1-k'}$$

Da nach §. 201. $\mathrm{el}\,u - \frac{E}{K}.u = H(u)$, $\mathrm{el}(K-u) - \frac{E}{K}(K-u) = H(K-u) = G(u)$, und eben so auch, mit Beziehung auf den Modul λ, $\mathrm{el}(2v) - \frac{E_1}{L}.(2v) = H(2v)$ ist, so reducirt sich die vorige Gleichung auf

$$1. \quad H(2v) = \frac{H(u) - G(u)}{1+k'},$$

wenn man $H(u)$ und $G(u)$ auf den Modul k, hingegen $H(2v)$ auf den kleineren Modul $\lambda = \frac{1-k'}{1+k'}$ bezieht.

Multiplicirt man die vorige Gleichung mit $\partial(2v) = (1+k').\partial u$, und integrirt, so entsteht, da $H(u).\partial u = \partial \log Hl(u)$ und $-G(u).\partial u = \partial \log Gl(u)$ ist, die Gleichung $\log Hl(2v) = \log Hl(u) + \log Gl(u) + \log \alpha$, wenn man die Constante der Integration mit $\log \alpha$ bezeichnet; oder auch $Hl(2v) = \alpha.Hlu.Glu$. Da nun für $u = v = 0$, $Hlu = \sqrt{k'}$, $Glu = 1$ und $Hl(2v) = \sqrt{\lambda'}$ ist, so ergiebt sich $\sqrt{\lambda'} = \alpha.\sqrt{k'}$, und also

$$2. \quad \frac{Hl(2v)}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{k^1}}.Hlu.Glu.$$

Man findet auch noch zwei neue Gleichungen auf folgende Art.

Es ist nach §. 52. $\sqrt{\lambda}.\operatorname{sn} 2v = k \operatorname{sn} u \operatorname{snc} u$, und da $\operatorname{sn} 2v = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}.\frac{Al(2v)}{Hl(2v)}$, $\operatorname{sn} u = \frac{1}{\sqrt{k}}.\frac{Alu}{Hlu}$, $\operatorname{snc} u = \frac{1}{\sqrt{k}}.\frac{Blu}{Glu}$, also

$$\frac{Al(2v)}{Hl(2v)} = \frac{Alu}{Hlu}.\frac{Blu}{Glu}$$

ist, so findet man, wenn die Gleichung (2.) hiermit multiplicirt wird,

$$3. \quad \frac{Al(2v)}{\sqrt{\lambda'}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda'}}.Alu.Blu.$$

Nimmt man auf beiden Seiten die natürlichen Logarithmen und differenziirt die Gleichung, so entsteht, da $\partial \log Al(2v) = A(2v).2\partial v$, $\partial \log Alu = A(u).\partial u$, $\partial \log Blu = -B(u).\partial u$ und $\partial(2v) = (1+k').\partial u$ ist, die Formel

$$4. \quad A(2v) = \frac{A(u)-B(u)}{1+k'}.$$

Zusatz. Da nach §. 54. $L = \frac{1+k'}{2}.K$ und $L' = (1+k').K'$, also $LL' = \frac{(1+k')^2}{2}.KK'$ und $2v = (1+k').u$, folglich $(2v)^2 = (1+k')^2.u^2$ ist, so ist $\frac{(2v)^2}{LL'} = 2.\frac{u^2}{KK'}$, also $\frac{\pi(2v)^2}{4LL'} = 2\frac{\pi u^2}{4KK'}$ und $e^{-\frac{\pi(2v)^2}{4LL'}} = e^{\frac{-\pi u^2}{4KK'}}.e^{\frac{-\pi u^2}{4KK'}}$.

Da nun $Hlu = e^{\frac{-\pi u^2}{4KK'}}.\mathfrak{Bl}'u$, $Glu = e^{\frac{-\pi u^2}{4KK'}}.\mathfrak{Gl}'u$, $Alu = e^{\frac{-\pi u^2}{4KK'}}.\mathfrak{Al}'u$ und $Blu = e^{\frac{-\pi u^2}{4KK'}}.\mathfrak{Hl}'u$ ist, so verwandeln sich die obigen Gleichungen (2. und 3.) in

$$5. \quad \frac{\mathfrak{Bl}'(2v)}{\sqrt{\lambda'}} = \frac{1}{\sqrt{k'}}.\mathfrak{Bl}'u.\mathfrak{Gl}'u \text{ und}$$

$$6. \quad \frac{\mathfrak{Al}'(2v)}{\sqrt{\lambda'}} = \frac{1}{\sqrt{k'}}.\mathfrak{Al}'u.\mathfrak{Hl}'u.$$

Werden diese beiden Gleichungen logarithmisch differenziirt, so erhält man noch

$$7. \quad \mathfrak{B}'(2v) = \frac{\mathfrak{B}'(u)+\mathfrak{G}'(u)}{1+k'},$$

$$8. \quad \mathfrak{A}'(2v) = \frac{\mathfrak{A}'(u)-\mathfrak{H}'(u)}{1+k'}.$$

In diesen Gleichungen (5—8.) beziehen sich also die Functionen des Arguments u auf den Modul k', während die Functionen des Arguments $2v = (1+k').u$ sich auf den Modul $\lambda' = \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}$ beziehen.

§. 252.

Wählen wir nun aufser den Argumenten u und v oder $2v$ noch die Argumente a und $2b$ und beziehen also die Functionen des Arguments a auf den Modul k, also auf k', wenn der conjugirte Modul genommen werden soll, und die Functionen des Arguments $2b$ auf den Modul λ, also auf λ', wenn der conjugirte Modul zu nehmen ist, so ist nach §. 251.

$$\frac{Hl(2v \pm 2b)}{\sqrt{\lambda'}} = \frac{1}{\sqrt{k'}} . Hl(u \pm a) . Gl(u \pm a),$$

und hieraus folgt

$$\log \frac{Hl(2v+2b)}{Hl(2v-2b)} = \log \sqrt{\frac{Hl(u+a)}{Hl(u-a)}} - \log \sqrt{\frac{Gl(a-u)}{Gl(a+u)}}.$$

Ferner ist $H(2b) = \frac{H(a) - G(a)}{1+k'}$, also $2v . H(2b) = u . H(a) - u . G(a)$.
Da auch

$$\mathfrak{S}(2v, 2b) = 2v . H(2b) - \log \sqrt{\frac{Hl(2b+2v)}{Hl(2b-2v)}},$$

$$\mathfrak{S}(u, a) = u . H(a) - \log \sqrt{\frac{Hl(a+u)}{Hl(a-u)}} \text{ und}$$

$$\mathfrak{S}(u, K-a) = u . G(a) - \log \sqrt{\frac{Gl(a-u)}{Gl(a+u)}}$$

ist, so hat man

$$1. \quad \mathfrak{S}(2v, 2b) = \mathfrak{S}(u, a) - \mathfrak{S}(u, K-a).$$

Ganz eben so findet man die Formel

$$2. \quad \mathfrak{S}(2v, 2b) = \mathfrak{C}(u, K-a) - \mathfrak{C}(u, a),$$

und $\mathfrak{D}(u, a) - \mathfrak{D}(u, K-a) = -2v . A(2b) + \log \sqrt{\frac{Hl(2v+2b)}{Hl(2v-2b)}}$, da $u . A(a) - u . B(a) = (1+k') u . A(2b) = 2v . A(2b)$ ist. Da aber nach §. 200. $-A(2b) = B(2b) - \frac{1}{\operatorname{sn} 2b \operatorname{snc} 2b}$ ist, so folgt

$$\mathfrak{D}(u, a) - \mathfrak{D}(u, K-a) = -\frac{2v}{\operatorname{sn} 2b \operatorname{snc} 2b} + 2v . B(2b) + \log \sqrt{\frac{Hl(2v+2b)}{Hl(2v-2b)}}, \text{ oder}$$

$$3. \quad \mathfrak{D}(2v, 2b) - \frac{2v}{\operatorname{sn} 2b \operatorname{snc} 2b} = \mathfrak{D}(u, a) - \mathfrak{D}(u, K-a).$$

In diesen Formeln ist $2b = (1+k') . a$, so wie $2v = (1+k') . u$. Aus der Formel (3.) §. 251. folgt

$$\log \sqrt{\frac{Al(2b+2v)}{Al(2b-2v)}} = \log \sqrt{\frac{Al(a+u)}{Al(a-u)}} - \log \sqrt{\frac{Bl(a-u)}{Bl(a+u)}};$$

aufserdem ist

$$'\mathfrak{S}(u, K-a) = -u . A(a) + \log \sqrt{\frac{Al(a+u)}{Al(a-u)}},$$

$$'\mathfrak{C}(u, K-a) = -u.H(a) + \log\sqrt{\frac{Al(a+u)}{Al(a-u)}} \text{ und}$$
$$'\mathfrak{D}(u, K-a) = u.G(a) + \log\sqrt{\frac{Al(a+u)}{Al(a-u)}};$$

gemäfs §. 203. Daher erhalten wir

$$'\mathfrak{S}(u, K-a) + u.A(a) - '\mathfrak{S}(u, a) - u.B(a)$$
$$= \log\sqrt{\frac{Al(2b+2v)}{Al(2b-2v)}} = '\mathfrak{S}(u, K-a) - '\mathfrak{S}(u, a) + 2v.A(2b),$$

oder auch

$$4. \quad '\mathfrak{S}(u, K-a) - '\mathfrak{S}(u, a) = '\mathfrak{S}(2v, L-2b).$$

Ferner ist $\log\sqrt{\frac{Al(2b+2v)}{Al(2b-2v)}} = '\mathfrak{C}(u, K-a) + u.H(a) - '\mathfrak{C}(u, a) - u.G(a)$
$= '\mathfrak{C}(u, K-a) - '\mathfrak{C}(u, a) + 2v.H(2b)$ und also

$$5. \quad '\mathfrak{C}(u, K-a) - '\mathfrak{C}(u, a) = '\mathfrak{C}(2v, L-2b).$$

Endlich findet sich $\log\sqrt{\frac{Al(2b+2v)}{Al(2b-2v)}} = '\mathfrak{D}(u, K-a) - u.G(a) - '\mathfrak{D}(u, a) + u.H(a)$
$= '\mathfrak{D}(u, K-a) - '\mathfrak{D}(u, a) + 2v.H(2b)$, oder

$$6. \quad '\mathfrak{D}(u, K-a) - '\mathfrak{D}(u, a) = '\mathfrak{C}(2v, L-2b).$$

§. 253.

Summen oder Unterschiede der Modular-Integrale von der ersten und dritten Classe, deren Parameter sich zum conjugirten Modular-Quadranten ergänzen.

Im elften Abschnitte wurden zahlreiche Formeln entwickelt, durch welche Modular-Integrale von der ersten und dritten Classe, deren Parameter sich zum conjugirten Quadranten ergänzen, mittels eines cyklischen Arcus auf einander zurückgeführt werden. Kann die *Summe* solcher Integrale durch einen cyklischen Arcus ausgedrückt werden, so kann ihr *Unterschied* auf ein einziges solches Integral zurückgeführt werden: kann im Gegentheil ihr *Unterschied* durch einen cyklischen Arcus ausgedrückt werden, so kann ihre *Summe* durch ein einziges Integral dargestellt werden; wie es nun gezeigt werden soll. Da $K - ai = -i(a + iK)$ ist, so verwandelt sich die Gleichung (1.) §. 252., wenn darin ai statt a und bi statt b gesetzt wird, zunächst in $S(2v, 2b) = S(u, a) + S(u, a + iK)$, und da nach §. 132. $S(u, a + iK) = -'S(u, K' - a)$ ist, so ergiebt sich

$$1. \quad S(u, a) - 'S(u, K' - a) = S(2v, 2b) \quad \text{für} \quad a < \tfrac{1}{2}K',$$

und aus den Formeln §. 206. findet man

$$S(u, a) + 'S(u, K' - a) = \frac{k\,\text{cnc}'a}{\text{cn}'a}.u - \text{arc tang}\left(\frac{k\,\text{cnc}'a}{\text{cn}'a}\,\text{sn}\,u\,\text{snc}\,u\right).$$

Die Formel (2.) §. 252. verwandelt sich zunächst in $S(2v,2b) = -C(u,a+iK)-C(u,a)$, und da $C(u,a+iK) = -\frac{\text{sn}'a}{\text{snc}'a}.u + {}'C(u,K'-a)$ ist, so folgt

$$2.\quad \frac{\text{sn}'a}{\text{snc}'a}.u - C(u,a) - {}'C(u,K'-a) = S(2v,2b),$$

und aus den Formeln §. 206. findet man

$${}'C(u,K'-a)-C(u,a) = (k'^2\,\text{sn}'a\,\text{snc}'a)u - \text{arc tang}\left(\frac{k\,\text{cnc}'a}{\text{cn}'a}\,\text{sn}\,u\,\text{snc}\,u\right).$$

Die Formel (3.) §. 252. giebt zunächst $D(2v,2b)+\frac{2v.\text{dn}'2b}{tn'2b} = D(u,a)+D(u,a+iK)$, und da $D(u,a+iK) = {}'D(u,K'-a)$ ist, so erhält man

$$3.\quad D(u,a)+{}'D(u,K'-a) = \frac{\lambda\,\text{cn}'2b}{\text{cnc}'2b}.2v + D(2v,2b),$$

und die Formeln §. 206. geben

$${}'D(u,K'-a)-D(u,a) = \frac{k\,\text{cn}'a}{\text{cnc}'a}.u - \text{arc tang}\left(\frac{k\,\text{cnc}'a}{\text{cn}'a}\,\text{sn}\,u\,\text{snc}\,u\right).$$

Da $L' = (1+k').K'$ und $2b = (1+k')a$ ist, so ist $L'-2b = (1+k')(K'-a)$. Setzt man also $K'-a$ statt a in den vorigen Formeln, so verwandelt sich $2b$ in $L'-2b$ und wir erhalten

$$4.\quad S(u,K'-a) - {}'S(u,a) = S(2v,L'-2b) \text{ und}$$

$$S(u,K'-a)+{}'S(u,a) = \frac{k\,\text{cn}'a}{\text{cnc}'a}.u - \text{arc tang}\left(\frac{k\,\text{cn}'a}{\text{cnc}'a}\,\text{sn}\,u\,\text{snc}\,u\right).$$

Die Formel (2.) verwandelt sich in

$$5.\quad \frac{\text{snc}'a}{\text{sn}'a}.u - C(u,K'-a) - {}'C(u,a) = S(2v,L'-2b) \text{ und es ist}$$

$${}'C(u,a)-C(u,K'-a) = (k'^2\,\text{sn}'a\,\text{snc}'a).u - \text{arc tang}\left(\frac{k\,\text{cn}'a}{\text{cnc}'a}\,\text{sn}\,u\,\text{snc}\,u\right).$$

Die Formel (3.) verwandelt sich in

$$6.\quad D(u,K'-a)+{}'D(u,a) = \frac{\lambda\,\text{cnc}'2b}{\text{cn}'2b}.2v + D(2v,L'-2b)$$

und es ist ${}'D(u,a)-D(u,K'-a) = \frac{k\,\text{cnc}'a}{\text{cn}'a}.u - \text{arc tang}\left(\frac{k\,\text{cn}'a}{\text{cnc}'a}\,\text{sn}\,u\,\text{snc}\,u\right)$.

In diesen Formeln ist

$$\text{sn}\,2v = (1+k')\,\text{sn}\,u\,\text{snc}\,u \quad \text{und} \quad \text{tn}'2b = (1+k').\frac{\text{tn}'a}{\text{dn}'a} = \sqrt{\frac{1+k'}{1-k'}}.\frac{\text{cnc}'a}{\text{cn}'a}.$$

Man darf auch nach §. 83. in den Formeln (1—3.) §. 252. λ mit k' und λ' mit k vertauschen, wenn man v statt u, also b statt a, und $\frac{1}{2}u$ statt v, also $\frac{1}{2}a$ statt b setzt. Hierdurch verwandeln sich jene Formeln in

$$\mathfrak{S}'(u,a) = \mathfrak{S}'(v,b) - \mathfrak{S}'(v,L'-b),\ \ \mathfrak{S}'(u,a) = \mathfrak{C}'(v,L'-b) - \mathfrak{C}'(v,b) \text{ und}$$

$$\mathfrak{D}'(u,a) - \frac{u}{\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a} = \mathfrak{D}'(v,b) - \mathfrak{D}'(v,L'-b).$$

Setzt man in diesen Formeln noch vi statt v und ui statt u, so giebt die erste

$$7.\quad {}'S(v,b) - {}'S(v,L'-b) = {}'S(u,a) \quad \text{für} \quad b < \tfrac{1}{2}L',$$

und die Formeln §. 206. geben für die Summe:

$${}'S(v,b) + {}'S(v,L'-b) = \operatorname{arc\,tang}\left(\lambda'^2\,\mathrm{sn}'b\,\mathrm{snc}'b\,.\frac{\mathrm{tn}\,v}{\mathrm{dn}\,v}\right) - (\lambda'^2\,\mathrm{sn}'b\,\mathrm{snc}'b).v.$$

Die zweite Gleichung giebt

$$8.\quad {}'C(v,L'-b) - {}'C(v,b) = {}'S(u,a),$$

und die Formeln §. 206. geben

$${}'C(v,L'-b) + {}'C(v,b) = \operatorname{arc\,tang}\left(\lambda'^2\,\mathrm{sn}'b\,\mathrm{snc}'b\,.\frac{\mathrm{tn}\,v}{\mathrm{dn}\,v}\right) + (\lambda'^2\,\mathrm{sn}'b\,\mathrm{snc}'b).v.$$

Ferner hat man

$$9.\quad {}'D(v,b) - {}'D(v,L'-b) = {}'D(u,a) - \frac{u}{\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a},$$

und die Formeln §. 206. geben

$${}'D(v,b) + {}'D(v,L'-b) = \frac{v}{\mathrm{sn}'b\,\mathrm{snc}'b} + \operatorname{arc\,tang}\left(\lambda'^2\,\mathrm{sn}'b\,\mathrm{snc}'b\,.\frac{\mathrm{tn}\,v}{\mathrm{dn}\,v}\right).$$

Vertauschen wir auch in den Formeln (4., 5., 6.) §. 252. λ mit k' und λ' mit k, indem wir v statt u, b statt a, $\frac{1}{2}u$ statt v und $\frac{1}{2}a$ statt b setzen, so verwandeln sie sich zunächst in

$${}'\mathfrak{S}'(v,L'-b) - {}'\mathfrak{S}'(v,b) = {}'\mathfrak{S}'(u,K'-a),$$
$${}'\mathfrak{C}'(v,L'-b) - {}'\mathfrak{C}'(v,b) = {}'\mathfrak{C}'(u,K'-a) \text{ und}$$
$${}'\mathfrak{D}'(v,L'-b) - {}'\mathfrak{D}'(v,b) = {}'\mathfrak{C}'(u,K'-a).$$

Setzen wir nun noch vi statt v und ui statt u, so erhalten wir

$$10.\quad S(v,L'-b) - S(v,b) = S(u,K'-a) \quad \text{für} \quad b < \tfrac{1}{2}L',$$

und den Formeln §. 206. gemäfs ist

$$S(v,L'-b) + S(v,b) = \frac{v}{\mathrm{sn}'b\,\mathrm{snc}'b} - \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{1}{\mathrm{sn}'b\,\mathrm{snc}'b}\cdot\frac{\mathrm{tn}\,v}{\mathrm{dn}\,v}\right).$$

Ferner ist

$$11.\quad C(v,L'-b) - C(v,b) = C(u,K'-a),$$

und den Formeln §. 206. gemäfs ist

$$C(v,L'-b) + C(v,b) = -(\lambda'^2\,\mathrm{sn}'b\,\mathrm{snc}'b).v + \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{1}{\mathrm{sn}'b\,\mathrm{snc}'b}\cdot\frac{\mathrm{tn}\,v}{\mathrm{dn}\,v}\right).$$

Endlich ist noch

$$12.\quad D(v,L'-b) - D(v,b) = C(u,K'-a),$$

und den Formeln §. 206. gemäfs ist

$$D(v, L'-b) + D(v,b) = (\lambda'^2 \operatorname{sn}' b \operatorname{snc}' b).v + \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{1}{\operatorname{sn}' b \operatorname{snc}' b}\right).\left(\frac{\operatorname{tn} v}{\operatorname{dn} v}\right).$$

Den Zusammenhang zwischen den Argumenten u und v und ihren Modular-Functionen, ferner zwischen den Moduln und den ihnen zugehörigen Modular-Quadranten drücken die Formeln §. 51 — 54. aus; der Zusammenhang zwischen a und b aber ist so beschaffen, dafs man nur ai statt u und bi statt v zu setzen hat. Hiernach ist also $\operatorname{tn}(ai) = (1+\lambda)\frac{\operatorname{tn}(bi)}{\operatorname{dn}(bi)}$ oder $\operatorname{sn}' a = (1+\lambda)\operatorname{sn}' b \operatorname{snc}' b$ und rückwärts $\operatorname{sn}(bi) = \sqrt{\frac{1+k'}{1-k'}}.\sqrt{\frac{1-\operatorname{dn}(ai)}{1+\operatorname{dn}(ai)}}$ oder $\operatorname{tn}' b = \sqrt{\frac{1+k'}{1-k'}}.\sqrt{\frac{1-\operatorname{snc}' a}{1+\operatorname{snc}' a}}$ oder auch $\sqrt{\lambda}.\operatorname{tn}' b = \sqrt{\frac{1-\operatorname{snc}' a}{1+\operatorname{snc}' a}}$.

Die Formeln (1 — 12.) finden vielfache Anwendung in der Geometrie und Mechanik. Setzt man in den Formeln (10 — 12.) noch ai statt a und bi statt b, so erhält man entsprechende Relationen unter den Modular-Integralen der zweiten und vierten Classe, die wir aber der Kürze wegen übergehen.

Achtzehnter Abschnitt.

Ausdruck der Modular-Integrale der zweiten Art durch Functionen der Amplitude des Arguments und des Parameters in convergirenden Reihen.

§. 254.

Reihen für das Integral $'\mathfrak{S}(u,a)$.

Es sind bereits mehrere allgemeine Verfahrungs-Arten der Berechnung der Modular-Integrale der zweiten Art entwickelt worden. Es giebt indessen noch ein neues allgemeines Verfahren, gestützt auf die Entwicklung von Reihen, welche die Modular-Integrale durch cyklische Functionen der Amplitude des Arguments und der Amplitude des Parameters ausdrücken. In den meisten Anwendungen der genannten Integrale sind das Argument und der Parameter selbst nicht gegeben, sondern es sind statt derselben ihre Amplituden bekannt, woraus jene Gröfsen und der Werth des Integrals selbst zu berechnen sind. In diesen Fällen führt die Benutzung der nun zu entwickelnden Reihen, welche im Allgemeinen einen

hohen Grad der Convergenz haben, ziemlich schnell zur Ermittelung des numerischen Werthes eines vorgelegten Modular-Integrals, mit einem beliebigen Grade der Genauigkeit.

Wir beginnen mit der Entwicklung des Sinus-Integrals vierter Classe. Es ist, wenn wir durchgängig setzen

$$\mathrm{am}\, u = \varphi:$$

$$'\mathfrak{S}(u,a) = \int \frac{k'^2 \operatorname{tn} a \operatorname{dn} a \sin^2\varphi \,.\, \partial\varphi}{\operatorname{cn}^2 a\left(1 - \frac{\sin^2\varphi}{\operatorname{snc}^2 a}\right).\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}}.$$

Da $\frac{1}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}} = 1 + \frac{1}{2}k^2\sin^2\varphi + \frac{1.3}{1.4}.k^4\sin^4\varphi + \frac{1.3.5}{2.4.6}k^6\sin^6\varphi + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}.k^8\sin^8\varphi + \ldots.$ ist, so mufs jedes Glied dieser Reihe mit $\frac{k'^2 \operatorname{tn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{cn}^2 a}.\frac{\sin^2\varphi\,.\,\partial\varphi}{1-\frac{\sin^2\varphi}{\operatorname{snc}^2 a}}$ multiplicirt und dann integrirt werden. Aus der Gleichung

$$1. \quad \mathfrak{Tang}\,\psi = \frac{\operatorname{tang}\varphi}{\operatorname{tnc} a}$$

leiten wir zunächst her

$$\operatorname{tnc} a\,.\,\partial\psi = \frac{\partial\varphi}{1-\frac{\sin^2\varphi}{\operatorname{snc}^2 a}}.$$

Ferner ist $\frac{\partial\varphi\,.\sin^2\varphi}{1-\frac{\sin^2\varphi}{\operatorname{snc}^2 a}} = \frac{\operatorname{snc}^2 a.\partial\varphi}{1-\frac{\sin^2\varphi}{\operatorname{snc}^2 a}} - \operatorname{snc}^2 a.\partial\varphi$: also erhält man durch Integration

$$\int_0 \frac{\partial\varphi\,.\sin^2\varphi}{1-\frac{\sin^2\varphi}{\operatorname{snc}^2 a}} = \operatorname{snc}^2 a.\operatorname{tnc} a.\psi - \operatorname{snc}^2 a.\varphi.$$

Ueberhaupt ist $\int_0 \frac{\sin^{2r+2}\varphi\,.\,\partial\varphi}{1-\frac{\sin^2\varphi}{\operatorname{snc}^2 a}} = \int_0 \operatorname{snc}^2 a.\frac{\sin^{2r}\varphi\,.\,\partial\varphi}{1-\frac{\sin^2\varphi}{\operatorname{snc}^2 a}} - \int_0 \operatorname{snc}^2 a\,.\,\sin^{2r}\varphi\,.\,\partial\varphi.$

Setzen wir also $\int_0 \frac{\sin^{2r}\varphi\,.\,\partial\varphi}{1-\frac{\sin^2\varphi}{\operatorname{snc}^2 a}} = \operatorname{snc}^{2r} a.\Phi_r$, so verwandelt sich die Relation in

$$\Phi_{(r+1)} = \Phi_r - \frac{1.3.5\ldots.(2r-1)}{2.4.6\ldots.(2r)}.\frac{\lambda^r(\varphi)}{\operatorname{snc}^{2r} a},$$

wenn wir die Bezeichnung (§. 99.) anwenden. Hiernach haben wir

$$
2.\quad \begin{cases}
\Phi_1 = \operatorname{tnc} a.\psi - \phi, \\
\Phi_2 = \operatorname{tnc} a.\psi - \phi - \frac{1}{2}.\frac{\lambda^1(\varphi)}{\sin^2 a}, \\
\Phi_3 = \operatorname{tnc} a.\psi - \phi - \frac{1}{2}.\frac{\lambda^1(\varphi)}{\operatorname{snc}^2 a} - \frac{1.3}{2.4}.\frac{\lambda^2(\varphi)}{\operatorname{snc}^4 a}, \\
\Phi_4 = \operatorname{tnc} a.\psi - \phi - \frac{1}{2}.\frac{\lambda^1(\varphi)}{\sin^2 a} - \frac{1.3}{2.4}.\frac{\lambda^2(\varphi)}{\operatorname{snc}^4 a} - \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{\lambda^3(\varphi)}{\operatorname{snc}^6 a}, \\
\Phi_5 = \operatorname{tnc} a.\psi - \phi - \frac{1}{2}.\frac{\lambda^1(\varphi)}{\operatorname{snc}^2 a} - \frac{1.3}{2.4}.\frac{\lambda^2(\varphi)}{\operatorname{snc}^4 a} - \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{\lambda^3(\varphi)}{\operatorname{snc}^6 a} \\
\qquad\qquad - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}.\frac{\lambda^4(\varphi)}{\operatorname{snc}^8 a} \\
\text{u. s. w.}
\end{cases}
$$

Hat man eine Tabelle, aus welcher man die Werthe von $\lambda^1(\phi)$, $\lambda^2(\phi)$, $\lambda^3(\phi)$, $\lambda^4(\phi)$ u. s. w. für jeden Werth von ϕ entnehmen kann, so ist die Berechnung der Functionen Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4 etc. so einfach, als sie nur gewünscht werden kann.

Mit Bezug auf die vorstehenden Werthe haben wir nun die schnell convergirende Reihe

$$
3.\quad {}'\mathfrak{S}(u, a) = \frac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a}\Big(\Phi_1 + \tfrac{1}{2}k^2 \operatorname{snc}^2 a.\Phi_2 + \frac{1.3}{2.4}k^4 \operatorname{snc}^4 a.\Phi_3 + \frac{1.3.5}{2.4.4}k^6 \operatorname{snc}^6 a.\Phi_4 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}k^8 \operatorname{snc}^8 a.\Phi_5 + \ldots\Big),
$$

nach welcher man das Integral ${}'\mathfrak{S}(u, a)$ schon sehr leicht berechnen kann. Wir formen diese Reihe noch um, indem wir die Werthe von Φ_1, Φ_2, Φ_3 etc. substituiren. Der hyperbolische Arcus ψ erhält dann zum Coëfficienten

$$
\operatorname{dnc} a\Big(1 + \tfrac{1}{2}k^2 \operatorname{snc}^2 a + \frac{1.3}{2.4}k^4 \operatorname{snc}^4 a + \frac{1.3.5}{2.4.6}k^6 \operatorname{snc}^6 a + \ldots\Big),
$$

und da die eingeklammerte Reihe $= \frac{1}{\sqrt{(1 - k^2 \operatorname{snc}^2 a)}} = \frac{1}{\operatorname{dnc} a}$ ist, so ist der Coëfficient von ψ gleich Eins, und die neue Reihe hat überhaupt die Form

$$
4.\quad {}'\mathfrak{S}(u, a) = \psi - \overset{0}{\Delta}.\phi - \overset{1}{\Delta}.\lambda^1(\phi) - \overset{2}{\Delta}.\lambda^2(\phi) - \overset{3}{\Delta}.\lambda^3(\phi) - \ldots
$$

Man findet aber

$$
\overset{0}{\Delta} = \frac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a}\Big(1 + \tfrac{1}{2}k^2 \operatorname{snc}^2 a + \frac{1.3}{2.4}k^4 \operatorname{snc}^4 a + \frac{1.3.5}{2.4.6}k^6 \operatorname{snc}^6 a + \ldots\Big),
$$

$$
\overset{1}{\Delta} = \tfrac{1}{2}.\frac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a}.\frac{1}{\operatorname{snc}^2 a}\Big(\tfrac{1}{2}k^2 \operatorname{snc}^2 a + \frac{1.3}{2.4}k^4 \operatorname{snc}^4 a + \frac{1.3.5}{2.4.6}k^6 \operatorname{snc}^6 a + \ldots\Big),
$$

$$
\overset{2}{\Delta} = \frac{1.3}{2.4}.\frac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a}.\frac{1}{\operatorname{snc}^4 a}\Big(\frac{1.3}{2.4}k^1 \operatorname{snc}^4 a + \frac{1.3.5}{2.4.6}k^6 \operatorname{snc}^6 a + \ldots\Big)
$$

u. s. w.

Die eingeklammerten Factoren lassen sich sämmtlich summiren, wodurch wir erhalten:

$$
5.\quad\begin{cases}
\overset{0}{\varDelta} = \dfrac{1}{\operatorname{tnc} a}, \\[2mm]
\overset{1}{\varDelta} = \tfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\operatorname{snc}^2 a}\left(\dfrac{1}{\operatorname{dnc} a} - 1\right)\dfrac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a}, \\[2mm]
\overset{2}{\varDelta} = \dfrac{1.3}{2.4}\cdot\dfrac{1}{\operatorname{snc}^4 a}\left(\dfrac{1}{\operatorname{dnc} a} - 1 - \tfrac{1}{2}k^2\operatorname{snc}^2 a\right)\dfrac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a} \\[2mm]
\overset{3}{\varDelta} = \dfrac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\dfrac{1}{\operatorname{snc}^6 a}\left(\dfrac{1}{\operatorname{dnc} a} - 1 - \tfrac{1}{2}k^2\operatorname{snc}^2 a - \dfrac{1.3}{2.4}k^4\operatorname{snc}^4 a\right)\dfrac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a}, \\[2mm]
\overset{4}{\varDelta} = \dfrac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\dfrac{1}{\operatorname{snc}^8 a}\left(\dfrac{1}{\operatorname{dnc} a} - 1 - \tfrac{1}{2}k^2\operatorname{snc}^2 a - \dfrac{1.3}{2.4}k^4\operatorname{snc}^4 a\right. \\
\qquad\qquad\left. - \dfrac{1.3.5}{2.4.6}k^6\operatorname{snc}^6 a\right)\dfrac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a} \\[2mm]
\qquad\text{u. s. w.}
\end{cases}
$$

Diese Ausdrücke schreiten nach einem einfachen Gesetze fort; ihre Berechnung ist leicht; auch convergiren sie gegen die Grenze Null, und da die Functionen $\lambda^1(\varphi)$, $\lambda^2(\varphi)$, $\lambda^3(\varphi)$ etc. ebenfalls gegen die Grenze Null convergiren, so hat die Reihe (4.) eine überaus rasche Convergenz; ihr Anfangsglied ψ wird unendlich, wenn $\operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tnc} a$ oder $u + a = k$ ist. Man hat übrigens auch

$$
6.\quad\begin{cases}
\overset{0}{\varDelta} = \dfrac{1}{\operatorname{tnc} a}, \\[2mm]
\overset{1}{\varDelta} = \tfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\overset{0}{\varDelta}}{\operatorname{snc}^2 a} - \tfrac{1}{2}\cdot\dfrac{k'^2\operatorname{tn} a\operatorname{dn} a}{\operatorname{cn}^2 a}, \\[2mm]
\overset{2}{\varDelta} = \tfrac{3}{4}\cdot\dfrac{\overset{1}{\varDelta}}{\operatorname{snc}^2 a} - \dfrac{1.3}{2.4}.k^2.\dfrac{k'^2\operatorname{tn} a\operatorname{dn} a}{\operatorname{cn}^2 a}, \\[2mm]
\overset{3}{\varDelta} = \tfrac{5}{6}\cdot\dfrac{\overset{2}{\varDelta}}{\operatorname{snc}^2 a} - \dfrac{1.3.5}{2.4.6}k^4.\dfrac{k'^2\operatorname{tn} a\operatorname{dn} a}{\operatorname{cn}^2 a}, \\[2mm]
\overset{4}{\varDelta} = \tfrac{7}{8}\cdot\dfrac{\overset{3}{\varDelta}}{\operatorname{snc}^2 a} - \dfrac{1.3.5.7}{2.4.6.8}.k^6.\dfrac{k'^2\operatorname{tn} a\operatorname{dn} a}{\operatorname{cn}^2 a}, \\[2mm]
\overset{5}{\varDelta} = \tfrac{9}{10}\cdot\dfrac{\overset{4}{\varDelta}}{\operatorname{snc}^2 a} - \dfrac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}.k^8.\dfrac{k'^2\operatorname{tn} a\operatorname{dn} a}{\operatorname{cn}^2 a}, \\[2mm]
\qquad\text{u. s. w.}
\end{cases}
$$

und hiernach können die Coëfficienten $\overset{1}{\varDelta}, \overset{2}{\varDelta}, \overset{3}{\varDelta}, \overset{4}{\varDelta}$ etc. auch bequem recurrirend berechnet werden. Hat man keine Tabelle für die Werthe der Functionen $\lambda^1(\varphi)$, $\lambda^2(\varphi)$, $\lambda^3(\varphi)$ etc., so erhält man, wenn man die Werthe (5. §. 101.) substituirt und

$$\Delta = \overset{0}{\Delta} + \overset{1}{\Delta} + \overset{2}{\Delta} + \overset{3}{\Delta} + \overset{4}{\Delta} + \text{ etc.}$$

setzt, auch noch die Reihe

$$7. \quad {}'\mathfrak{S}(u,a) = \psi - \Delta.\varphi + (\Delta - \overset{0}{\Delta}).\sin\varphi\cos\varphi + \tfrac{2}{3}(\Delta - \overset{0}{\Delta} - \overset{1}{\Delta}).\sin^3\varphi\cos\varphi$$
$$+ \frac{2.4}{3.5}(\Delta - \overset{0}{\Delta} - \overset{1}{\Delta} - \overset{2}{\Delta}).\sin^5\varphi\cos\varphi + \frac{2.4.6}{3.5.7}(\Delta - \overset{0}{\Delta} - \overset{1}{\Delta} - \overset{2}{\Delta} - \overset{3}{\Delta}).\sin^7\varphi\cos\varphi + \ldots.$$

Substituirt man aber die in §. 100. gefundenen Werthe, so erhält man

$$'\mathfrak{S}(u,a) =$$
$$\psi - \Delta.\varphi + (\tfrac{1}{2}\overset{1}{\Delta} + \tfrac{2}{3}\overset{2}{\Delta} + \tfrac{3}{4}\overset{3}{\Delta} + \tfrac{4}{5}\overset{4}{\Delta} + \tfrac{5}{6}\overset{5}{\Delta} + \ldots.).\sin 2\varphi$$
$$- \left(\frac{2.1}{3.4}\overset{2}{\Delta} + \frac{3.2}{4.5}\overset{3}{\Delta} + \frac{4.3}{5.6}\overset{4}{\Delta} + \frac{5.4}{6.7}\overset{5}{\Delta} \ldots.\right).\frac{\sin 4\varphi}{2}$$
$$+ \left(\frac{3.2.1}{4.5.6}\overset{3}{\Delta} + \frac{4.3.2}{5.6.7}\overset{4}{\Delta} + \frac{5.4.3}{6.7.8}\overset{5}{\Delta} + \frac{6.5.4}{7.8.9}\overset{6}{\Delta} + \ldots.\right).\frac{\sin 6\varphi}{3}$$
$$+ \left(\frac{4.3.2.1}{5.6.7.8}\overset{4}{\Delta} + \frac{5.4.3.2}{6.7.8.9}\overset{5}{\Delta} + \frac{6.5.4.3}{7.8.9.10}\overset{6}{\Delta} + \frac{7.6.5.4}{8.9.10.11}\overset{7}{\Delta} + \ldots.\right).\frac{\sin 8\varphi}{4}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Es ist indessen die Rechnung nach dieser Reihe nicht so bequem, als nach den Reihen 3, 4 und 7; zumal dann, wenn man eine Hülfstabelle für die Werthe der Functionen $\lambda^1(\varphi)$, $\lambda^2(\varphi)$, $\lambda^3(\varphi)$ etc. hat.

§. 255.

Reihen für das Integral $'\mathfrak{C}(u,a)$.

Das Integral $'\mathfrak{C}(u,a) = \int_0 \frac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a}.\frac{\partial u}{1 - \frac{\sin^2 u}{\operatorname{snc}^2 a}}$ kann auf ähnliche Art entwickelt werden; indessen lassen sich die Reihen für dasselbe noch leichter aus den Reihen für $'\mathfrak{S}(u,a)$ herleiten. Beachtet man, daſs

$$'\mathfrak{C}(u,a) = {}'\mathfrak{S}(u,a) + \frac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a}.u$$

ist, und nimmt man für u die Reihe $\varphi + \frac{1^2}{2^2}k^2\lambda^1(\varphi) + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}k^4\lambda^2(\varphi) + \cdots$, so hat man

$$'\mathfrak{C}(u,a) = {}'\mathfrak{S}(u,a) + \frac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a}\left(\varphi + \tfrac{1}{2}k^2\operatorname{snc}^2 a.\tfrac{1}{2}\frac{\lambda^1(\varphi)}{\operatorname{snc}^2 a} + \frac{1.3}{2.4}k^4\operatorname{snc}^4 a\frac{1.3}{2.4}.\frac{\lambda^2(\varphi)}{\operatorname{snc}^4 a}\right.$$
$$\left. + \frac{1.3.5}{2.4.6}k^6\operatorname{snc}^6 a\frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{\lambda^3(\varphi)}{\operatorname{snc}^6 a} + \ldots.\right),$$

d. h. man muſs in der Reihe (3. §. 254.) zu den Functionen Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4 etc. der Reihe nach die Gröſsen φ, $\frac{1}{2}.\frac{\lambda^1(\varphi)}{\operatorname{snc}^2 a}$, $\frac{1.3}{2.4}.\frac{\lambda^2(\varphi)}{\operatorname{snc}^4 a}$, $\frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{\lambda^3(\varphi)}{\operatorname{snc}^6 a}$ etc.

addiren. Bezeichnen wir nach dieser Abänderung die Functionen durch Φ_0, Φ_1, Φ_2, Φ_3 etc., so haben wir, wenn wir aus $\Phi = am\, u$ wieder

$$1.\quad \mathfrak{T}\mathrm{ang}\,\psi = \frac{\operatorname{tang}\varphi}{\operatorname{tnc} a}$$

berechnen, zunächst $\Phi_0 = \operatorname{tnc} a.\psi$ und dann weiter

$$2.\quad \begin{cases} \Phi_1 = \operatorname{tnc} a.\psi - \Phi, \\ \Phi_2 = \operatorname{tnc} a.\psi - \Phi - \frac{1}{2}.\frac{\lambda^1(\varphi)}{\operatorname{snc}^2 a}, \\ \Phi_3 = \operatorname{tnc} a.\psi - \Phi - \frac{1}{2}.\frac{\lambda^1(\varphi)}{\operatorname{snc}^2 a} - \frac{1.3}{2.4}.\frac{\lambda^2(\varphi)}{\operatorname{snc}^4 a}, \\ \Phi_4 = \operatorname{tnc} a.\psi - \Phi - \frac{1}{2}.\frac{\lambda^1(\varphi)}{\operatorname{snc}^2 a} - \frac{1.3}{2.4}.\frac{\lambda^2(\varphi)}{\operatorname{snc}^4 a} - \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{\lambda^3(\varphi)}{\operatorname{snc}^6 a} \\ \qquad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Mit Beziehung auf diese Werthe erhalten wir die Reihe

$$3.\quad '\mathfrak{E}(u,a) = \operatorname{dnc} a.\psi + \frac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a}\Big(\tfrac{1}{2}k^2 \operatorname{snc}^2 a.\Phi_1 + \frac{1.3}{2.4}.k^4 \operatorname{snc}^4 a.\Phi_2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}.k^6 \operatorname{snc}^6 a.\Phi_3 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}.k^8 \operatorname{snc}^8 a.\Phi_4 + \ldots\Big).$$

Die Ausdrücke Φ_1, Φ_2, Φ_3 etc. aber sind wieder dieselben, wie in §. 254. Werden sie substituirt, so erhalten wir eine Reihe von der Form

$$4.\quad '\mathfrak{E}(u,a) = \psi - \overset{0}{\Delta}.\Phi - \overset{1}{\Delta}.\lambda^1(\Phi) - \overset{2}{\Delta}.\lambda^2(\Phi) - \overset{3}{\Delta}.\lambda^3(\Phi) - \overset{4}{\Delta}.\lambda^4(\Phi) - \ldots$$

und die Ausdrücke der Coëfficienten in ihr sind

$$5.\quad \begin{cases} \overset{0}{\Delta} = \left(\frac{1}{\operatorname{dnc} a} - 1\right).\frac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a}, \\ \overset{1}{\Delta} = \frac{1}{2}.\frac{1}{\operatorname{snc}^2 a}\left(\frac{1}{\operatorname{dnc} a} - 1 - \tfrac{1}{2}k^2 \operatorname{snc}^2 a\right).\frac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a} \\ \overset{2}{\Delta} = \frac{1.3}{2.4}.\frac{1}{\operatorname{snc}^4 a}\left(\frac{1}{\operatorname{dnc} a} - 1 - \tfrac{1}{2}k^2 \operatorname{snc}^2 a - \frac{1.3}{2.4}k^4 \operatorname{snc}^4 a\right).\frac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a}, \\ \overset{3}{\Delta} = \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{1}{\operatorname{snc}^6 a}\Big(\frac{1}{\operatorname{dnc} a} - 1 - \tfrac{1}{2}k^2 \operatorname{snc}^2 a - \frac{1.3}{2.4}k^4 \operatorname{snc}^4 a \\ \qquad\qquad - \frac{1.3.5}{2.4.6}k^6 \operatorname{snc}^6 a\Big).\frac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a} \\ \qquad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Sie sind verschieden von denen im §. 254.; indessen lassen sich ihre Werthe eben so leicht berechnen. Es ist

$$6. \begin{cases} \overset{1}{\varDelta} = \frac{1}{2}.\frac{\overset{0}{\varDelta}}{\operatorname{snc}^2 a} - \frac{1^2}{2^2}k^2.\frac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a}, \\ \overset{2}{\varDelta} = \frac{3}{4}.\frac{\overset{1}{\varDelta}}{\operatorname{snc}^2 a} - \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}k^4.\frac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a}, \\ \overset{3}{\varDelta} = \frac{5}{6}.\frac{\overset{2}{\varDelta}}{\operatorname{snc}^2 a} - \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}k^6.\frac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a}, \\ \overset{4}{\varDelta} = \frac{7}{8}.\frac{\overset{3}{\varDelta}}{\operatorname{snc}^2 a} - \frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2}k^8.\frac{\operatorname{dnc} a}{\operatorname{tnc} a} \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Setzen wir immer $\varDelta = \overset{0}{\varDelta} + \overset{1}{\varDelta} + \overset{2}{\varDelta} + \overset{3}{\varDelta} + \ldots$, so erhalten wir durch eine neue Umformung

$$7.\quad {}'\mathfrak{C}(u, a) = \psi - \varDelta.\Phi + (\varDelta - \overset{0}{\varDelta}).\sin\Phi\cos\Phi + \tfrac{2}{3}(\varDelta - \overset{0}{\varDelta} - \overset{1}{\varDelta}).\sin^3\Phi\cos\Phi$$
$$+ \frac{2.4}{3.5}(\varDelta - \overset{0}{\varDelta} - \overset{1}{\varDelta} - \overset{2}{\varDelta}).\sin^5\Phi\cos\Phi + \frac{2.4.6}{3.5.7}(\varDelta - \overset{0}{\varDelta} - \overset{1}{\varDelta} - \overset{2}{\varDelta} - \overset{3}{\varDelta}).\sin^7\Phi\cos\Phi + \ldots$$

§. 256.

Reihen für das Integral $'\mathfrak{D}(u, a)$.

Es ist $${}'\mathfrak{D}(u, a) = \int \frac{\operatorname{tn} a \operatorname{dn} a.\partial\varphi\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}}{1 - \frac{\sin^2\varphi}{\operatorname{snc}^2 a}}, \text{ wenn } \Phi = am\,u$$ gesetzt wird. Da

$$\sqrt{(1-k^2\sin^2\Phi)}$$
$$= 1 - \tfrac{1}{2}k^2\sin^2\Phi - \frac{1}{2.4}k^4\sin^4\Phi - \frac{1.3}{2.4.6}k^6\sin^6\Phi - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}k^8\sin^8\Phi - \ldots$$

ist, so müssen die Glieder dieser Reihe mit $\frac{\operatorname{tn} a.\operatorname{dn} a.\partial\varphi}{1 - \frac{\sin^2\varphi}{\operatorname{snc}^2 a}}$ multiplicirt und dann integrirt werden. Dadurch erhält man, wenn wieder die Ausdrücke (2. §. 254.) benutzt werden:

$$1.\quad {}'\mathfrak{D}(u, a) =$$
$$\frac{\psi}{\operatorname{dnc} a} - \operatorname{tn} a \operatorname{dn} a\Big(\tfrac{1}{2}k^2\operatorname{snc}^2 a.\varPhi_1 + \frac{1}{2.4}k^4\operatorname{snc}^4 a.\varPhi_2 + \frac{1.3}{2.4.6}k^6\operatorname{snc}^6 a.\varPhi_3$$
$$+ \frac{1.3.5}{2.4.6.8}k^8\operatorname{snc}^8 a.\varPhi_4 + \ldots\Big).$$

Werden die Werthe von $\varPhi_1$, $\varPhi_2$, $\varPhi_3$ etc. selbst gesetzt, so erhält man eine Reihe, in welcher ψ die Gröfse

$$\frac{1}{\operatorname{dnc} a}\Big(1 - \tfrac{1}{2}k^2\operatorname{snc}^2 a - \frac{1}{2.4}k^4\operatorname{snc}^4 a - \frac{1.3}{2.4.6}k^6\operatorname{snc}^6 a - \ldots\Big) = 1,$$

zum Coëfficienten hat; daher haben wir die Reihe

$$2.\quad '\mathfrak{D}(u,a) = \psi + \overset{0}{\Delta}.\varphi + \overset{1}{\Delta}.\lambda'(\varphi) + \overset{2}{\Delta}.\lambda^2(\varphi) + \overset{3}{\Delta}.\lambda^3(\varphi) + \overset{4}{\Delta}.\lambda^4(\varphi) + \dots$$

und für die Coëfficienten in ihr die Ausdrücke

$$3.\quad \begin{cases} \overset{0}{\Delta} = (1-\mathrm{dnc}\,a).\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,a, \\ \overset{1}{\Delta} = \frac{1}{2}.\frac{1}{\mathrm{snc}^2 a}(1-\frac{1}{2}k^2\mathrm{snc}^2 a - \mathrm{dnc}\,a).\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,a, \\ \overset{2}{\Delta} = \frac{1.3}{2.4}.\frac{1}{\mathrm{snc}^4 a}\left(1-\frac{1}{2}k^2\mathrm{snc}^2 a - \frac{1}{2.4}k^4\mathrm{snc}^4 a - \mathrm{dnc}\,a\right).\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,a, \\ \overset{3}{\Delta} = \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{1}{\mathrm{snc}^6 a}\left(1-\frac{1}{2}k^2\mathrm{snc}^2 a - \frac{1}{2.4}k^4\mathrm{snc}^4 a \right. \\ \qquad\qquad \left. - \frac{1.3}{2.4.6}k^6\mathrm{snc}^6 a - \mathrm{dnc}\,a\right).\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,a, \\ \overset{4}{\Delta} = \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}.\frac{1}{\mathrm{snc}^8 a}\left(1-\frac{1}{2}k^2\mathrm{snc}^2 a - \frac{1}{2.4}k^4\mathrm{snc}^4 a - \frac{1.3}{2.4.6}k^6\mathrm{snc}^6 a \right. \\ \qquad\qquad \left. - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}k^8\mathrm{snc}^8 a - \mathrm{dnc}\,a\right).\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,a \\ \qquad\text{u. s. w.} \end{cases}$$

welche sich auch recurrirend berechnen lassen, nach den Formeln:

$$4.\quad \begin{cases} \overset{1}{\Delta} = \frac{1}{2}.\frac{\overset{0}{\Delta}}{\mathrm{snc}^2 a} - \frac{1^2}{2^2}k^2.\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,a, \\ \overset{2}{\Delta} = \frac{3}{4}.\frac{\overset{1}{\Delta}}{\mathrm{snc}^2 a} - \frac{1^2.3}{2^2.4^2}k^4.\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,a, \\ \overset{3}{\Delta} = \frac{5}{6}.\frac{\overset{2}{\Delta}}{\mathrm{snc}^2 a} - \frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6^2}k^6.\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,a, \\ \overset{4}{\Delta} = \frac{7}{8}.\frac{\overset{3}{\Delta}}{\mathrm{snc}^2 a} - \frac{1^2.3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2.8^2}k^8\,\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,a \\ \qquad\text{u. s. w.} \end{cases}$$

Durch eine neue Umordnung verwandelt sich die Reihe (2.) in

$$5.\quad '\mathfrak{D}(u,a) = \psi + \Delta.\varphi - (\Delta - \overset{0}{\Delta})\sin\varphi\cos\varphi - \frac{2}{3}(\Delta - \overset{0}{\Delta} - \overset{1}{\Delta})\sin^3\varphi\cos\varphi$$
$$- \frac{2.4}{3.5}(\Delta - \overset{0}{\Delta} - \overset{1}{\Delta} - \overset{2}{\Delta})\sin^5\varphi\cos\varphi - \frac{2.4.6}{3.5.7}(\Delta - \overset{0}{\Delta} - \overset{1}{\Delta} - \overset{2}{\Delta} - \overset{3}{\Delta})\sin^7\varphi\cos\varphi - \dots$$

und das Anfangsglied ψ ist wieder bestimmt durch die Formel

$$\mathfrak{Tang}\,\psi = \frac{\mathrm{tang}\,\varphi}{\mathrm{tnc}\,a}.$$

§. 257.

Reihe für das Integral $\mathfrak{S}(u, a)$.

Wird immer $\operatorname{am} u = \phi$ gesetzt, so ist

$$\mathfrak{S}(u, a) = \int_0 \frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \sin^2 \varphi . \partial \varphi}{(1-k^2 \operatorname{sn}^2 a \sin^2 \varphi)\sqrt{(1-k^2 \sin^2 \varphi)}}.$$

Es muſs nun jedes Glied der Reihe

$$\frac{1}{\sqrt{(1-k^2 \sin^2 \varphi)}} = 1 + \tfrac{1}{2} k^2 \sin^2 \phi + \frac{1.3}{2.4} k^4 \sin^4 \phi + \frac{1.3.5}{2.4.6} k^6 \sin^6 \phi + \ldots.$$

mit $\frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \sin^2 \varphi . \partial \varphi}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \sin^2 \varphi}$ multiplicirt und integrirt werden. Setzen wir jetzt

$$1. \quad \operatorname{tang} \psi = \operatorname{dn} a . \operatorname{tang} \phi,$$

so findet sich $\partial \psi = \frac{\operatorname{dn} a . \partial \varphi}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 a \sin^2 \varphi}$, also rückwärts $\frac{\partial \varphi}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 a \sin^2 \varphi} = \frac{\partial \psi}{\operatorname{dn} a}$. Ferner ist

$$\int_0 \frac{\sin^{2r+2} \varphi . \partial \varphi}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 a \sin^2 \varphi} = \frac{1}{k^2 \operatorname{sn}^2 a} . \int_0 \frac{\sin^{2r} \varphi . \partial \varphi}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 a \sin^2 \varphi} - \frac{1}{k^2 \operatorname{sn}^2 a} . \int_0 \sin^{2r} \phi . \partial \phi.$$

Setzen wir nun

$$\int_0 \frac{\sin^{2r} \varphi . \partial \varphi}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 a \sin^2 \varphi} = \frac{1}{k^{2r} \operatorname{sn}^{2r} a} . \Phi_r,$$

so verwandelt sich die vorige Relation in

$$\Phi_{r+1} = \Phi_r - \frac{1.3.5 \ldots (2r-1)}{2.4.6 \ldots (2r)} . (k \operatorname{sn} a)^{2r} . \lambda^r(\phi)$$

und ihr gemäſs findet man

$$2. \quad \begin{cases} \Phi_1 = \frac{\psi}{\operatorname{dn} a} - \phi, \\ \Phi_2 = \frac{\psi}{\operatorname{dn} a} - \phi - \frac{1}{2}(k \operatorname{sn} a)^2 . \lambda^1(\phi), \\ \Phi_3 = \frac{\psi}{\operatorname{dn} a} - \phi - \frac{1}{2}(k \operatorname{sn} a)^2 . \lambda^1(\phi) - \frac{1.3}{2.4}(k \operatorname{sn} a)^4 \lambda^2(\phi), \\ \Phi_4 = \frac{\psi}{\operatorname{dn} a} - \phi - \frac{1}{2}(k \operatorname{sn} a)^2 . \lambda^1(\phi) - \frac{1.3}{2.4}(k \operatorname{sn} a)^4 . \lambda^2(\phi) \\ \qquad\qquad - \frac{1.3.5}{2.4.6}(k \operatorname{sn} a)^6 . \lambda^3(\phi), \\ \Phi_5 = \frac{\psi}{\operatorname{dn} a} - \phi - \frac{1}{2}(k \operatorname{sn} a)^2 . \lambda^1(\phi) - \frac{1.3}{2.4}(k \operatorname{sn} a)^4 . \lambda^2(\phi) \\ \qquad\qquad - \frac{1.3.5}{2.4.6}(k \operatorname{sn} a)^6 . \lambda^3(\phi) - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}(k \operatorname{sn} a)^8 . \lambda^4(\phi) \end{cases}$$

u. s. w.

Mit Beziehung auf diese Werthe haben wir die Reihe

$$3.\quad \mathfrak{S}(u,a)=\frac{\operatorname{dn}a}{\operatorname{tn}a}\Big(\Phi_1+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\Phi_2}{\operatorname{sn}^2a}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\Phi_3}{\operatorname{sn}^4a}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{\Phi_4}{\operatorname{sn}^6a}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{\Phi_5}{\operatorname{sn}^8a}+\ldots\Big),$$

welche, da sich die Gröſsen Φ_1, $\frac{\Phi_2}{\operatorname{sn}^2a}$, $\frac{\Phi_3}{\operatorname{sn}^4a}$, $\frac{\Phi_4}{\operatorname{sn}^6a}$ etc. rasch der Grenze Null nähern, sehr schnell convergirt, aber nicht weiter auf ähnliche Art wie vorhin umgeformt werden kann, so lange der Parameter a reell ist, weil die dabei sich ergebenden unendlichen Reihen divergiren und, wenn man sie summirt, imaginäre Summen gefunden werden.

§. 258.

Reihen für die Integrale $\mathfrak{E}(u,a)$ und $\mathfrak{D}(u,a)$.

Aus der Reihe für $\mathfrak{S}(u,a)$ läſst sich die Reihe für $\mathfrak{E}(u,a)$ herleiten, da $\mathfrak{E}(u,a)=k^2\operatorname{sn}a\operatorname{snc}a.u-\mathfrak{S}(u,a)$, oder auch, wegen $\frac{\operatorname{dn}a}{\operatorname{tn}a}\cdot\frac{k^2\operatorname{sn}^2a}{\operatorname{dn}^2a}=k^2\operatorname{sn}a\operatorname{snc}a$,

$$\mathfrak{E}(u,a)=$$
$$\frac{\operatorname{dn}a}{\operatorname{tn}a}\Big[\frac{k^2\operatorname{sn}^2a}{\operatorname{dn}^2a}\cdot\phi+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{\operatorname{sn}^2a}\Big(\tfrac{1}{2}\cdot\frac{k^4\operatorname{sn}^4a}{\operatorname{dn}^2a}\Big)\lambda^1(\phi)+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{\operatorname{sn}^4a}\Big(\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{k^6\operatorname{sn}^6a}{\operatorname{dn}^2a}\lambda^2(\phi)\Big)+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{\operatorname{sn}^6a}\Big(\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{k^8\operatorname{sn}^8a}{\operatorname{dn}^2a}\lambda^3(\phi)\Big)+\ldots\Big]-\mathfrak{S}(u,a)$$

ist. Wird die vorhin gefundene Reihe für $\mathfrak{S}(u,a)$ substituirt, so erhält man, wenn man zur Abkürzung

$$1.\quad\begin{cases}\Phi_1=-\frac{\psi}{\operatorname{dn}a}+\frac{\varphi}{\operatorname{dn}^2a},\\ \Phi_2=-\frac{\psi}{\operatorname{dn}a}+\phi+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{(k\operatorname{sn}a)^2}{\operatorname{dn}^2a}.\lambda^1(\phi),\\ \Phi_3=-\frac{\psi}{\operatorname{dn}a}+\phi+\tfrac{1}{2}(k\operatorname{sn}a)^2.\lambda^1(\phi)+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{(k\operatorname{sn}a)^4}{\operatorname{dn}^2a}.\lambda^2(\phi),\\ \Phi_4=-\frac{\psi}{\operatorname{dn}a}+\phi+\tfrac{1}{2}(k\operatorname{sn}a)^2.\lambda^1(\phi)+\frac{1.3}{2.4}(k\operatorname{sn}a)^4.\lambda^2(\phi)+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{(k\operatorname{sn}a)^6}{\operatorname{dn}^2a}.\lambda^3(\phi)\\ \text{u. s. w.}\end{cases}$$

setzt, die rasch convergirende Reihe

$$2.\quad \mathfrak{E}(u,a)=\frac{\operatorname{dn}a}{\operatorname{tn}a}\Big(\Phi_1+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\Phi_2}{\operatorname{sn}^2a}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\Phi_3}{\operatorname{sn}^4a}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{\Phi_4}{\operatorname{sn}^6a}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{\Phi_5}{\operatorname{sn}^8a}+\ldots\Big)$$

in welcher die Coëfficienten recurrirend berechnet werden nach den Formeln

$$3.\quad\begin{cases}\Phi_2 = \Phi_1 - \dfrac{k^2\,\mathrm{sn}^2 a}{\mathrm{dn}^2 a}(\phi - \tfrac{1}{2}\lambda^1(\phi)),\\ \Phi_3 = \Phi_2 - \dfrac{k^4\,\mathrm{sn}^4 a}{\mathrm{dn}^2 a}\left(\tfrac{1}{2}\lambda^1(\phi) - \dfrac{1.3}{2.4}\lambda^2(\phi)\right),\\ \Phi_4 = \Phi_3 - \dfrac{k^6\,\mathrm{sn}^6 a}{\mathrm{dn}^2 a}\left(\dfrac{1.3}{2.4}\lambda^2(\phi) - \dfrac{1.3.5}{2.4.6}\lambda^3(\phi)\right),\\ \Phi_5 = \Phi_4 - \dfrac{k^8\,\mathrm{sn}^8 a}{\mathrm{dn}^2 a}\left(\dfrac{1.3.5}{2.4.6}\lambda^3(\phi) - \dfrac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\lambda^4(\phi)\right)\\ \qquad\text{u. s. w.}\end{cases}$$

Es ist das Integral $\mathfrak{D}(u,a) = \int_0 \frac{\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,.\,\partial\varphi\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\sin^2\varphi}$, also mufs nun jedes Glied der Reihe $\sqrt{(1-k^2\sin^2\phi)} = 1 - \frac{1}{2}k^2\sin^2\phi - \frac{1}{2.4}k^4\sin^4\phi - \frac{1.3}{2.4.6}k^6\sin^6\phi - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}k^8\sin^8\phi - \ldots$ mit $\frac{\mathrm{tn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,.\,\partial\varphi}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\sin^2\varphi}$ multiplicirt und integrirt werden, wodurch man die Reihe

$$4.\quad \mathfrak{D}(u,a) = \frac{\mathrm{sn}\,a}{\mathrm{snc}\,a}\left(\frac{\psi}{\mathrm{dn}\,a} - \frac{1}{2}.\frac{\Phi_1}{\mathrm{sn}^2 a} - \frac{1}{2.4}.\frac{\Phi_2}{\mathrm{sn}^4 a} - \frac{1.3}{2.4.6}.\frac{\Phi_3}{\mathrm{sn}^6 a} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}.\frac{\Phi_4}{\mathrm{sn}^8 a} - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}.\frac{\Phi_5}{\mathrm{sn}^{10} a} - \ldots\right)$$

erhält, in welcher die Functionen $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$ etc. dieselben sind, wie in §. 257.

Setzt man in der Reihe (4.) ka statt a, ku statt u und $\frac{1}{k}$ statt des Moduls k, wodurch sich $\mathrm{am}\,u = \phi$ in $\mathrm{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = \phi'$ verwandelt, so verwandelt sich $\mathfrak{D}(u,a)$ in $\mathfrak{C}(u,a)$.

Setzt man also wieder $\mathrm{am}\,u = \phi$,

$$5.\quad\begin{cases}\sin\phi' = k.\sin\phi \quad\text{und}\\ \mathrm{tang}\,\psi' = \mathrm{cn}\,a.\mathrm{tang}\,\phi' = \dfrac{k}{k'}\mathrm{cn}\,a.\mathrm{cnc}\,u = \dfrac{k\,\mathrm{cn}\,a\,.\sin\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}};\end{cases}$$

ferner

$$6.\quad\begin{cases}\Phi_1 = \dfrac{\psi'}{\mathrm{cn}\,a} - \phi',\\ \Phi_2 = \dfrac{\psi'}{\mathrm{cn}\,a} - \phi' - \tfrac{1}{2}\mathrm{sn}^2 a.\lambda^1(\phi'),\\ \Phi_3 = \dfrac{\psi'}{\mathrm{cn}\,a} - \phi' - \tfrac{1}{2}\mathrm{sn}^2 a.\lambda^1(\phi') - \dfrac{1.3}{2.4}\mathrm{sn}^4 a.\lambda^2(\phi'),\\ \Phi_4 = \dfrac{\psi'}{\mathrm{cn}\,a} - \phi' - \tfrac{1}{2}\mathrm{sn}^2 a.\lambda^1(\phi') - \dfrac{1.3}{2.4}\mathrm{sn}^4 a.\lambda^2(\phi') - \dfrac{1.3.5}{2.4.6}\mathrm{sn}^6 a\lambda^3(\phi')\\ \qquad\text{u. s. w.}\end{cases}$$

so ist, mit Beziehung auf diese Werthe:

$$7.\quad \mathfrak{C}(u,a) = k\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{snc}\,a\Big(\frac{\psi'}{\mathrm{cn}\,a} - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\Phi_1}{(k\,\mathrm{sn}\,a)^2} - \frac{1}{2.4}\cdot\frac{\Phi_2}{(k\,\mathrm{sn}\,a)^4} - \frac{1.3}{2.4.6}\cdot\frac{\Phi_3}{(k\,\mathrm{sn}\,a)^6} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}\cdot\frac{\Phi_4}{(k\,\mathrm{sn}\,a)^8} - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}\cdot\frac{\Phi_5}{(k\,\mathrm{sn}\,a)^{10}} - \dots\Big).$$

§. 259.

Reihen für das Integral $S(u, a)$.

Setzen wir in den Formeln §. 257. ai statt a, so erhalten wir zunächst

$$1.\quad \mathrm{tang}\,\psi = \frac{\mathrm{tang}\,\varphi}{\mathrm{snc}'\,a},$$

wenn wieder $\mathrm{am}\,u = \varphi$ gesetzt wird, und es ist jetzt also $\psi > \varphi$. Die Gröſsen Φ_1, Φ_2, Φ_3 etc. werden nun abwechselnd negativ und positiv. Setzen wir daher überhaupt $(-1)^r.\Phi_r$ statt Φ_r, so erhalten wir

$$2.\quad \begin{cases} -\Phi_1 = \psi.\mathrm{snc}'a - \varphi, \\ +\Phi_2 = \psi.\mathrm{snc}'a - \varphi + \tfrac{1}{2}.\dfrac{\lambda^1(\varphi)}{\mathrm{tnc}'^2 a}, \\ -\Phi_3 = \psi.\mathrm{snc}'a - \varphi + \tfrac{1}{2}.\dfrac{\lambda^1(\varphi)}{\mathrm{tnc}'^2 a} - \dfrac{1.3}{2.4}.\dfrac{\lambda^2(\varphi)}{\mathrm{tnc}'^4 a}, \\ +\Phi_4 = \psi.\mathrm{snc}'a - \varphi + \tfrac{1}{2}.\dfrac{\lambda^1(\varphi)}{\mathrm{tnc}'^2 a} - \dfrac{1.3}{2.4}.\dfrac{\lambda^2(\varphi)}{\mathrm{tnc}'^4 a} + \dfrac{1.3.5}{2.4.6}.\dfrac{\lambda^3(\varphi)}{\mathrm{tnc}'^6 a}, \\ -\Phi_5 = \psi.\mathrm{snc}'a - \varphi + \tfrac{1}{2}.\dfrac{\lambda^1(\varphi)}{\mathrm{tnc}'^2 a} - \dfrac{1.3}{2.4}.\dfrac{\lambda^2(\varphi)}{\mathrm{tnc}'^4 a} + \dfrac{1.3.5}{2.4.6}.\dfrac{\lambda^3(\varphi)}{\mathrm{tnc}'^6 a} - \dfrac{1.3.5.7}{2.4.6.8}.\dfrac{\lambda^4(\varphi)}{\mathrm{tnc}'^8 a} \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

und mit Beziehung auf diese Werthe verwandelt sich die Reihe (3.) in

$$3.\quad S(u,a) = \frac{1}{\mathrm{sn}'a\ \mathrm{snc}'a}\Big(\Phi_1 + \tfrac{1}{6}.\frac{\Phi_2}{\mathrm{tn}'^2 a} + \frac{1.3}{2.4}.\frac{\Phi_3}{\mathrm{tn}'^4 a} + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{\Phi_4}{\mathrm{tn}'^6 a} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}.\frac{\Phi_5}{\mathrm{tn}'^8 a} + \dots\Big)$$

Es läſst sich diese Reihe noch auf eine zweckmäſsige Weise umformen. Setzt man die Werthe für Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4, ..., so erhält ψ den Coëfficienten

$$-\frac{1}{\mathrm{sn}'a}\Big(1 - \tfrac{1}{2}.\frac{1}{\mathrm{tn}'^2 a} + \frac{1.3}{2.4}.\frac{1}{\mathrm{tn}'^4 a} - \frac{1.3}{2.4.6}.\frac{1}{\mathrm{tn}'^6 a} + - \dots\Big)$$
$$= \frac{-1}{\mathrm{sn}'a}.\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{\mathrm{tn}'^2 a}\right)}} = -1:$$

daher erhält die umgeformte Reihe die Form

4. $S(u,a) = -\psi + \overset{0}{\varDelta}.\varPhi + \overset{1}{\varDelta}.\lambda^1(\varPhi) + \overset{2}{\varDelta}.\lambda^2(\varPhi) + \overset{3}{\varDelta}.\lambda^3(\varPhi) + \overset{4}{\varDelta}.\lambda^4(\varPhi) + \ldots$

und für die darin enthaltenen Coëfficienten $\overset{0}{\varDelta}, \overset{1}{\varDelta}, \overset{2}{\varDelta}, \ldots.$ haben wir nun die Ausdrücke

$$5.\quad \begin{cases} \overset{0}{\varDelta} = \dfrac{1}{\mathrm{sn}'a}, \\ \overset{1}{\varDelta} = -\frac{1}{2}.\dfrac{1}{\mathrm{tnc}'^2 a}(\mathrm{sn}'a - 1).\dfrac{1}{\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a}, \\ \overset{2}{\varDelta} = \dfrac{1.3}{2.4}.\dfrac{1}{\mathrm{tnc}'^4 a}\left(\mathrm{sn}'a - 1 + \frac{1}{2}.\dfrac{1}{\mathrm{tn}'^2 a}\right).\dfrac{1}{\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a}, \\ \overset{3}{\varDelta} = -\dfrac{1.3.5}{2.4.6}.\dfrac{1}{\mathrm{tnc}'^6 a}\left(\mathrm{sn}'a - 1 + \frac{1}{2}.\dfrac{1}{\mathrm{tn}'^2 a} - \dfrac{1.3}{2.4}.\dfrac{1}{\mathrm{tn}'^4 a}\right).\dfrac{1}{\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a}, \\ \overset{4}{\varDelta} = \dfrac{1.3.5.7}{2.4.6.8}.\dfrac{1}{\mathrm{tnc}'^8 a}\left(\mathrm{sn}'a - 1 + \frac{1}{2}.\dfrac{1}{\mathrm{tn}'^2 a} - \dfrac{1.3}{2.4}.\dfrac{1}{\mathrm{tn}'^4 a} \right. \\ \qquad\qquad \left. + \dfrac{1.3.5}{2.4.6}.\dfrac{1}{\mathrm{tn}'^6 a}\right).\dfrac{1}{\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a} \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Setzen wir daher wieder $\varDelta = \overset{0}{\varDelta} + \overset{1}{\varDelta} + \overset{2}{\varDelta} + \overset{3}{\varDelta} + \ldots.$, so haben wir auch noch

$$6.\quad S(u,a) = -\psi + \varDelta.\varPhi - (\varDelta - \overset{0}{\varDelta})\sin\varPhi\cos\varPhi - \tfrac{2}{3}(\varDelta - \overset{0}{\varDelta} - \overset{1}{\varDelta})\sin^3\varPhi\cos\varPhi$$
$$-\frac{2.4}{3.5}(\varDelta - \overset{0}{\varDelta} - \overset{1}{\varDelta} - \overset{2}{\varDelta})\sin^5\varPhi\cos\varPhi - \frac{2.4.6}{3.5.7}(\varDelta - \overset{0}{\varDelta} - \overset{1}{\varDelta} - \overset{2}{\varDelta} - \overset{3}{\varDelta}).\sin^7\varPhi\cos\varPhi - \ldots.$$

§. 260.

Reihen für das Integral $C(u, a)$.

Setzen wir auch in den sich auf $\mathfrak{C}(u, a)$ beziehenden Formeln §. 258. jetzt ai statt a, so erhalten wir wieder

$$1.\quad \tang\psi = \frac{\tang\varphi}{\mathrm{snc}'a},$$

und setzen wir nun

$$2.\quad \begin{cases} \varPhi_1 = \psi.\mathrm{snc}'a - \varPhi.\mathrm{snc}'^2 a, \\ \varPhi_2 = \psi.\mathrm{snc}'a - \varPhi + \frac{1}{2}.\dfrac{\mathrm{snc}'^2 a}{\mathrm{tnc}'^2 a}\lambda^1(\varPhi), \\ \varPhi_3 = \psi.\mathrm{snc}'a - \varPhi + \frac{1}{2}.\dfrac{\lambda^1(\varphi)}{\mathrm{tnc}'^2 a} - \dfrac{1.3}{2.4}.\dfrac{\mathrm{snc}'^2 a}{\mathrm{tnc}'^2 a}.\lambda^2(\varPhi), \\ \varPhi_4 = \psi.\mathrm{snc}'a - \varPhi + \frac{1}{2}.\dfrac{\lambda^1(\varphi)}{\mathrm{tnc}'^2 a} - \dfrac{1.3}{2.4}.\dfrac{\lambda^2(\varphi)}{\mathrm{tnc}'^4 a} + \dfrac{1.3.5}{2.4.6}.\dfrac{\mathrm{snc}'^2 a}{\mathrm{tnc}'^2 a}.\lambda^3(\varPhi), \\ \varPhi_5 = \psi.\mathrm{snc}'a - \varPhi + \frac{1}{2}.\dfrac{\lambda^1(\varphi)}{\mathrm{tnc}'^2 a} - \dfrac{\lambda^2(\varphi)}{\mathrm{tnc}'^4 a} + \dfrac{1.3.5}{2.4.6}.\dfrac{\lambda^3(\varphi)}{\mathrm{tnc}'^6 a} \\ \qquad\qquad - \dfrac{1.3.5.7}{2.4.6.8}.\dfrac{\mathrm{snc}'^2 a}{\mathrm{tnc}'^8 a}.\lambda^4(\varPhi) \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

so haben wir die Reihe

$$3.\quad C(u,a) =$$

$$\frac{1}{\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a}\left(\Phi_1 - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\Phi_2}{\mathrm{tn}'^2 a} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\Phi_3}{\mathrm{tn}'^4 a} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{\Phi_4}{\mathrm{tn}'^6 a} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{\Phi_5}{\mathrm{tn}'^8 a} - + \ldots\right).$$

Werden für Φ_1, Φ_2, Φ_3, ... die Ausdrücke selbst substituirt, so erhält man

$$4.\quad C(u,a) =$$

$$\psi + \overset{0}{\Delta}.\varphi + \overset{1}{\Delta}.\lambda^1(\varphi) + \overset{2}{\Delta}.\lambda^2(\varphi) + \overset{3}{\Delta}.\lambda^3(\varphi) + \overset{4}{\Delta}.\lambda^4(\varphi) + \overset{5}{\Delta}.\lambda^5(\varphi) + \ldots.$$

und für die Coëfficienten in dieser Reihe die Ausdrücke

$$5.\quad \begin{cases} \overset{0}{\Delta} = -(\mathrm{sn}'a - \mathrm{cnc}'^2 a)\cdot\dfrac{1}{\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a}, \\[2ex] \overset{1}{\Delta} = +\tfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\mathrm{tnc}'^2 a}\left(\mathrm{sn}'a - 1 + \tfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\mathrm{cnc}'^2 a}{\mathrm{tn}'^2 a}\right)\cdot\dfrac{1}{\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a}, \\[2ex] \overset{2}{\Delta} = -\dfrac{1.3}{2.4}\cdot\dfrac{1}{\mathrm{tnc}'^4 a}\left(\mathrm{sn}'a - 1 + \tfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\mathrm{tn}'^2 a} - \dfrac{1.3}{2.4}\cdot\dfrac{\mathrm{cnc}'^2 a}{\mathrm{tn}'^2 a}\right)\cdot\dfrac{1}{\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a}, \\[2ex] \overset{3}{\Delta} = +\dfrac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\dfrac{1}{\mathrm{tuc}'^6 a}\left(\mathrm{sn}'a - 1 + \tfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\mathrm{tn}'^2 a} - \dfrac{1.3}{2.4}\cdot\dfrac{1}{\mathrm{tn}'^4 a}\right. \\ \qquad\qquad\left. + \dfrac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\dfrac{\mathrm{cnc}'^2 a}{\mathrm{tn}'^6 a}\right)\cdot\dfrac{1}{\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a}, \\[2ex] \overset{4}{\Delta} = -\dfrac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\dfrac{1}{\mathrm{tnc}'^8 a}\left(\mathrm{sn}'a - 1 + \tfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\mathrm{tn}'^2 a} - \dfrac{1.3}{2.4}\cdot\dfrac{1}{\mathrm{tn}'^4 a}\right. \\ \qquad\qquad\left. + \dfrac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\dfrac{1}{\mathrm{tn}'^6 a} - \dfrac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\dfrac{\mathrm{cnc}'^2 a}{\mathrm{tn}'^8 a}\right)\cdot\dfrac{1}{\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a} \\[2ex] \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Durch eine neue Umordnung der Reihe (4.) verwandelt sich dieselbe in

$$6.\quad C(u,a) =$$

$$\begin{aligned} \psi + \Delta.\varphi - (\Delta - \overset{0}{\Delta})\sin\varphi\cos\varphi - \tfrac{2}{3}(\Delta - \overset{0}{\Delta} - \overset{1}{\Delta})\cdot\sin^3\varphi\cos\varphi \\ - \frac{2.4}{3.5}(\Delta - \overset{0}{\Delta} - \overset{1}{\Delta} - \overset{2}{\Delta})\cdot\sin^5\varphi\cos\varphi \\ - \frac{2.4.6}{3.5.7}(\Delta - \overset{0}{\Delta} - \overset{1}{\Delta} - \overset{2}{\Delta} - \overset{3}{\Delta})\cdot\sin^7\varphi\cos\varphi - \ldots, \end{aligned}$$

wenn wieder $\Delta = \overset{0}{\Delta} + \overset{1}{\Delta} + \overset{2}{\Delta} + \overset{3}{\Delta} +$ etc. genommen wird.

Wir erhalten eine noch etwas gleichmäfsiger fortschreitende Reihe für $C(u,a)$, wenn wir in den Formeln (5. 6. und 7. §. 258.) ebenfalls ai statt a setzen. Berechnen wir nun aus $\mathrm{am}\,u = \varphi$

$$7.\quad \sin\varphi' = k\sin\varphi,\quad \mathrm{tang}\,\psi' = \frac{\mathrm{tang}\,\varphi'}{\mathrm{cn}'a} = \frac{k\sin\varphi}{\mathrm{cn}'a\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}}$$

und noch die Gröfsen

$$8.\quad \begin{cases} -\Phi_1 = \psi'.\mathrm{cn}'a - \varphi', \\ +\Phi_2 = \psi'.\mathrm{cn}'a - \varphi' + \frac{1}{2}\mathrm{tn}'^2 a.\lambda^1(\varphi), \\ -\Phi_3 = \psi'.\mathrm{cn}'a - \varphi' + \frac{1}{2}\mathrm{tn}'^2 a.\lambda^1(\varphi') - \frac{1.3}{2.4}\mathrm{tn}'^4 a.\lambda^2(\varphi'), \\ +\Phi_4 = \psi'.\mathrm{cn}'a - \varphi' + \frac{1}{2}\mathrm{tn}'^2 a.\lambda^1(\varphi') - \frac{1.3}{2.4}\mathrm{tn}'^4 a.\lambda^2(\varphi') \\ \qquad\qquad + \frac{1.3.5}{2.4.6}\mathrm{tn}'^6 a.\lambda^3(\varphi'), \\ -\Phi_5 = \psi'.\mathrm{cn}'a - \varphi' + \frac{1}{2}\mathrm{tn}'^2 a.\lambda^1(\varphi') - \frac{1.3}{2.4}\mathrm{tn}'^6 a.\lambda^2(\varphi') \\ \qquad\qquad + \frac{1.3.5}{2.4.6}\mathrm{tn}'^6 a.\lambda^3(\varphi') - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\mathrm{tn}'^8 a.\lambda^4(\varphi') \\ \qquad \text{u. s. w.,} \end{cases}$$

so erhalten wir, mit Beziehung auf diese Werthe, zunächst die Reihe

$$9.\quad C(u,a) = \frac{\mathrm{cnc}'a}{\mathrm{cn}'a}\Big(\psi'.\mathrm{cn}'a - \tfrac{1}{2}.\mathrm{tnc}'^2 a.\Phi_1 - \frac{1}{2.4}\mathrm{tnc}'^4 a.\Phi_2 - \frac{1.3}{2.4.6}\mathrm{tnc}'^6 a.\Phi_3 - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}\mathrm{tnc}'^8 a.\Phi_4 - \dots\Big).$$

Werden die Ausdrücke (8.) selbst substituirt, so erhält ψ' den Coëfficienten

$$\mathrm{cnc}'a.\Big(1 + \tfrac{1}{2}\mathrm{tnc}'^2 a - \frac{1}{2.4}\mathrm{tnc}'^4 a + \frac{1.3}{2.4.6}\mathrm{tnc}'^6 a - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}\mathrm{tnc}'^8 a + - \dots\Big) = 1,$$

und die Reihe für $C(u, a)$ erhält überhaupt die Form

$$10.\quad C(u,a) = \psi' - \overset{0}{\varDelta}.\varphi' - \overset{1}{\varDelta}.\lambda^1(\varphi') - \overset{2}{\varDelta}.\lambda^2(\varphi') - \overset{3}{\varDelta}.\lambda^3(\varphi') - \overset{4}{\varDelta}.\lambda^4(\varphi') - \dots$$

Für die Coëfficienten in dieser Reihe finden sich folgende Werthe:

$$11.\quad \begin{cases} \overset{0}{\varDelta} = +\Big(\frac{1}{\mathrm{cnc}'a} - 1\Big).\frac{\mathrm{cnc}'a}{\mathrm{cn}'a}, \\ \overset{1}{\varDelta} = -\frac{1}{2}\mathrm{tn}'^2 a\Big(\frac{1}{\mathrm{cnc}'a} - 1 - \frac{1}{2}\mathrm{tnc}'^2 a\Big).\frac{\mathrm{cnc}'a}{\mathrm{cn}'a}, \\ \overset{2}{\varDelta} = +\frac{1.3}{2.4}\mathrm{tn}'^4 a\Big(\frac{1}{\mathrm{cnc}'a} - 1 - \frac{1}{2}\mathrm{tnc}'^2 a + \frac{1}{2.4}\mathrm{tnc}'^4 a\Big).\frac{\mathrm{cnc}'a}{\mathrm{cn}'a}, \\ \overset{3}{\varDelta} = -\frac{1.3.5}{2.4.6}\mathrm{tn}'^6 a\Big(\frac{1}{\mathrm{cnc}'a} - 1 - \frac{1}{2}\mathrm{tnc}'^2 a + \frac{1}{2.4}\mathrm{tnc}'^4 a - \frac{1.3}{2.4.6}\mathrm{tnc}'^6 a\Big).\frac{\mathrm{cnc}'a}{\mathrm{cn}'a}, \\ \overset{4}{\varDelta} = +\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\mathrm{tn}'^8 a\Big(\frac{1}{\mathrm{cnc}'a} - 1 - \frac{1}{2}\mathrm{tnc}'^2 a + \frac{1}{2.4}\mathrm{tnc}'^4 a - \frac{1.3}{2.4.6}\mathrm{tnc}'^6 a \\ \qquad\qquad + \frac{1.3.5}{2.4.6.8}\mathrm{tnc}'^8 a\Big).\frac{\mathrm{cnc}'a}{\mathrm{cn}'a} \\ \qquad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Auch hat man noch

$$12.\quad C(u,a) = \psi' - \varDelta.\varphi' + (\varDelta - \overset{0}{\varDelta})\sin\varphi'\cos\varphi' + \tfrac{2}{3}(\varDelta - \overset{0}{\varDelta} - \overset{1}{\varDelta})\sin^3\varphi'\cos\varphi'$$
$$+ \frac{2.4}{3.5}(\varDelta - \overset{0}{\varDelta} - \overset{1}{\varDelta} - \overset{2}{\varDelta})\sin^5\varphi'\cos\varphi' + \frac{2.4.6}{3.5.7}(\varDelta - \overset{0}{\varDelta} - \overset{1}{\varDelta} - \overset{2}{\varDelta} - \overset{3}{\varDelta}).\sin^7\varphi'\cos\varphi' + \dots,$$

wenn zur Abkürzung $\varDelta = \overset{0}{\varDelta} + \overset{1}{\varDelta} + \overset{2}{\varDelta} + \overset{3}{\varDelta} + \dots$ gesetzt wird. Indessen convergiren die Reihen (9. 10. 11.) nicht so rasch als die Reihen (3. 4. 6.).

§. 261.

Reihe für das Integral $D(u, a)$.

Da $\mathfrak{D}(u, ai) = i.D(u, a)$ ist, so erhält man, wenn man in der Reihe (4. §. 258.) ai statt a setzt, und aus $\operatorname{am} u = \varphi$,

$$1.\quad \operatorname{tang}\psi = \frac{\operatorname{tang}\varphi}{\operatorname{snc}' a}$$

und ferner

$$2.\quad \begin{cases} -\Phi_1 = \psi.\operatorname{snc}'a - \varphi, \\ \Phi_2 = \psi.\operatorname{snc}'a - \varphi + \frac{1}{2}.\frac{\lambda^1(\varphi)}{\operatorname{tnc}'^2 a}, \\ -\Phi_3 = \psi.\operatorname{snc}'a - \varphi + \frac{1}{2}.\frac{\lambda^1(\varphi)}{\operatorname{tnc}'^2 a} - \frac{1.3}{2.4}.\frac{\lambda^2(\varphi)}{\operatorname{tnc}'^4 a}, \\ \Phi_4 = \psi.\operatorname{snc}'a - \varphi + \frac{1}{2}.\frac{\lambda^1(\varphi)}{\operatorname{tnc}'^2 a} - \frac{1.3}{2.4}.\frac{\lambda^2(\varphi)}{\operatorname{tnc}'^4 a} + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{\lambda^3(\varphi)}{\operatorname{tnc}'^6 a}, \\ -\Phi_5 = \psi.\operatorname{snc}'a - \varphi + \frac{1}{2}.\frac{\lambda^1(\varphi)}{\operatorname{tnc}'^2 a} - \frac{1.3}{2.4}.\frac{\lambda^2(\varphi)}{\operatorname{tnc}'^4 a} + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{\lambda^3(\varphi)}{\operatorname{tnc}'^6 a} \\ \qquad\qquad - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}.\frac{\lambda^4(\varphi)}{\operatorname{tnc}'^8 a} \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

berechnet, die Reihe

$$3.\quad D(u, a) = \frac{\operatorname{sn}'a}{\operatorname{snc}'a}\Big(\psi.\operatorname{snc}'a - \frac{1}{2}.\frac{\Phi_1}{\operatorname{tn}'^2 a} - \frac{1}{2.4}.\frac{\Phi_2}{\operatorname{tn}'^4 a} - \frac{1.3}{2.4.6}.\frac{\Phi_3}{\operatorname{tn}'^6 a} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}.\frac{\Phi_4}{\operatorname{tn}'^8 a} - \dots\Big).$$

Werden für die Coëfficienten ihre Ausdrücke selbst substituirt, so entsteht eine Reihe, in welcher der Coëfficient von ψ

$$\operatorname{sn}'a\Big(1 + \tfrac{1}{2}.\frac{1}{\operatorname{tn}'^2 a} - \frac{1}{2.4}.\frac{1}{\operatorname{tn}'^4 a} + \frac{1.3}{2.4.6}.\frac{1}{\operatorname{tn}'^6 a} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}.\frac{1}{\operatorname{tn}'^8 a} + - \dots\Big) = 1$$

ist und welche also die Form

$$4.\quad D(u, a) = \psi - \overset{0}{\varDelta}.\varphi - \overset{1}{\varDelta}.\lambda^1(\varphi) - \overset{2}{\varDelta}.\lambda^2(\varphi) - \overset{3}{\varDelta}.\lambda^3(\varphi) - \overset{4}{\varDelta}.\lambda^4(\varphi) - \overset{5}{\varDelta}.\lambda$$

hat. Die Ausdrücke der Coëfficienten in dieser Reihe sind

$$5.\quad\begin{cases}\overset{0}{\varDelta} = +\left(\frac{1}{\mathrm{sn}'a}-1\right).\frac{\mathrm{sn}'a}{\mathrm{snc}'a},\\[4pt]
\overset{1}{\varDelta} = -\tfrac{1}{2}.\frac{1}{\mathrm{tnc}'^2 a}\left(\frac{1}{\mathrm{sn}'a}-1-\tfrac{1}{2}.\frac{1}{\mathrm{tn}'^2 a}\right).\frac{\mathrm{sn}'a}{\mathrm{snc}'a},\\[4pt]
\overset{2}{\varDelta} = +\frac{1.3}{2.4}.\frac{1}{\mathrm{tnc}'^4 a}\left(\frac{1}{\mathrm{sn}'a}-1-\tfrac{1}{2}.\frac{1}{\mathrm{tn}'^4 a}+\frac{1}{2.4}.\frac{1}{\mathrm{tn}'^4 a}\right).\frac{\mathrm{sn}'a}{\mathrm{snc}'a},\\[4pt]
\overset{3}{\varDelta} = -\frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{1}{\mathrm{tnc}'^6 a}\left(\frac{1}{\mathrm{sn}'a}-1-\tfrac{1}{2}.\frac{1}{\mathrm{tn}'^2 a}+\frac{1}{2.4}.\frac{1}{\mathrm{tn}'^4 a}\right.\\
\qquad\qquad\left.-\frac{1.3}{2.4.6}.\frac{1}{\mathrm{tn}'^6 a}\right).\frac{\mathrm{sn}'a}{\mathrm{snc}'a},\\[4pt]
\overset{4}{\varDelta} = +\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}.\frac{1}{\mathrm{tnc}'^8 a}\left(\frac{1}{\mathrm{sn}'a}-1-\tfrac{1}{2}.\frac{1}{\mathrm{tn}'^2 a}+\frac{1}{2.4}.\frac{1}{\mathrm{tn}'^4 a}\right.\\
\qquad\qquad\left.-\frac{1.3}{2.4.6}.\frac{1}{\mathrm{tn}'^6 a}+\frac{1.3.5}{2.4.6.8}.\frac{1}{\mathrm{tn}'^8 a}\right).\frac{\mathrm{sn}'a}{\mathrm{snc}'a}\\
\text{u. s. w.}\end{cases}$$

Durch eine neue Umordnung verwandelt sich die Reihe in

$$6.\quad D(u,a) = \psi-\varDelta.\varphi+(\varDelta-\overset{0}{\varDelta})\sin\varphi\cos\varphi+\tfrac{2}{3}(\varDelta-\overset{0}{\varDelta}-\overset{1}{\varDelta})\sin^3\varphi\cos\varphi$$
$$+\frac{2.4}{3.5}(\varDelta-\overset{0}{\varDelta}-\overset{1}{\varDelta}-\overset{2}{\varDelta})\sin^5\varphi\cos\varphi+\frac{2.4.6}{3.5.7}(\varDelta-\overset{0}{\varDelta}-\overset{1}{\varDelta}-\overset{2}{\varDelta}-\overset{3}{\varDelta})\sin^7\varphi\cos\varphi+\ldots,$$

wenn wieder $\varDelta$ die mehrfach erwähnte Bedeutung hat.

§. 262.

Reihen für das Integral $'S(u, a)$.

Setzt man nun auch in den Formeln §. 254. ai statt a, beachtend dafs $'\mathfrak{S}(u, ai) = i.'S(u, a)$ sei, so erhält man, wenn man zugleich ψi statt ψ setzt,

$$1.\quad \tan\psi = k'\,\mathrm{sn}'a.\tan\varphi.$$

Berechnet man ferner aus $\mathrm{am}\,u = \varphi$ die Gröfsen

$$2.\quad\begin{cases}\Phi_1 = \frac{\psi}{k'\,\mathrm{sn}'a}-\varphi,\\[4pt]
\Phi_2 = \frac{\psi}{k'\,\mathrm{sn}'a}-\varphi-\tfrac{1}{2}\,\mathrm{dn}'^2a.\lambda'(\varphi),\\[4pt]
\Phi_3 = \frac{\psi}{k'\,\mathrm{sn}'a}-\varphi-\tfrac{1}{2}\,\mathrm{dn}'^2a.\lambda'(\varphi)-\frac{1.3}{2.4}\,\mathrm{dn}'^4a.\lambda^2(\varphi),\\[4pt]
\Phi_4 = \frac{\psi}{k'\,\mathrm{sn}'a}-\varphi-\tfrac{1}{2}\,\mathrm{dn}'^2a.\lambda'(\varphi)-\frac{1.3}{2.4}\,\mathrm{dn}'^4a.\lambda^2(\varphi)-\frac{1.3.5}{2.4.6}\,\mathrm{dn}'^6a.\lambda^3(\varphi)\\
\text{u. s. w.,}\end{cases}$$

so hat man die Reihe

$$3.\quad {}'S(u,a) = k'^2 \operatorname{sn}' a \operatorname{snc}' a . \Big(\Phi_1 + \tfrac{1}{2}\operatorname{dnc}'^2 a . \Phi_2 + \frac{1.3}{2.4}\operatorname{dnc}'^4 a . \Phi_3 + \frac{1.3.5}{2.4.6} . \operatorname{dnc}'^6 a . \Phi_4 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\operatorname{dnc}'^8 a . \Phi_5 + \dots\Big).$$

Beachtet man nun, dafs $1 + \frac{1}{2}\operatorname{dnc}'^2 a + \frac{1.3}{2.4}\operatorname{dnc}'^4 a + \frac{1.3.5}{2.4.6}\operatorname{dnc}'^6 a + \dots = \frac{1}{k' \operatorname{snc}' a}$ ist, so läfst sich die vorige Reihe auch also darstellen:

$$4.\quad {}'S(u,a) = \psi - \overset{0}{\varDelta} . \varphi - \overset{1}{\varDelta} . \lambda^1(\varphi) - \overset{2}{\varDelta} . \lambda^2(\varphi) - \overset{3}{\varDelta} . \lambda^3(\varphi) - \overset{4}{\varDelta} . \lambda^4(\varphi) - \dots$$

und für die Coëfficienten in dieser neuen Reihe hat man die Ausdrücke,

$$5.\quad \begin{cases} \overset{0}{\varDelta} = k' \operatorname{sn}' a, \\ \overset{1}{\varDelta} = \tfrac{1}{2}\operatorname{dn}'^2 a \Big(\frac{1}{k' \operatorname{snc}' a} - 1\Big) . k'^2 \operatorname{sn}' a \operatorname{snc}' a, \\ \overset{2}{\varDelta} = \frac{1.3}{2.4}\operatorname{dn}'^4 a \Big(\frac{1}{k' \operatorname{snc}' a} - 1 - \tfrac{1}{2}\operatorname{dnc}'^2 a\Big) . k'^2 \operatorname{sn}' a \operatorname{snc}' a, \\ \overset{3}{\varDelta} = \frac{1.3.5}{2.4.6}\operatorname{dn}'^6 a \Big(\frac{1}{k' \operatorname{snc}' a} - 1 - \tfrac{1}{2}\operatorname{dnc}'^2 a - \frac{1.3}{2.4}\operatorname{dnc}'^4 a\Big) . k'^2 \operatorname{sn}' a \operatorname{snc}' a, \\ \overset{4}{\varDelta} = \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\operatorname{dn}'^8 a \Big(\frac{1}{k' \operatorname{snc}' a} - 1 - \tfrac{1}{2}\operatorname{dnc}'^2 a - \frac{1.3}{2.4}\operatorname{dnc}'^4 a - \frac{1.3.5}{2.4.6}\operatorname{dnc}'^6 a\Big) . k'^2 \operatorname{sn}' a \operatorname{snc}' a \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Durch eine neue Umordnung verwandelt sich die Reihe (4.) in

$$6.\quad {}'S(u,a) = \psi - \varDelta . \varphi + (\varDelta - \overset{0}{\varDelta}) \sin\varphi \cos\varphi + \tfrac{2}{3}(\varDelta - \overset{0}{\varDelta} - \overset{1}{\varDelta}) \sin^3\varphi \cos\varphi + \frac{2.4}{3.5}(\varDelta - \overset{0}{\varDelta} - \overset{1}{\varDelta} - \overset{2}{\varDelta}) \sin^5\varphi \cos\varphi + \frac{2.4.6}{3.5.7}(\varDelta - \overset{0}{\varDelta} - \overset{1}{\varDelta} - \overset{2}{\varDelta} - \overset{3}{\varDelta}) \sin^7\varphi \cos\varphi + \dots$$

§. 263.

Reihen für das Integral ${}'C(u,a)$.

Setzen wir in den Formeln §. 255. ai statt a und ψi statt ψ, so erhalten wir die sich auf den Ausdruck von ${}'C(u,a)$ beziehenden Reihen. Berechnen wir aus $\varphi = \operatorname{am} u$ zunächst

$$1.\quad \operatorname{tang}\psi = k' \operatorname{sn}' a . \operatorname{tang}\varphi,$$

und dann weiter

$$2.\quad \begin{cases} \Phi_1 = \frac{\psi}{k' \operatorname{sn}' a} - \varphi, \\ \Phi_2 = \frac{\psi}{k' \operatorname{sn}' a} - \varphi - \tfrac{1}{2}\operatorname{dn}'^2 a . \lambda^1(\varphi), \\ \Phi_3 = \frac{\psi}{k' \operatorname{sn}' a} - \varphi - \tfrac{1}{2}\operatorname{dn}'^2 a . \lambda^1(\varphi) - \frac{1.3}{2.4} . \operatorname{dn}'^4 a . \lambda^2(\varphi), \\ \Phi_4 = \frac{\psi}{k' \operatorname{sn}' a} - \varphi - \tfrac{1}{2}\operatorname{dn}'^2 a . \lambda^1(\varphi) - \frac{1.3}{2.4} . \operatorname{dn}'^4 a . \lambda^2(\varphi) - \frac{1.3.5}{2.4.6} . \operatorname{dn}'^6 a . \lambda^3(\varphi) \\ \text{u. s. w.,} \end{cases}$$

so haben wir sofort die Reihe

$$3.\quad {}'C(u,a) = k'\,\mathrm{snc}'a.\psi + k'^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a\Big(\tfrac{1}{2}\mathrm{dnc}'^2a.\Phi_1 + \frac{1.3}{2.4}\mathrm{dnc}'^4a.\Phi_2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\mathrm{dnc}'^6a.\Phi_3 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\mathrm{dnc}'^8a.\Phi_4 + \ldots\Big).$$

Die nächste Umordnung der Glieder giebt die Reihe

$$4.\quad {}'C(u,a) = \psi - \overset{0}{\varDelta}.\varphi - \overset{1}{\varDelta}.\lambda^1(\varphi) - \overset{2}{\varDelta}.\lambda^2(\varphi) - \overset{3}{\varDelta}.\lambda^3(\varphi) - \overset{4}{\varDelta}.\lambda^4(\varphi) - \ldots$$

und die Coëfficienten in ihr sind

$$5.\quad \begin{cases} \overset{0}{\varDelta} = \Big(\dfrac{1}{k'\,\mathrm{snc}'a} - 1\Big).k'^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a, \\ \overset{1}{\varDelta} = \tfrac{1}{2}\mathrm{dn}'^2a.\Big(\dfrac{1}{k'\,\mathrm{snc}'a} - 1 - \tfrac{1}{2}\mathrm{dnc}'^2a\Big).k'^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a, \\ \overset{2}{\varDelta} = \dfrac{1.3}{2.4}\mathrm{dn}'^4a.\Big(\dfrac{1}{k'\,\mathrm{snc}'a} - 1 - \tfrac{1}{2}\mathrm{dnc}'^2a - \dfrac{1.3}{2.4}\mathrm{dnc}'^4a\Big).k'^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a, \\ \overset{3}{\varDelta} = \dfrac{1.3.5}{2.4.6}\mathrm{dn}'^6a.\Big(\dfrac{1}{k'\,\mathrm{snc}'a} - 1 - \tfrac{1}{2}\mathrm{dnc}'^2a - \dfrac{1.3}{2.4}\mathrm{dnc}'^4a \\ \qquad\qquad - \dfrac{1.3.5}{2.4.6}\mathrm{dnc}'^6a\Big).k'^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a, \\ \qquad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

und eine weitere Umordnung giebt

$$6.\quad C(u,a) = \psi - \varDelta.\varphi + (\varDelta - \overset{0}{\varDelta})\sin\varphi\cos\varphi + \tfrac{2}{3}(\varDelta - \overset{0}{\varDelta} - \overset{1}{\varDelta})\sin^3\varphi\cos\varphi + \frac{2.4}{3.5}(\varDelta - \overset{0}{\varDelta} - \overset{1}{\varDelta} - \overset{2}{\varDelta})\sin^5\varphi\cos\varphi + \frac{2.4.6}{3.5.7}(\varDelta - \overset{0}{\varDelta} - \overset{1}{\varDelta} - \overset{2}{\varDelta} - \overset{3}{\varDelta})\sin^7\varphi\cos\varphi + \ldots$$

§. 264.

Reihen für das Integral $'D(u,a)$.

Um die Reihen für das Integral $'D(u,a)$ zu erhalten, hat man in den Formeln §. 256. ai statt a und ψi statt ψ zu setzen. Man berechne also aus $\varphi = \mathrm{am}\,u$

$$1.\quad \mathrm{tang}\,\psi = k'\,\mathrm{sn}'a.\mathrm{tang}\,\varphi;$$

ferner wie in §. 262., die Gröfsen

$$2.\quad \begin{cases} \Phi_1 = \dfrac{\psi}{k'\,\mathrm{sn}'a} - \varphi, \\ \Phi_2 = \dfrac{\psi}{k'\,\mathrm{sn}'a} - \varphi - \tfrac{1}{2}\mathrm{dn}'^2a.\lambda^1(\varphi), \\ \Phi_3 = \dfrac{\psi}{k'\,\mathrm{sn}'a} - \varphi - \tfrac{1}{2}\mathrm{dn}'^2a.\lambda^1(\varphi) - \dfrac{1.3}{2.4}\mathrm{dn}'^4a.\lambda^2(\varphi), \\ \Phi_4 = \dfrac{\psi}{k'\,\mathrm{sn}'a} - \varphi - \tfrac{1}{2}\mathrm{dn}'^2a.\lambda^1(\varphi) - \dfrac{1.3}{2.4}\mathrm{dn}'^4a.\lambda^2(\varphi) - \dfrac{1.3.5}{2.4.6}\mathrm{dn}'^6a.\lambda^3(\varphi) \\ \qquad \text{u. s. w.,} \end{cases}$$

so ist

$$3.\quad {}'D(u,a) = \frac{\psi}{k'\,\mathrm{snc}'a} - \frac{\mathrm{sn}'a}{\mathrm{snc}'a}\Big(\tfrac{1}{2}\,\mathrm{dnc}'^2 a.\Phi_1 + \frac{1}{2.4}\mathrm{dnc}'^4 a.\Phi_2 + \frac{1.3}{2.4.6}\mathrm{dnc}'^6 a.\Phi_3 + \frac{1.3.5}{2.4.6.8}\mathrm{dnc}'^8 a.\Phi_4 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}\mathrm{dnc}'^{10} a.\Phi_5 + \ldots\Big).$$

Diese Reihe verwandelt sich in

$$4.\quad {}'D(u,a) = \psi + \overset{0}{\Delta}.\varphi + \overset{1}{\Delta}.\lambda^1(\varphi) + \overset{2}{\Delta}.\lambda^2(\varphi) + \overset{3}{\Delta}.\lambda^3(\varphi) + \overset{4}{\Delta}.\lambda^4(\varphi) + \ldots$$

und die Ausdrücke der Coëfficienten sind

$$5.\quad \begin{cases} \overset{0}{\Delta} = (1-k'\,\mathrm{snc}'a).\dfrac{\mathrm{sn}'a}{\mathrm{snc}'a}, \\ \overset{1}{\Delta} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{dn}'^2 a(1-\tfrac{1}{2}\,\mathrm{dnc}'^2 a - k'\,\mathrm{snc}'a).\dfrac{\mathrm{sn}'a}{\mathrm{snc}'a}, \\ \overset{2}{\Delta} = \dfrac{1.3}{2.4}\mathrm{dn}'^4 a\Big(1-\tfrac{1}{2}\,\mathrm{dnc}'^2 a - \dfrac{1}{2.4}\mathrm{dnc}'^4 a - k'\,\mathrm{snc}'a\Big).\dfrac{\mathrm{sn}'a}{\mathrm{snc}'a}, \\ \overset{3}{\Delta} = \dfrac{1.3.5}{2.4.6}\mathrm{dn}'^6 a\Big(1-\tfrac{1}{2}\,\mathrm{dnc}'^2 a - \dfrac{1}{2.4}\mathrm{dnc}'^4 a - \dfrac{1.3}{2.4.6}\mathrm{dnc}'^6 a - k'\,\mathrm{snc}'a\Big).\dfrac{\mathrm{sn}'a}{\mathrm{snc}'a} \\ \qquad\text{u. s. w.} \end{cases}$$

Die weitere Umordnung giebt

$$6.\quad {}'D(u,a) = \psi + \Delta.\varphi - (\Delta - \overset{0}{\Delta})\sin\varphi\cos\varphi - \tfrac{2}{3}(\Delta-\overset{0}{\Delta}-\overset{1}{\Delta})\sin^3\varphi\cos\varphi - \frac{2.4}{3.5}(\Delta-\overset{0}{\Delta}-\overset{1}{\Delta}-\overset{2}{\Delta})\sin^5\varphi\cos\varphi - \frac{2.4.6}{3.5.7}(\Delta-\overset{0}{\Delta}-\overset{1}{\Delta}-\overset{2}{\Delta}-\overset{3}{\Delta})\sin^7\varphi\cos\varphi - \ldots$$

Anmerkung. Alle vorhin entwickelten Reihen, mit Ausnahme der Reihen (9. 10. 12. §. 260.) convergiren desto rascher, je kleiner der Modul k ist; indessen convergiren sie doch für jeden zwischen den Grenzen 0 und 1 enthaltenen Modul k, für jeden Parameter a und für jede Amplitude $\varphi = \mathrm{am}\,u$.

Da nach §. 133.

$$-S(u,a) + {}'D(u,a) = C(u,a) + {}'C(u,a) = D(u,a) + {}'S(u,a) = \mathrm{arc\,tang}\Big(\frac{\mathrm{sn}'a}{\mathrm{snc}'a}.\frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{snc}\,u}\Big)$$

ist, so lassen sich die Integrale erster Classe auf die dritter, und umgekehrt diese auf jene zurückführen; was nach den Formeln §. 120. auch noch leichter von Statten geht.

§. 265.

Andere Reihen für die Integrale $S(u,a)$, $C(u,a)$, $D(u,a)$.

Setzen wir in den Formeln §. 262. $K'-a$ statt a, $K-u$ statt u und $\frac{1}{2}\pi-\psi$ statt ψ, so erhalten wir

$$1. \quad \operatorname{tang}\psi = \frac{\operatorname{tn} u}{\operatorname{snc}' a},$$

und berechnen wir noch

$$2. \begin{cases} \overset{0}{\varDelta} = k' \operatorname{snc}' a, \\ \overset{1}{\varDelta} = \frac{1}{2} \operatorname{dnc}'^2 a \left(\frac{1}{k' \operatorname{sn}' a} - 1\right) . k'^2 \operatorname{sn}' a \operatorname{snc}' a, \\ \overset{2}{\varDelta} = \frac{1.3}{2.4} \operatorname{dnc}'^4 a \left(\frac{1}{k' \operatorname{sn}' a} - 1 - \frac{1}{2} \operatorname{dn}'^2 a\right) . k'^2 \operatorname{sn}' a \operatorname{snc}' a \\ \overset{3}{\varDelta} = \frac{1.3.5}{2.4.6} \operatorname{dnc}'^6 a \left(\frac{1}{k' \operatorname{sn}' a} - 1 - \frac{1}{2} \operatorname{dn}'^2 a - \frac{1.3}{2.4} \operatorname{dn}'^4 a\right) . k'^2 \operatorname{sn}' a \operatorname{snc}' a, \\ \overset{4}{\varDelta} = \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} \operatorname{dnc}'^8 a \left(\frac{1}{k' \operatorname{sn}' a} - 1 - \frac{1}{2} \operatorname{dn}'^2 a - \frac{1.3}{2.4} \operatorname{dn}'^4 a \right. \\ \qquad \left. - \frac{1.3.5}{2.4.6} \operatorname{dn}'^6 a\right) . k'^2 \operatorname{sn}' a \operatorname{snc}' a \\ \qquad \text{u. s. w.,} \end{cases}$$

so haben wir zunächst

$$'S(K-u, K'-a)$$
$$= \tfrac{1}{2}\pi - \psi - \overset{0}{\varDelta} . \operatorname{amc} u - \overset{1}{\varDelta} . \lambda^1(\operatorname{amc} u) - \overset{2}{\varDelta} . \lambda^2(\operatorname{amc} u) - \overset{3}{\varDelta} . \lambda^3(\operatorname{amc} u) - \ldots.$$

und also für $u = 0$

$$'S(K, K'-a) = \tfrac{1}{2}\pi - \overset{0}{\varDelta} . \tfrac{1}{2}\pi - \overset{1}{\varDelta} . \tfrac{1}{2}\pi - \overset{2}{\varDelta} . \tfrac{1}{2}\pi - \overset{3}{\varDelta} . \tfrac{1}{2}\pi \ldots. = \tfrac{1}{2}\pi - \varDelta . \tfrac{1}{2}\pi.$$

Da nun aber nach §. 120. $'S(K, K'-a) - 'S(K-u, K'-a) = C(u, a)$ ist, so ist

$$3. \begin{cases} C(u,a) = \psi - \overset{0}{\varDelta}(\tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{amc} u) - \overset{1}{\varDelta}(\tfrac{1}{2}\pi - \lambda^1(\operatorname{amc} u)) - \overset{2}{\varDelta}(\tfrac{1}{2}\pi - \lambda^2(\operatorname{amc} u)) \\ \qquad - \overset{3}{\varDelta}(\tfrac{1}{2}\pi - \lambda^3(\operatorname{amc} u)) \ldots. \quad \text{oder} \\ C(u,a) = \psi - \varDelta . \tfrac{1}{2}\pi + \overset{0}{\varDelta} . \operatorname{amc} u + \overset{1}{\varDelta} . \lambda^1(\operatorname{amc} u) + \overset{2}{\varDelta} . \lambda^2(\operatorname{amc} u) \\ \qquad + \overset{3}{\varDelta} . \lambda^3(\operatorname{amc} u) + \overset{4}{\varDelta} . \lambda^4(\operatorname{amc} u) + \ldots. \end{cases}$$

und es können diese Reihen auf die bekannte Weise noch umgeordnet werden. Die zweite Reihe convergirt im allgemeinen rascher als die erste. Setzt man nun $\frac{1}{2}\pi - \operatorname{amc} u = \varPhi$, so haben wir

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{amc} u &= \varPhi, \\ \tfrac{1}{2}\pi - \lambda^1(\operatorname{amc} u) &= \varPhi + \cos\varPhi \sin\varPhi, \\ \tfrac{1}{2}\pi - \lambda^2(\operatorname{amc} u) &= \varPhi + \cos\varPhi \sin\varPhi + \tfrac{2}{3}\cos^3\varPhi \sin\varPhi, \\ \tfrac{1}{2}\pi - \lambda^3(\operatorname{amc} u) &= \varPhi + \cos\varPhi \sin\varPhi + \tfrac{2}{3}\cos^3\varPhi \sin\varPhi + \frac{2.4}{3.5}\cos^5\varPhi \sin\varPhi, \\ \tfrac{1}{2}\pi - \lambda^4(\operatorname{amc} u) &= \varPhi + \cos\varPhi \sin\varPhi + \tfrac{2}{3}\cos^3\varPhi \sin\varPhi + \frac{2.4}{3.5}\cos^5\varPhi \sin\varPhi \\ &\quad + \frac{2.4.6}{3.5.7}\cos^7\varPhi \sin\varPhi, \end{aligned}$$

Die Werthe dieser auf einander folgenden Ausdrücke nähern sich der Grenze $\frac{1}{2}\pi$; die Coëfficienten $\lambda^1(\text{amc}\,u)$, $\lambda^2(\text{amc}\,u)$, $\lambda^3(\text{amc}\,u)$ etc. hingegen nähern sich der Grenze Null, und zwar desto rascher, je gröfser u, d. h. je kleiner $\text{amc}\,u$ ist.

Berechnen wir aber, indem wir in den Formeln §. 263. $K'-a$ statt a und $K'-u$ statt u setzen, nach einander die Gröfsen

$$4.\quad\begin{cases}\overset{0}{\varDelta}=\left(\frac{1}{k'\,\text{sn}'a}-1\right).k'^2\,\text{sn}'a\,\text{snc}'a,\\ \overset{1}{\varDelta}=\frac{1}{2}\text{dnc}'^2a\left(\frac{1}{k'\,\text{sn}'a}-1-\frac{1}{2}\text{dn}'^2a\right).k'^2\,\text{sn}'a\,\text{snc}'a,\\ \overset{2}{\varDelta}=\frac{1.3}{2.4}\text{dnc}'^4a\left(\frac{1}{k'\,\text{sn}'a}-1-\frac{1}{2}\text{dn}'^2a-\frac{1.3}{2.4}\text{dn}'^4a\right).k'^2\,\text{sn}'a\,\text{snc}'a,\\ \overset{3}{\varDelta}=\frac{1.3.5}{2.4.6}\text{dnc}'^6a\left(\frac{1}{k'\,\text{sn}'a}-1-\frac{1}{2}\text{dn}'^2a-\frac{1.3}{2.4}\text{dn}'^4a\right.\\ \qquad\qquad\left.-\frac{1.3.5}{2.4.6}\text{dn}'^6a\right).k'^2\,\text{sn}'a\,\text{snc}'a\\ \qquad\text{u. s. w.,}\end{cases}$$

so ist

$$'C(K-u,K'-a)=\tfrac{1}{2}\pi-\psi-\overset{0}{\varDelta}.\text{amc}\,u-\overset{1}{\varDelta}.\lambda'(\text{amc}\,u)-\overset{2}{\varDelta}.\lambda^2(\text{amc}\,u)-\ldots.$$

und

$$'C(K,K'-a)=\tfrac{1}{2}\pi-\overset{0}{\varDelta}.\tfrac{1}{2}\pi-\overset{1}{\varDelta}.\tfrac{1}{2}\pi-\overset{2}{\varDelta}.\tfrac{1}{2}\pi-\ldots.=\tfrac{1}{2}\pi-\varDelta.\tfrac{1}{2}\pi.$$

Da ferner $'C(K,K'-a)-'C(K-u,K'-a)=D(u,a)$ ist, so haben wir, mit Beziehung auf die Ausdrücke (4.), die Reihe

$$5.\quad\begin{cases}D(u,a)=\psi-\overset{0}{\varDelta}.(\tfrac{1}{2}\pi-\text{amc}\,u)-\overset{1}{\varDelta}.(\tfrac{1}{2}\pi-\lambda^1(\text{amc}\,u))-\overset{2}{\varDelta}.(\tfrac{1}{2}\pi-\lambda^2(\text{amc}\,u))\\ \qquad-\overset{3}{\varDelta}.(\tfrac{1}{2}\pi-\lambda^3(\text{amc}\,u))-\ldots.\ \text{oder}\\ D(u,a)=\psi-\varDelta.\tfrac{1}{2}\pi+\overset{0}{\varDelta}.\text{amc}\,u+\overset{1}{\varDelta}.\lambda^1(\text{amc}\,u)+\overset{2}{\varDelta}.\lambda^2(\text{amc}\,u)\\ \qquad+\overset{3}{\varDelta}.\lambda^3(\text{amc}\,u)+\ldots.\end{cases}$$

Eine Reihe für $S(u,a)$ giebt die Formel

$$'D(u,K'-a)-S(K-u,a)=\frac{u}{\text{sn}'a\,\text{snc}'a}-S(K,a),$$

welche sich, da $'D(u,K'-a)-'C(u,K'-a)=\frac{\text{dn}'a}{\text{tn}'a}.u$ ist, umformen läfst in

$$'C(u,K'-a)-S(K-u,a)=\frac{\text{sn}'a}{\text{snc}'a}.u-S(K,a).$$

Hieraus folgt $S(K,a)-S(u,a)=\frac{\text{sn}'a}{\text{snc}'a}.(K-u)-'C(K-u,K'-a)$; es ist aber $\frac{\text{sn}'a}{\text{snc}'a}=(k'^2\,\text{sn}'a\,\text{snc}'a).\frac{1}{k'^2\,\text{snc}'a}$, also

$$\frac{\mathrm{sn}'a}{\mathrm{snc}'a}(K-u) = \left(\frac{\mathrm{amc}\,u}{k'^2\,\mathrm{snc}'^2 a} + \tfrac{1}{2}\mathrm{dnc}'^2 a . \tfrac{1}{2}\mathrm{dn}'^2 a . \frac{\lambda^1(\mathrm{amc}\,u)}{k'^2\,\mathrm{snc}'^2 a}\right.$$
$$\left. + \frac{1.3}{2.4}\mathrm{dnc}'^4 a . \frac{1.3}{2.4}\mathrm{dn}'^4 a . \frac{\lambda^2(\mathrm{amc}\,u)}{k'^2\,\mathrm{snc}'^2 a} \ldots\right) k'^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{sn}'a.$$

Setzt man daher

$$6. \begin{cases} \overset{0}{\varDelta} = \left(\frac{1}{k'\,\mathrm{sn}'a} - \frac{\mathrm{dnc}'^2 a}{k'^2\,\mathrm{snc}'^2 a}\right).k'^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a, \\ \overset{1}{\varDelta} = \tfrac{1}{2}.\mathrm{dnc}'^2 a\left(\frac{1}{k'\,\mathrm{sn}'a} - 1 - \tfrac{1}{2}.\frac{\mathrm{dn}'^2 a.\mathrm{dnc}'^2 a}{k'^2\,\mathrm{snc}'^2 a}\right).k'^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a, \\ \overset{2}{\varDelta} = \frac{1.3}{2.4}.\mathrm{dnc}'^4 a\left(\frac{1}{k'\,\mathrm{sn}'a} - 1 - \tfrac{1}{2}.\mathrm{dn}'^2 a - \frac{1.3}{2.4}.\frac{\mathrm{dn}'^4 a.\mathrm{dnc}'^2 a}{k'^2\,\mathrm{snc}'^2 a}\right).k'^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a, \\ \overset{3}{\varDelta} = \frac{1.3.5}{2.4.6}.\mathrm{dnc}'^6 a\left(\frac{1}{k'\,\mathrm{sn}'a} - 1 - \tfrac{1}{2}.\mathrm{dn}'^2 a - \frac{1.3}{2.4}.\mathrm{dn}'^4 a \right.\\ \qquad\qquad \left. - \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{\mathrm{dn}'^6 a.\mathrm{dnc}'^2 a}{k'^2\,\mathrm{snc}'^2 a}\right).k'^2\,\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a, \\ \text{u. s. w.,} \end{cases}$$

so hat man zunächst die Reihe

$$S(K,a) - S(u,a)$$
$$= -\tfrac{1}{2}\pi + \psi + \overset{0}{\varDelta}.\mathrm{amc}\,u + \overset{1}{\varDelta}.\lambda^1(\mathrm{amc}\,u) + \overset{2}{\varDelta}.\lambda^2(\mathrm{amc}\,u) + \ldots.$$

Setzt man hierin $u = 0$, so hat man

$$S(k,a) = -\tfrac{1}{2}\pi + \overset{0}{\varDelta}.\tfrac{1}{2}\pi + \overset{1}{\varDelta}.\tfrac{1}{2}\pi + \overset{2}{\varDelta}.\tfrac{1}{2}\pi + \ldots. = -\tfrac{1}{2}\pi + \varDelta.\tfrac{1}{2}\pi;$$

und wird hiervon die vorige Reihe subtrahirt, so hat man endlich

$$7. \begin{cases} S(u,a) = -\psi + \overset{0}{\varDelta}(\tfrac{1}{2}\pi - \mathrm{amc}\,u) + \overset{1}{\varDelta}(\tfrac{1}{2}\pi - \lambda^1(\mathrm{amc}\,u)) + \overset{2}{\varDelta}((\tfrac{1}{2}\pi - \lambda^2(\mathrm{amc}\,u)) \\ \qquad + \overset{3}{\varDelta}(\tfrac{1}{2}\pi - \lambda^3(\mathrm{amc}\,u)) + \overset{4}{\varDelta}(\tfrac{1}{2}\pi - \lambda^4(\mathrm{amc}\,u)) + \ldots. \quad \text{oder} \\ S(u,a) = -\psi + \varDelta.\tfrac{1}{2}\pi - \overset{0}{\varDelta}.\mathrm{amc}\,u - \overset{1}{\varDelta}.\lambda^1(\mathrm{amc}\,u) - \overset{2}{\varDelta}.\lambda^2(\mathrm{amc}\,u) - \ldots \\ \qquad - \overset{3}{\varDelta}.\lambda^3(\mathrm{amc}\,u) - \ldots \end{cases}$$

§. 266.

Andere Reihen für die Integrale $'S(u,a)$, $'C(u,a)$, $'D(u,a)$.

Setzt man in den Formeln §. 260. $K'-a$ statt a, $K-u$ statt u und $\tfrac{1}{2}\pi - \psi$ statt ψ, so verwandelt sich die Gleichung $\mathrm{tang}\,\psi = \frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{snc}'a}$ in

$$1. \quad \mathrm{tang}\,\psi = k'\,\mathrm{sn}'a\,.\,\mathrm{tn}\,u.$$

Berechnet man aufserdem die Gröfsen

$$
2.\quad\begin{cases}
\overset{0}{\varDelta} = -(\mathrm{snc}'a - \mathrm{cn}'^2 a)\cdot\dfrac{1}{\mathrm{sn}'a\;\mathrm{snc}'a}, \\[2ex]
\overset{1}{\varDelta} = +\tfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\mathrm{tn}'^2 a}\left(\mathrm{snc}'a - 1 + \tfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\mathrm{cn}'^2 a}{\mathrm{tnc}'^2 a}\right)\cdot\dfrac{1}{\mathrm{sn}'a\;\mathrm{snc}'a}, \\[2ex]
\overset{2}{\varDelta} = -\dfrac{1.3}{2.4}\cdot\dfrac{1}{\mathrm{tn}'^4 a}\left(\mathrm{snc}'a - 1 + \tfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\mathrm{tnc}'^2 a} - \dfrac{1.3}{2.4}\cdot\dfrac{\mathrm{cn}'^2 a}{\mathrm{tnc}'^4 a}\right)\cdot\dfrac{1}{\mathrm{sn}'a\;\mathrm{snc}'a}, \\[2ex]
\overset{3}{\varDelta} = +\dfrac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\dfrac{1}{\mathrm{tn}'^6 a}\left(\mathrm{snc}'a - 1 + \tfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\mathrm{tnc}'^2 a} - \dfrac{1.3}{2.4}\cdot\dfrac{1}{\mathrm{tnc}'^4 a}\right. \\
\qquad\qquad\left. + \dfrac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\dfrac{\mathrm{cn}'^2 a}{\mathrm{tnc}'^6 a}\right)\cdot\dfrac{1}{\mathrm{sn}'a\;\mathrm{snc}'a} \\[2ex]
\qquad\text{u. s. w.,}
\end{cases}
$$

so ist, §. 260 gemäfs,

$$C(K-u, K'-a) = \tfrac{1}{2}\pi - \psi + \overset{0}{\varDelta}.\mathrm{amc}\,u + \overset{1}{\varDelta}\lambda^1(\mathrm{amc}\,u) + \overset{2}{\varDelta}\lambda^2(\mathrm{amc}\,u) + \dots$$

und

$$C(K, K'-a) = \tfrac{1}{2}\pi + \overset{0}{\varDelta}.\tfrac{1}{2}\pi + \overset{1}{\varDelta}.\tfrac{1}{2}\pi + \overset{2}{\varDelta}.\tfrac{1}{2}\pi + \dots = \tfrac{1}{2}\pi + \varDelta.\tfrac{1}{2}\pi.$$

Da ferner $'S(u, a) = C(K, K'-a) - C(K-u, K'-a)$ ist, so haben wir die Reihe

$$
3.\quad\begin{cases}
'S(u, a) = \psi + \overset{0}{\varDelta}.(\tfrac{1}{2}\pi - \mathrm{amc}\,u) + \overset{1}{\varDelta}(\tfrac{1}{2}\pi - \lambda^1(\mathrm{amc}\,u)) \\
\qquad\qquad + \overset{2}{\varDelta}(\tfrac{1}{2}\pi - \lambda^2(\mathrm{amc}\,u)) + \overset{3}{\varDelta}(\tfrac{1}{2}\pi - \lambda^3(\mathrm{amc}\,u)) + \dots \quad \text{oder} \\
'S(u, a) = \psi + \varDelta\tfrac{1}{2}\pi - \overset{0}{\varDelta}.\mathrm{amc}\,u - \overset{1}{\varDelta}.\lambda^1(\mathrm{amc}\,u) - \overset{2}{\varDelta}.\lambda^2(\mathrm{amc}\,u) \\
\qquad\qquad - \overset{3}{\varDelta}.\lambda^3(\mathrm{amc}\,u) - \dots
\end{cases}
$$

Setzen wir auch in den Formeln §. 261. $K'-a$ statt a, $K-u$ statt u und $\frac{1}{2}\pi-\psi$ statt ψ, so ist wieder $\operatorname{tang}\psi = k'\mathrm{sn}'a.\mathrm{tn}\,u$. Berechnen wir ferner nach einander die Gröfsen

$$
4.\quad\begin{cases}
\overset{0}{\varDelta} = +\left(\dfrac{1}{\mathrm{snc}'a} - 1\right)\cdot\dfrac{\mathrm{snc}'a}{\mathrm{sn}'a}, \\[2ex]
\overset{1}{\varDelta} = -\tfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\mathrm{tn}'^2 a}\cdot\left(\dfrac{1}{\mathrm{snc}'a} - 1 - \tfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\mathrm{tnc}'^2 a}\right)\cdot\dfrac{\mathrm{snc}'a}{\mathrm{sn}'a}, \\[2ex]
\overset{2}{\varDelta} = +\dfrac{1.3}{2.4}\cdot\dfrac{1}{\mathrm{tn}'^4 a}\left(\dfrac{1}{\mathrm{snc}'a} - 1 - \tfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\mathrm{tnc}'^2 a} + \dfrac{1}{2.4}\cdot\dfrac{1}{\mathrm{tnc}'^4 a}\right)\cdot\dfrac{\mathrm{snc}'a}{\mathrm{sn}'a}, \\[2ex]
\overset{3}{\varDelta} = -\dfrac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\dfrac{1}{\mathrm{tn}'^6 a}\left(\dfrac{1}{\mathrm{snc}'a} - 1 - \tfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\mathrm{tnc}'^2 a} + \dfrac{1}{2.4}\cdot\dfrac{1}{\mathrm{tnc}'^4 a}\right. \\
\qquad\qquad\left. - \dfrac{1.3}{2.4.6}\cdot\dfrac{1}{\mathrm{tnc}'^6 a}\right)\cdot\dfrac{\mathrm{snc}'a}{\mathrm{sn}'a} \\[2ex]
\qquad\text{u. s. w.,}
\end{cases}
$$

so haben wir zunächst

$$D(K-u, K'-a) = \tfrac{1}{2}\pi - \psi - \overset{0}{\varDelta}.\mathrm{amc}\,u - \overset{1}{\varDelta}.\lambda^1(\mathrm{amc}\,u) - \overset{2}{\varDelta}.\lambda^2(\mathrm{amc}\,u) - \dots$$

und also

$$D(K, K'-a) = \tfrac{1}{2}\pi - \overset{0}{\Delta}.\tfrac{1}{2}\pi - \overset{1}{\Delta}.\tfrac{1}{2}\pi - \overset{2}{\Delta}.\tfrac{1}{2}\pi - \ldots. = \tfrac{1}{2}\pi - \Delta.\tfrac{1}{2}\pi.$$

Da ferner $'C(u,a) = D(K, K'-a) - D(K-u, K'-a)$ ist, so haben wir

$$5.\ \begin{cases} 'C(u,a) = \psi - \overset{0}{\Delta}(\tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{amc} u) - \overset{1}{\Delta}(\tfrac{1}{2}\pi - \lambda^1(\operatorname{amc} u)) - \overset{2}{\Delta}(\tfrac{1}{2}\pi - \lambda^2(\operatorname{amc} u)) \\ \qquad - \overset{3}{\Delta}(\tfrac{1}{2}\pi - \lambda^3(\operatorname{amc} u)) - \ldots. \quad \text{oder} \\ 'C(u,a) = \psi - \Delta\tfrac{1}{2}\pi + \overset{0}{\Delta}.\operatorname{amc} u + \overset{1}{\Delta}.\lambda^1(\operatorname{amc} u) + \overset{2}{\Delta}.\lambda^2(\operatorname{amc} u) \\ \qquad + \overset{3}{\Delta}.\lambda^3(\operatorname{amc} u) + \ldots. \end{cases}$$

Nach §. 120. ist $'D(K,a) - 'D(u,a) = \dfrac{K-u}{\operatorname{sn}'a \operatorname{snc}'a} - S(K-u, K'-a)$; ferner ist

$$\begin{aligned} K-u = \operatorname{amc} u &+ \left(-\tfrac{1}{2}.\frac{1}{\operatorname{tn}'^2 a}\right)\left(-\tfrac{1}{2}.\frac{1}{\operatorname{tnc}'^2 a}\right).\lambda'(\operatorname{amc} u) \\ &+ \left(\frac{1.3}{2.4}.\frac{1}{\operatorname{tn}'^4 a}\right)\left(\frac{1.3}{2.4}.\frac{1}{\operatorname{tnc}'^4 a}\right).\lambda^2(\operatorname{amc} u) \\ &+ \left(-\frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{1}{\operatorname{tn}'^6 a}\right)\left(-\frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{1}{\operatorname{tnc}'^6 a}\right).\lambda^3(\operatorname{amc} u) + \ldots; \end{aligned}$$

setzt man nun auch in der Reihe (4. §. 259.) $K'-a$ statt a, $K-u$ statt u und $\frac{1}{2}\pi - \psi$ statt ψ, so erhält man, wenn man

$$6.\ \begin{cases} \overset{0}{\Delta} = -(\operatorname{snc}'a - 1).\dfrac{1}{\operatorname{sn}'a \operatorname{snc}'a}, \\ \overset{1}{\Delta} = +\tfrac{1}{2}.\dfrac{1}{\operatorname{tn}'^2 a}\left(\operatorname{snc}'a - 1 + \tfrac{1}{2}.\dfrac{1}{\operatorname{tnc}'^2 a}\right).\dfrac{1}{\operatorname{sn}'a \operatorname{snc}'a}, \\ \overset{2}{\Delta} = -\dfrac{1.3}{2.4}.\dfrac{1}{\operatorname{tn}'^4 a}\left(\operatorname{snc}'a - 1 + \tfrac{1}{2}.\dfrac{1}{\operatorname{tnc}'^2 a} - \dfrac{1.3}{2.4}.\dfrac{1}{\operatorname{tnc}'^4 a}\right).\dfrac{1}{\operatorname{sn}'a \operatorname{snc}'a}, \\ \overset{3}{\Delta} = +\dfrac{1.3.5}{2.4.6}.\dfrac{1}{\operatorname{tn}'^6 a}\left(\operatorname{snc}'a - 1 + \tfrac{1}{2}.\dfrac{1}{\operatorname{tnc}'^2 a} - \dfrac{1.3}{2.4}.\dfrac{1}{\operatorname{tnc}'^4 a}\right. \\ \qquad\qquad \left. + \dfrac{1.3.5}{2.4.6}.\dfrac{1}{\operatorname{tnc}'^6 a}\right).\dfrac{1}{\operatorname{sn}'a \operatorname{snc}'a} \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

setzt, zunächst die Reihe

$$'D(K,a) - 'D(u,a) = \tfrac{1}{2}\pi - \psi + \overset{0}{\Delta}.\operatorname{amc} u + \overset{1}{\Delta}.\lambda^1(\operatorname{amc} u) + \overset{2}{\Delta}.\lambda^2(\operatorname{amc} u) + \ldots,$$

also $$'D(K,a) = \tfrac{1}{2}\pi + \overset{0}{\Delta}.\tfrac{1}{2}\pi + \overset{1}{\Delta}.\tfrac{1}{2}\pi + \overset{2}{\Delta}.\tfrac{1}{2}\pi + \ldots. = \tfrac{1}{2}\pi + \Delta.\tfrac{1}{2}\pi.$$

Wird hiervon die vorige Reihe subtrahirt, so erhält man endlich

$$7.\ \begin{cases} 'D(u,a) = \psi + \overset{0}{\Delta}(\tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{amc} u) + \overset{1}{\Delta}(\tfrac{1}{2}\pi - \lambda^1(\operatorname{amc} u)) + \overset{2}{\Delta}(\tfrac{1}{2}\pi - \lambda^2(\operatorname{amc} u)) \\ \qquad + \overset{3}{\Delta}(\tfrac{1}{2}\pi - \lambda^3(\operatorname{amc} u)) + \overset{4}{\Delta}(\tfrac{1}{2}\pi - \lambda^4(\operatorname{amc} u)) + \ldots., \quad \text{oder} \\ 'D(u,a) = \psi + \Delta.\tfrac{1}{2}\pi - \overset{0}{\Delta}.\operatorname{amc} u - \overset{1}{\Delta}.\lambda^1(\operatorname{amc} u) - \overset{2}{\Delta}.\lambda^2(\operatorname{amc} u) \\ \qquad - \overset{3}{\Delta}.\lambda^3(\operatorname{amc} u) - \ldots. \end{cases}$$

Die Reihen im §. 265., so wie auch die so eben entwickelten Reihen, können leicht umgeordnet werden. Setzt man $\varphi = \frac{1}{2}\pi - \mathrm{amc}\, u$, so hat man z. B.

$$'D(u,a) = \psi + \Delta.\varphi + (\Delta - \overset{0}{\Delta}).\cos\varphi \sin\varphi + \tfrac{2}{3}(\Delta - \overset{0}{\Delta} - \overset{1}{\Delta}).\cos^3\varphi \sin\varphi + \frac{2.4}{3.5}(\Delta - \overset{0}{\Delta} - \overset{1}{\Delta} - \overset{2}{\Delta})\cos^5\varphi \sin\varphi + \ldots.$$

und in dieser Reihe ist $\tang\psi = \mathrm{sn}'a.\tang\varphi$, da $\tang\varphi = \frac{1}{\mathrm{tnc}\, u} = k'\,\mathrm{tn}\, u$ ist.

Anmerkung. Setzt man in den vorstehenden Reihen k' statt a, $k'u$ statt u, und $\frac{ik}{k'}$ statt des Moduls k, also $\frac{1}{k'}$ statt des Moduls k', und beachtet, dafs

$$'S\left(k'u, k'a, \frac{ik}{k'}\right) = {}'S(u,a),$$
$$'C\left(k'u, k'a, \frac{ik}{k'}\right) = {}'D(u,a),$$
$$'D\left(k'u, k'a, \frac{ik}{k'}\right) = {}'C(u,a),$$
$$S\left(k'u, k'a, \frac{ik}{k'}\right) = -C(K,a) + C(K-u,a),$$
$$S\left(k'u, k'a, \frac{ik}{k'}\right) = -S(K,a) + S(K-u,a),$$
$$D\left(k'u, k'a, \frac{ik}{k'}\right) = +D(K,a) - D(K-u,a)$$

ist, so erhält man noch eben so viele neue Reihen, welche ebenfalls desto rascher convergiren, je kleiner der Modul k ist. Es schreiten diese Reihen nach Functionen der Amplituden $\frac{1}{2}\pi - \mathrm{amc}\, u$ und $\frac{1}{2}\pi - \mathrm{am}\, u$ fort, da sich jetzt $\mathrm{am}\, u$ in $\frac{1}{2}\pi - \mathrm{amc}\, u$ und $\mathrm{amc}\, u$ in $\frac{1}{2}\pi - \mathrm{am}\, u$ verwandelt. Setzt man endlich ai statt a und ui statt u, indem man zugleich den Modul mit dem conjugirten vertauscht, so erhält man Reihen, in welchen die Coëfficienten desto rascher convergiren, je gröfser der Modul k ist. Die vollständige Aufführung aller dieser Reihen hat keine Schwierigkeit, und aus diesem Grunde verzichten wir hier darauf. Wenn die zuletzt erwähnten Reihen eine leichte Anwendbarkeit haben sollen, so mufs die Tabelle der Werthe der Functionen $\lambda^1(\varphi)$, $\lambda^2(\varphi)$, $\lambda^3(\varphi)$, $\lambda^4(\varphi)$, ... auch auf imaginäre Werthe von φ ausgedehnt werden. Setzen wir aber allgemein

$$\lambda^r(\varphi i) = (-1)^r.i.\overset{1}{\lambda^r}(\varphi),$$

so haben wir die Werthe

$$\overset{1}{\lambda}{}^0(\varphi) = \varphi,$$
$$\overset{1}{\lambda}{}^1(\varphi) = \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\varphi - \varphi,$$
$$\overset{1}{\lambda}{}^2(\varphi) = \tfrac{2}{3}\operatorname{Sin}^3\varphi \operatorname{Cos}\varphi - \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\varphi + \varphi,$$
$$\overset{1}{\lambda}{}^3(\varphi) = \frac{2.4}{3.5}\operatorname{Sin}^5\varphi \operatorname{Cos}\varphi - \tfrac{2}{3}\operatorname{Sin}^3\varphi \operatorname{Cos}\varphi + \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\varphi - \varphi,$$
$$\overset{1}{\lambda}{}^4(\varphi) = \frac{2.4.6}{3.5.7}\operatorname{Sin}^7\varphi \operatorname{Cos}\varphi - \frac{2.4}{3.5}\operatorname{Sin}^5\varphi \operatorname{Cos}\varphi + \tfrac{2}{3}\operatorname{Sin}^3\varphi \operatorname{Cos}\varphi - \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\varphi + \varphi$$

u. s. w.

oder auch

$$\overset{1}{\lambda}{}^r\varphi = \frac{2.4.6\ldots.(2r)}{1.3.5\ldots.(2r-1)}.\int_0 \partial\varphi.\operatorname{Sin}^{2r}\varphi.$$

§. 267.

Reihen für die Integrale $\int_0 u\,\partial\,\mathrm{am}\,u$ und $\int_0 u\,\partial\,\mathrm{amc}\,u$.

Setzen wir zur Abkürzung

$$\overset{1}{a} = 1 + \frac{1^2}{2^2}k^2,$$
$$\overset{2}{a} = 1 + \frac{1^2}{2^2}k^2 + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}k^4,$$
$$\overset{3}{a} = 1 + \frac{1^2}{2^2}k^2 + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}k^4 + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}k^6,$$
$$\overset{4}{a} = 1 + \frac{1^2}{2^2}k^2 + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}k^4 + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}k^6 + \frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2}k^8$$

u. s. w.,

so ist $\frac{1}{\eta}$ oder $\frac{2K}{\pi}$ die Grenze der Gröfsen $\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a}, \overset{4}{a}, \ldots.$ und nach §. 107. ist

$$u = \frac{1}{\eta}.\mathrm{am}\,u - \left(\frac{1}{\eta} - 1\right)\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u - \tfrac{2}{3}\left(\frac{1}{\eta} - \overset{1}{a}\right)\mathrm{sn}^3 u\,\mathrm{cn}\,u - \frac{2.4}{3.5}\left(\frac{1}{\eta} - \overset{2}{a}\right)\mathrm{sn}^5 u\,\mathrm{cn}\,u - \frac{2.4.6}{3.5.7}\left(\frac{1}{\eta} - \overset{3}{a}\right)\mathrm{sn}^7 u\,\mathrm{cn}\,u - \ldots.$$

Wird diese Reihe mit $\partial\,\mathrm{am}\,u$ multiplicirt und integrirt, so erhält man

$$1.\quad \int_0 u\,\partial\,\mathrm{am}\,u$$

$$= \frac{1}{2\eta}.(\mathrm{am}\,u)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\eta} - 1\right)\mathrm{sn}^2 u - \frac{1}{4}.\frac{2}{3}\left(\frac{1}{\eta} - \overset{1}{a}\right)\mathrm{sn}^4 u - \frac{1}{6}.\frac{2.4}{3.5}\left(\frac{1}{\eta} - \overset{2}{a}\right)\mathrm{sn}^6 u - \frac{1}{8}.\frac{2.4.6}{3.5.7}\left(\frac{1}{\eta} - \overset{3}{a}\right)\mathrm{sn}^8 u - \frac{1}{10}.\frac{2.4.6.8}{3.5.7.9}.\left(\frac{1}{\eta} - \overset{4}{a}\right)\mathrm{sn}^{10} u - \ldots.$$

Setzt man in dieser Reihe $K-u$ statt u, so erhält man

$$2.\quad \int_0 u\,\partial\,\mathrm{amc}\,u$$

$$= K.\mathrm{amc}\,u - \frac{1}{2\eta}(\mathrm{amc}\,u)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\eta}-1\right)\mathrm{snc}^2 u + \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\left(\frac{1}{\eta}-\overset{1}{a}\right)\mathrm{snc}^4 u$$
$$+\frac{1}{6}\cdot\frac{2.4}{3.5}\left(\frac{1}{\eta}-\overset{2}{a}\right)\mathrm{snc}^6 u + \frac{1}{8}\cdot\frac{2.4.6}{3.5.7}\left(\frac{1}{\eta}-\overset{3}{a}\right)\mathrm{snc}^8 u + \ldots.$$

Vertauscht man in der Reihe für u die conjugirten Modul, indem man zugleich ui statt u setzt, so erhält man

$$u = \frac{1}{\eta'}.\mathfrak{L}\,\mathrm{am}\,u - \left(\frac{1}{\eta'}-1\right)\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{cn}\,u} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{\eta'}-\overset{1}{a}{}'\right)\frac{\mathrm{tn}^3 u}{\mathrm{cn}\,u} - \frac{2.4}{3.5}\left(\frac{1}{\eta'}-\overset{2}{a}{}'\right)\frac{\mathrm{tn}^5 u}{\mathrm{cn}\,u}$$
$$+\frac{2.4.6}{3.5.7}\left(\frac{1}{\eta'}-\overset{3}{a}{}'\right)\frac{\mathrm{tn}^7 u}{\mathrm{cn}\,u} - + \ldots.$$

und in dieser Reihe haben $\overset{1}{a}{}', \overset{2}{a}{}', \overset{3}{a}{}', \overset{4}{a}{}', \ldots.$ dieselbe Bedeutung, wie $\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a}, \overset{4}{a}, \ldots.$; nur dafs jene Gröfsen ebenso von dem Modul k' abhängen, wie diese von dem Modul k; auch ist $\frac{1}{\eta'} = \frac{2K}{\pi}$ und zugleich die Grenze, welcher sich die Gröfsen $\overset{1}{a}{}', \overset{2}{a}{}', \overset{3}{a}{}', \overset{4}{a}{}', \ldots.$ immer mehr nähern.

Soll auch diese Reihe mit $\partial\,\mathrm{am}\,u$ multiplicirt und integrirt werden, so haben wir zunächst das Integral

$$U = \int_0 \mathfrak{L}\,\mathrm{am}\,u.\partial\,\mathrm{am}\,u$$

in Betracht zu ziehen. Bekanntlich ist

$$\Phi = \mathfrak{Sin}\,\Phi\,\mathfrak{Cos}\,\Phi - \tfrac{2}{3}\mathfrak{Sin}^3\Phi\,\mathfrak{Cos}\,\Phi + \frac{2.4}{3.5}\mathfrak{Sin}^5\Phi\,\mathfrak{Cos}\,\Phi - \frac{2.4.6}{3.5.7}\mathfrak{Sin}^7\Phi\,\mathfrak{Cos}\,\Phi\ldots,$$

also

$$\mathfrak{L}\Phi = \frac{\mathrm{tang}\,\varphi}{\cos\varphi} - \frac{2}{3}\cdot\frac{\mathrm{tang}^3\varphi}{\cos\varphi} + \frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{\mathrm{tang}^5\varphi}{\cos\varphi} - \frac{2.4.6}{3.5.7}\cdot\frac{\mathrm{tang}^7\varphi}{\cos\varphi} + - \ldots.,$$

oder auch

$$\mathfrak{L}\,\mathrm{am}\,u = \frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{cn}\,u} - \frac{2}{3}\cdot\frac{\mathrm{tn}^3 u}{\mathrm{cn}\,u} + \frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{\mathrm{tn}^5 u}{\mathrm{cn}\,u} - \frac{2.4.6}{3.5.7}\cdot\frac{\mathrm{tn}^7 u}{\mathrm{cn}\,u} + - \ldots.$$

Diese Gleichung mufs mit $\partial\,\mathrm{am}\,u = \mathrm{dn}\,u.\partial\,u$ multiplicirt und dann integrirt werden. Es ist aber $\partial\,\mathfrak{L}\,\mathrm{am}\,u = \frac{\mathrm{dn}\,u.\partial\,u}{\mathrm{cn}\,u}$, und $\mathrm{tn}\,u = \mathfrak{Sin}(\mathfrak{L}\,\mathrm{am}\,u)$, also haben wir

$$U = \int_0 \mathfrak{Sin}\,\mathfrak{L}\,\mathrm{am}\,u.\partial\,\mathfrak{L}\,\mathrm{am}\,u - \frac{2}{3}\int_0 \mathfrak{Sin}^3\mathfrak{L}\,\mathrm{am}\,u.\partial\,\mathfrak{L}\,\mathrm{am}\,u$$
$$+\frac{2.4}{3.5}\int_0 \mathfrak{Sin}^5\mathfrak{L}\,\mathrm{am}\,u.\partial\,\mathfrak{L}\,\mathrm{am}\,u - + \ldots.$$

Setzt man nun der Kürze wegen

$$\overset{0}{\Phi} = \frac{1}{\operatorname{cn} u} - 1,$$

$$\overset{1}{\Phi} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\operatorname{tn}^2 u}{\operatorname{cn} u} - \frac{1}{\operatorname{cn} u} + 1,$$

$$\overset{2}{\Phi} = \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{\operatorname{tn}^4 u}{\operatorname{cn} u} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\operatorname{tn}^2 u}{\operatorname{cn} u} + \frac{1}{\operatorname{cn} u} - 1,$$

$$\overset{3}{\Phi} = \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{\operatorname{tn}^6 u}{\operatorname{cn} u} - \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{\operatorname{tn}^4 u}{\operatorname{cn} u} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\operatorname{tn}^2 u}{\operatorname{cn} u} - \frac{1}{\operatorname{cn} u} + 1,$$

$$\overset{4}{\Phi} = \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} \cdot \frac{\operatorname{tn}^8 u}{\operatorname{cn} u} - \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{\operatorname{tn}^6 u}{\operatorname{cn} u} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{\operatorname{tn}^4 u}{\operatorname{cn} u} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\operatorname{tn}^2 u}{\operatorname{cn} u} + \frac{1}{\operatorname{cn} u} - 1$$

u. s. w.,

so dafs überhaupt $\overset{n}{\Phi} = \frac{1.3.5\ldots.(2n-1)}{2.4.6\ldots.(2n)} \cdot \frac{\operatorname{tn}^{2n} u}{\operatorname{cn} u} - \overset{n-1}{\Phi}$ ist, so haben wir

$$\int_0 \mathfrak{Sin}\, \mathfrak{L} \operatorname{am} u . \partial \mathfrak{L} \operatorname{am} u = \int_0 \frac{\operatorname{tn} u}{\operatorname{cn} u} \partial \operatorname{am} u = \overset{0}{\Phi},$$

$$\int_0 \mathfrak{Sin}^3 \mathfrak{L} \operatorname{am} u . \partial \mathfrak{L} \operatorname{am} u = \int_0 \frac{\operatorname{tn}^3 u}{\operatorname{cn} u} \partial \operatorname{am} u = \frac{2}{3} \overset{1}{\Phi},$$

$$\int_0 \mathfrak{Sin}^5 \mathfrak{L} \operatorname{am} u . \partial \mathfrak{L} \operatorname{am} u = \int_0 \frac{\operatorname{tn}^5 u}{\operatorname{cn} u} \partial \operatorname{am} u = \frac{2.4}{3.5} \overset{2}{\Phi},$$

$$\int_0 \mathfrak{Sin}^7 \mathfrak{L} \operatorname{am} u . \partial \mathfrak{L} \operatorname{am} u = \int_0 \frac{\operatorname{tn}^7 u}{\operatorname{cn} u} \partial \operatorname{am} u = \frac{2.4.6}{3.5.7} \overset{3}{\Phi}$$

u. s. w.

Werden diese einfachen Formeln benutzt, so haben wir zunächst

$$3. \quad U = \overset{0}{\Phi} - \frac{2^2}{3^2} . \overset{1}{\Phi} + \frac{2^2.4^2}{3^2.5^2} . \overset{2}{\Phi} - \frac{2^2.4^2.6^2}{3^2.5^2.7^2} . \overset{3}{\Phi} + \frac{2^2.4^2.6^2.8^2}{3^2.5^2.7^2.9^2} . \overset{4}{\Phi} - + \ldots.$$

Wird nun die Reihe für u mit $\partial \operatorname{am} u$ multiplicirt und dann integrirt, so erhalten wir

$$4. \quad \int_0 u \,\partial \operatorname{am} u = U + \frac{1^2}{2^2} (U - \overset{0}{\Phi}) k'^2 + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2} \left(U - \overset{0}{\Phi} + \frac{2^2}{3^2} \overset{1}{\Phi}\right) k'^4$$
$$+ \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2} \left(U - \overset{1}{\Phi} + \frac{2^2}{3^2} \overset{1}{\Phi} - \frac{2^2.4^2}{3^2.5^2} \overset{2}{\Phi}\right) k'^6$$
$$+ \frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2} \left(U - \overset{0}{\Phi} + \frac{2^2}{3^2} \overset{1}{\Phi} - \frac{2^2.4^2}{3^2.5^2} \overset{2}{\Phi} + \frac{2^2.4^2.6^2}{3^2.5^2.7^2} \overset{3}{\Phi}\right) k'^8 \ldots.$$

und es kann diese Reihe auch wie folgt dargestellt werden:

$$5. \quad \int_0 u \,\partial \operatorname{am} u = \frac{1}{\eta'} . U - \left(\frac{1}{\eta'} - 1\right) . \overset{0}{\Phi} + \frac{2^2}{3^2} \left(\frac{1}{\eta'} - \overset{1}{a}'\right) . \overset{1}{\Phi} - \frac{2^2.4^2}{3^2.5^2} \left(\frac{1}{\eta'} - \overset{2}{a}'\right) . \overset{2}{\Phi}$$
$$+ \frac{2^2.4^2.6^2}{3^2.5^2.7^2} \left(\frac{1}{\eta'} - \overset{3}{a}'\right) . \overset{3}{\Phi} - \frac{2^2.4^2.6^2.8^2}{3^2.5^2.7^2.9^2} \left(\frac{1}{\eta'} - \overset{4}{a}'\right) . \overset{4}{\Phi} + - \ldots.$$

§. 268.

Die Function U kann auf mehre andere Arten entwickelt werden. Da nämlich $\mathfrak{L}\,\mathrm{am}\,u = \mathrm{sn}\,u + \frac{1}{3}\mathrm{sn}^3 u + \frac{1}{5}\mathrm{sn}^5 u + \frac{1}{7}\mathrm{sn}^7 u + \ldots.$ ist, so haben wir

$$U = 1 - \mathrm{cn}\,u + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\left(1 - \mathrm{cn}\,u - \frac{1}{2}\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{cn}\,u\right)$$
$$+ \frac{1}{5}\cdot\frac{2.4}{3.5}\left(1 - \mathrm{cn}\,u - \frac{1}{2}\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{cn}\,u - \frac{1.3}{2.4}\mathrm{sn}^4 u\,\mathrm{cn}\,u\right)$$
$$+ \frac{1}{7}\cdot\frac{2.4.6}{3.5.7}\left(1 - \mathrm{cn}\,u - \frac{1}{2}\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{cn}\,u - \frac{1.3}{2.4}\mathrm{sn}^4 u\,\mathrm{cn}\,u - \frac{1.3.5}{2.4.6}\mathrm{sn}^6 u\,\mathrm{cn}\,u\right)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Wird $\mathrm{am}\,u = \frac{1}{2}\pi$ gesetzt, so hat man

$$U = 1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{1}{5} + \frac{2.4.6}{3.5.7}\cdot\frac{1}{7} + \frac{2.4.6.8}{3.5.7.9}\cdot\frac{1}{9} + \ldots.$$

Multiplicirt man die Reihe

$$\mathfrak{L}\,\mathrm{am}\,u = 2(\sin\mathrm{am}\,u - \tfrac{1}{3}\sin 3\,\mathrm{am}\,u + \tfrac{1}{5}\sin 5\,\mathrm{am}\,u - \tfrac{1}{7}\sin 7\,\mathrm{am}\,u + - \ldots.)$$

mit $\partial\,\mathrm{am}\,u$, und integrirt, so erhält man

$$U = 2\Big[1 - \cos\mathrm{am}\,u - \frac{1}{3^2}(1 - \cos 3\,\mathrm{am}\,u) + \frac{1}{5^2}(1 - \cos 5\,\mathrm{am}\,u)$$
$$- \frac{1}{7^2}(1 - \cos 7\,\mathrm{am}\,u) + - \ldots.\Big]$$

und hieraus folgt für $\mathrm{am}\,u = \frac{1}{2}\pi$ der Werth

$$U = 2\left(1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} - + \ldots.\right).$$

Dieselbe Reihe wurde in **§. 220.** gefunden, und ihr Werth ist

$$\mu = 1{,}83193\ 11883\ 54438.$$

Nachdem dieser Werth bekannt geworden ist, kann die Reihe für U auch also dargestellt werden:

$$1.\quad U = \mu(1 - \mathrm{cn}\,u) - \frac{1}{2}(\mu - 1)\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{cn}\,u - \frac{1.3}{2.4}\left(\mu - 1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\right)\mathrm{sn}^4 u\,\mathrm{cn}\,u$$
$$- \frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\mu - 1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} - \frac{1}{5}\cdot\frac{2.4}{3.5}\right)\mathrm{sn}^6 u\,\mathrm{cn}\,u$$
$$- \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\left(\mu - 1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} - \frac{1}{5}\cdot\frac{2.4}{3.5} - \frac{1}{7}\cdot\frac{2.4.6}{3.5.7}\right)\mathrm{sn}^8 u\,\mathrm{cn}\,u$$
$$- \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\Big(\mu - 1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} - \frac{1}{5}\cdot\frac{2.4}{3.5} - \frac{1}{7}\cdot\frac{2.4.6}{3.5.7}$$
$$- \frac{1}{9}\cdot\frac{2.4.6.8}{3.5.7.9}\Big)\mathrm{sn}^{10} u\,\mathrm{cn}\,u - \ldots.$$

Hiernach kann der Werth des Integrals $U = \int_0 \mathfrak{L}\,\mathrm{am}\,u\,.\,\partial\,\mathrm{am}\,u$ oder $U = \int_0 \mathfrak{L}\varphi\,.\,\partial\varphi$ am bequemsten berechnet werden, da diese Reihe am raschesten convergirt.

Die zweite Reihe kann also dargestellt werden:

2. $U = \mu - 2\cos\varphi + \frac{2}{3^2}\cos 3\varphi - \frac{2}{5^2}\cos 5\varphi + \frac{2}{7^2}\cos 7\varphi - \frac{2}{9^2}\cos 9\varphi + - \ldots,$

wenn der Kürze wegen $\mathrm{am}\, u = \varphi$ gesetzt wird.

Da

$$\mathfrak{L}\varphi = \log\frac{1+\tang\frac{1}{2}\varphi}{1-\tang\frac{1}{2}\varphi} = 2(\tang\tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{3}\tang^3\tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{5}\tang^5\tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{7}\tang^7\tfrac{1}{2}\varphi + \ldots)$$

ist, so läfst sich das Integral U noch auf eine andere Art entwickeln. Es ist

$$\int_0 \tang^{n+1}\tfrac{1}{2}\varphi.\partial\varphi = \frac{2}{n}\tang^n\tfrac{1}{2}\varphi - \int_0 \tang^{n-1}\tfrac{1}{2}\varphi.\partial\varphi,$$

und da

$$\int_0 \tang\tfrac{1}{2}\varphi.\partial\varphi = \log\frac{2}{1+\cos\varphi} \text{ ist, so ist}$$

$$\int_0 \tang^3\tfrac{1}{2}\varphi.\partial\varphi = \tang^2\tfrac{1}{2}\varphi - \log\frac{2}{1+\cos\varphi},$$

$$\int_0 \tang^5\tfrac{1}{2}\varphi.\partial\varphi = \tfrac{1}{2}\tang^4\tfrac{1}{2}\varphi - \tang^2\tfrac{1}{2}\varphi + \log\frac{1}{1+\cos\varphi},$$

$$\int_0 \tang^7\tfrac{1}{2}\varphi.\partial\varphi = \tfrac{1}{3}\tang^6\tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{2}\tang^4\tfrac{1}{2}\varphi + \tang^2\tfrac{1}{2}\varphi - \log\frac{2}{1+\cos\varphi}$$

u. s. w.

Wir haben also, da $\frac{2}{1+\cos\varphi} = \frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}\varphi} = 1 + \tang^2\frac{1}{2}\varphi$ ist, die Reihe

3. $$\begin{aligned} U = 2[&\log(1+\tang^2\tfrac{1}{2}\varphi) + \tfrac{1}{3}(\tang^2\tfrac{1}{2}\varphi - \log(1+\tang^2\tfrac{1}{2}\varphi)) \\ &+ \tfrac{1}{5}(\tfrac{1}{2}\tang^4\tfrac{1}{2}\varphi - \tang^2\tfrac{1}{2}\varphi + \log(1+\tang^2\tfrac{1}{2}\varphi)) \\ &+ \tfrac{1}{7}(\tfrac{1}{3}\tang^6\tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{2}\tang^4\tfrac{1}{2}\varphi + \tang^2\tfrac{1}{2}\varphi - \log(1+\tang^2\tfrac{1}{2}\varphi)) \\ &+ \tfrac{1}{9}(\tfrac{1}{4}\tang^8\tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{3}\tang^6\tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{2}\tang^4\tfrac{1}{2}\varphi - \tang^2\tfrac{1}{2}\varphi \\ &\qquad + \log(1+\tang^2\tfrac{1}{2}\varphi)) + \ldots]. \end{aligned}$$

Durch Umordnung erhält man eine neue Reihe, in welcher der Coëfficient von $\log(1+\tang^2\frac{1}{2}\varphi)$, $2(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\ldots) = 2.\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\pi$ ist: daher haben wir

4. $$\begin{aligned} U = \tfrac{1}{2}\pi.\log(1+\tang^2\tfrac{1}{2}\varphi) &+ (2-\tfrac{1}{2}\pi)\tang^2\tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{2}(2-\tfrac{2}{3}-\tfrac{1}{2}\pi)\tang^4\tfrac{1}{2}\varphi \\ &+ \tfrac{1}{3}(2-\tfrac{2}{3}+\tfrac{2}{5}-\tfrac{1}{2}\pi)\tang^6\tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{4}(2-\tfrac{2}{3}+\tfrac{2}{5}-\tfrac{2}{7}-\tfrac{1}{2}\pi)\tang^8\tfrac{1}{2}\varphi \\ &+ \tfrac{1}{5}(2-\tfrac{2}{3}+\tfrac{2}{5}-\tfrac{2}{7}+\tfrac{2}{9}-\tfrac{1}{2}\pi)\tang^{10}\tfrac{1}{2}\varphi - + \ldots \end{aligned}$$

Anmerkung. Die vorstehende Reihe hat den Vortheil, dafs sie immer sehr rasch convergirt, es mag φ reell oder imaginär sein. Setzen wir $U = \int_0 \mathfrak{L}\varphi.\partial\varphi = f(\varphi)$, so ist $\int_0 l\varphi.\partial\varphi = -f(\varphi i)$, daher haben wir für das schon in §. 220. behandelte Integral die Reihe

$$\int_0 l\varphi.\partial\varphi = \pi.\log \mathfrak{Cos}\tfrac{1}{2}\varphi + (2-\tfrac{1}{2}\pi)\mathfrak{Tang}^2\tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{2}(2-\tfrac{2}{3}-\tfrac{1}{2}\pi)\mathfrak{Tang}^4\tfrac{1}{2}\varphi$$
$$+\tfrac{1}{3}(2-\tfrac{2}{3}+\tfrac{2}{5}-\tfrac{1}{2}\pi)\mathfrak{Tang}^6\tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{4}(2-\tfrac{2}{3}+\tfrac{2}{5}-\tfrac{2}{7}-\tfrac{1}{2}\pi)\mathfrak{Tang}^8\tfrac{1}{2}\varphi$$
$$+\tfrac{1}{5}(2-\tfrac{2}{3}+\tfrac{2}{5}-\tfrac{2}{7}+\tfrac{2}{9}-\tfrac{1}{2}\pi)\mathfrak{Tang}^{10}\tfrac{1}{2}\varphi + \ldots.$$

Die bekannte Reihe $\mathfrak{L}\varphi = \varphi + \frac{\varphi^3}{3'} + 5.\frac{\varphi^5}{5'} + 61.\frac{\varphi^7}{7'} + \ldots.$ giebt auf der Stelle die Reihen

$$\int_0 \mathfrak{L}\varphi.\partial\varphi = \frac{\varphi^2}{2'} + \frac{\varphi^4}{4'} + 5.\frac{\varphi^6}{6'} + 61.\frac{\varphi^8}{8'} + 1385.\frac{\varphi^{10}}{10'} + 50521.\frac{\varphi^{12}}{12'}$$
$$+ 2702765.\frac{\varphi^{14}}{14'} + 199360981.\frac{\varphi^{16}}{16'} + \ldots.,$$

$$\int_0 l\varphi.\partial\varphi = \frac{\varphi^2}{2'} - \frac{\varphi^4}{4'} + 5.\frac{\varphi^6}{6'} - 61.\frac{\varphi^8}{8'} + 1385.\frac{\varphi^{10}}{10'} - 50521.\frac{\varphi^{12}}{12'}$$
$$+ 2702765.\frac{\varphi^{14}}{14'} - 199360981.\frac{\varphi^{16}}{16'} + - \ldots.,$$

welche, wenn φ beträchtlich <1 ist, rasch genug convergiren.

Aus der bekannten Reihe

$$\mathfrak{L}\left(\frac{v\pi}{2}\right) = \log\frac{1+v}{1-v} - \log\frac{3+v}{3-v} + \log\frac{5+v}{5-v} - \log\frac{7+v}{7-v} + - \ldots.$$

erhält man, wenn man $\varphi = \frac{v.\pi}{2}$ setzt, und beachtet, dafs $\int_0 \frac{\log(\alpha+v)}{\log(\alpha-v)}\partial v = v.\log\frac{\alpha+v}{\alpha-v} - \alpha\log\left(1-\frac{v^2}{\alpha^2}\right)$ ist, zunächst

$$\int_0 \mathfrak{L}\varphi.\partial\varphi =$$
$$\varphi\log\frac{1+v}{1-v} - \varphi\log\frac{3+v}{3-v} + \varphi\log\frac{5+v}{5-v} - \varphi\log\frac{7+v}{7-v} + - \ldots.$$
$$-\tfrac{1}{2}\pi\log(1-v^2) + \tfrac{3}{2}\pi\log\left(1-\frac{v^2}{3^2}\right) - \tfrac{5}{2}\pi\log\left(1-\frac{v^2}{5^2}\right) + \tfrac{7}{2}\pi\log\left(1-\frac{v^2}{7^2}\right) - + \ldots$$

und dieser Ausdruck ist einfacher

$$\int_0 \mathfrak{L}\varphi.\partial\varphi = \varphi.\mathfrak{L}\varphi - \tfrac{1}{2}\pi\left[\log(1-v^2) - 3\log\left(1-\frac{v^2}{3^2}\right) + 5\log\left(1-\frac{v^2}{5^2}\right)\right.$$
$$\left. - 7\log\left(1-\frac{v^2}{7^2}\right) + 9\log\left(1-\frac{v^2}{9^2}\right) - + \ldots.\right]$$

$$\int_0 l\varphi.\partial\varphi = \varphi.l\varphi + \tfrac{1}{2}\pi\left[\log(1+v^2) - 3\log\left(1+\frac{v^2}{3^2}\right) + 5\log\left(1+\frac{v^2}{5^2}\right)\right.$$
$$\left. - 7\log\left(1+\frac{v^2}{7^2}\right) + 9\log\left(1+\frac{v^2}{9^2}\right) - + \ldots\right].$$

Aus der Reihe (5. §. 267.) erhält man eine Reihe für das Integral $\int_0 u\,\partial\,\mathrm{am}\,\mathrm{c}\,u$, wenn man $K-u$ statt u setzt. Noch andere Reihen erhält man, wenn

man in denen §. 267. $k'u$ statt u und $\frac{ik}{k}$ statt des Moduls k setzt, wodurch sich $\mathrm{am}\,u$ in $\frac{1}{2}\pi - \mathrm{amc}\,u$ und $\mathrm{amc}\,u$ in $\frac{1}{2}\pi - \mathrm{am}\,u$ verwandelt.

§. 269.

Reihen für die Integrale $\int_0 \mathrm{el}\,u.\partial\,\mathrm{am}\,u$ und $\int_0 \mathrm{elc}\,u.\partial\,\mathrm{am}\,u$.

Berechnen wir nach einander die Gröfsen

$$\overset{1}{c} = 1 - \frac{1}{2^2}k^2,$$

$$\overset{2}{c} = 1 - \frac{1}{2^2}k^2 - \frac{1^2.3}{2^2.4^2}k^4,$$

$$\overset{3}{c} = 1 - \frac{1}{2^2}k^2 - \frac{1^2.3}{2^2.4^2}k^4 - \frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6^2}k^6,$$

$$\overset{4}{c} = 1 - \frac{1}{2^2}k^2 - \frac{1^2.3}{2^2.4^2}k^4 - \frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6^2}k^6 - \frac{1^2.3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2.8^2}k^8$$

u. s. w.,

so nähern sich dieselben rasch der Grenze $\varepsilon = \frac{2E}{\pi}$, wenn wieder E den zum Modul k gehörigen elliptischen Quadranten bezeichnet.

Da nun bekanntlich

$$\mathrm{el}\,u = \varepsilon.\mathrm{am}\,u + (1-\varepsilon)\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u + \tfrac{2}{3}(\overset{1}{c} - \varepsilon)\,\mathrm{sn}^3u\,\mathrm{cn}\,u + \frac{2.4}{3.5}(\overset{2}{c} - \varepsilon)\,\mathrm{sn}^5u\,\mathrm{cn}\,u$$
$$+ \frac{2.4.6}{3.5.7}(\overset{3}{c} - \varepsilon)\,\mathrm{sn}^7u\,\mathrm{cn}\,u + \ldots.$$

und

$$\mathrm{elc}\,u = E + k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{snc}\,u - \varepsilon\,\mathrm{am}\,u - (1-\varepsilon)\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u - \tfrac{2}{3}(\overset{1}{c} - \varepsilon)\,\mathrm{sn}^3u\,\mathrm{cn}\,u$$
$$- \frac{2.4}{3.5}(\overset{2}{c} - \varepsilon)\,\mathrm{sn}^5u\,\mathrm{cn}\,u - \ldots.$$

ist, so erhält man, wenn man diese Reihen mit $\partial\,\mathrm{am}\,u$ multiplicirt und integrirt, die neuen Reihen

$$1.\quad \int_0 \mathrm{el}\,u.\partial\,\mathrm{am}\,u = \tfrac{1}{2}\varepsilon(\mathrm{am}\,u)^2 + \frac{1-\varepsilon}{2}\,\mathrm{sn}^2u + \tfrac{2}{3}\left(\frac{\overset{1}{c} - \varepsilon}{4}\right)\mathrm{sn}^4u + \frac{2.4}{3.5}\left(\frac{\overset{2}{c} - \varepsilon}{6}\right)\mathrm{sn}^6u$$
$$+ \frac{2.4.6}{3.5.7}\left(\frac{\overset{3}{c} - \varepsilon}{8}\right)\mathrm{sn}^8u + \ldots.$$

und

$$2.\quad \int_0 \mathrm{elc}\,u.\partial\,\mathrm{am}\,u = E.\mathrm{am}\,u + (1 - \mathrm{dn}\,u) - \tfrac{1}{2}\varepsilon(\mathrm{am}\,u)^2 - \frac{1-\varepsilon}{2}.\mathrm{sn}^2u$$
$$- \tfrac{2}{3}\left(\frac{\overset{1}{c} - \varepsilon}{4}\right)\mathrm{sn}^4u - \frac{2.4}{3.5}\left(\frac{\overset{2}{c} - \varepsilon}{6}\right)\mathrm{sn}^6u - \frac{2.4.6}{3.5.7}\left(\frac{\overset{3}{c} - \varepsilon}{8}\right)\mathrm{sn}^8u - \ldots,$$

welche für jeden Werth von $\mathrm{am}\,u$ und für jeden Modul convergiren. Die

letzte Reihe stellen wir noch auf eine andere Art dar. Es ist nach dem Zusatze zu §. 106.

$$\operatorname{elc} u = E - k'^2 \Big[\operatorname{am} u + \frac{3}{2^2} k^2 (\operatorname{am} u - \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u) + \frac{3^2.5}{2^2.4^2} k^4 (\operatorname{am} u - \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u - \tfrac{2}{3} \operatorname{sn}^3 u \operatorname{cn} u) + \frac{3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2} k^6 (\operatorname{am} u - \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u - \tfrac{2}{3} \operatorname{sn}^3 u \operatorname{cn} u - \frac{2.4}{3.5} \operatorname{sn}^5 u \operatorname{cn} u) + \ldots\Big].$$

Wird diese Reihe mit $\partial \operatorname{am} u$ multiplicirt und integrirt, so entsteht

$$3. \quad \int_0 \operatorname{elc} u . \partial \operatorname{am} u =$$

$$E.\operatorname{am} u - k'^2 \Big[\tfrac{1}{2}(\operatorname{am} u)^2 + \frac{3}{2^2} k^2 (\tfrac{1}{2}(\operatorname{am} u)^2 - \tfrac{1}{2}\operatorname{sn}^2 u) + \frac{3^2.5}{2^2.4^2} k^4 (\tfrac{1}{2}(\operatorname{am} u)^2 - \tfrac{1}{2}\operatorname{sn}^2 u - \tfrac{1}{4}.\tfrac{2}{3}\operatorname{sn}^4 u) + \frac{3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2} k^6 \Big(\tfrac{1}{2}(\operatorname{am} u)^2 - \tfrac{1}{2}\operatorname{sn}^2 u - \tfrac{1}{4}.\tfrac{2}{3}\operatorname{sn}^4 u - \frac{1}{6}.\frac{2.4}{3.5}\operatorname{sn}^6 u\Big) + \ldots\Big].$$

Berechnet man nun die Gröſsen

$$\overset{1}{\alpha} = k'^2 \Big(1 + \frac{3}{2^2} k^2\Big),$$

$$\overset{2}{\alpha} = k'^2 \Big(1 + \frac{3}{2^2} k^2 + \frac{3^2.5}{2^2.4^2} k^4\Big),$$

$$\overset{3}{\alpha} = k'^2 \Big(1 + \frac{3}{2^2} k^2 + \frac{3^2.5}{2^2.4^2} k^4 + \frac{3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2} k^6\Big),$$

$$\overset{4}{\alpha} = k'^2 \Big(1 + \frac{3}{2^2} k^2 + \frac{3^2.5}{2^2.4^2} k^4 + \frac{3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2} k^6 + \frac{3^2.5^2.7^2.9}{2^2.4^2.6^2.8^2} k^8\Big)$$

u. s. w.,

welche sich ebenfalls der Grenze $\varepsilon = \frac{2E}{\pi}$ nähern, so haben wir nach einer leichten Umordnung der vorigen Reihe die neue

$$4. \quad \int_0 \operatorname{elc} u . \partial \operatorname{am} u = E.\operatorname{am} u - \tfrac{1}{2}\varepsilon(\operatorname{am} u)^2 + \Big(\frac{\varepsilon - k'^2}{2}\Big)\operatorname{sn}^2 u + \tfrac{2}{3}\Big(\frac{\varepsilon - \overset{1}{\alpha}}{4}\Big)\operatorname{sn}^4 u + \frac{2.4}{3.5}\Big(\frac{\varepsilon - \overset{2}{\alpha}}{6}\Big)\operatorname{sn}^6 u + \frac{2.4.6}{3.5.7}\Big(\frac{\varepsilon - \overset{3}{\alpha}}{8}\Big).\operatorname{sn}^8 u + \ldots$$

Es lassen sich auch leicht Reihen für die vorstehenden Integrale finden, welche desto rascher convergiren, je gröſser der Modul ist; womit wir uns jedoch hier nicht länger aufhalten.

§. 270.

Reihen zur Berechnung von u und v, wenn $\operatorname{am} u = \operatorname{am}' v = \varphi$ gegeben ist.

Es kann die Aufgabe vorgelegt werden, aus einer gegebenen Amplitude, welche auf die beiden conjugirten Modul k und k' zu beziehen ist, die ihnen entsprechenden Argumente u und v gleichzeitig zu berechnen. Wir setzen

$$\operatorname{am} u = \Phi \quad \text{und} \quad \operatorname{am}' v = \Phi.$$

Dann ist

$$u = \int_0 \frac{\partial \varphi}{\sqrt{(1-k^2 \sin^2 \varphi)}} \quad \text{und} \quad v = \int_0 \frac{\partial \varphi}{\sqrt{(1-k'^2 \sin^2 \varphi)}}.$$

Setzen wir nun, wie in §. 47.,

$$t = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\Phi \quad \text{und} \quad k = \sin\theta, \quad \text{also} \quad k' = \cos\theta,$$

so findet sich $\operatorname{sn} u = \frac{2t}{1+t^2}$, $\operatorname{cn} u = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\operatorname{dn} u = \frac{\sqrt{(1+2\cos 2\theta . t^2 + t^4)}}{1+t^2}$ und

$$1. \quad u = \frac{2\partial t}{\sqrt{(1+2\cos 2\theta . t^2 + t^4)}}.$$

Wird aber θ mit $\frac{1}{2}\pi - \theta$ vertauscht, wodurch nur das Vorzeichen von $\cos 2\theta$ abgeändert wird, so verwandelt sich u in v und v in u. Setzen wir

$$2. \quad (1+2\cos 2\theta . t^2 + t^4)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{\overset{1}{\Theta}}{1'} . t^2 + \frac{\overset{2}{\Theta}}{2'} . t^4 - \frac{\overset{3}{\Theta}}{3'} . t^6 + \frac{\overset{4}{\Theta}}{4'} . t^8 - + \ldots,$$

so findet sich, in Anwendung des Polynomialtheorems, die einfache Relation

$$3. \quad \overset{r}{\Theta} = (2r-1) . \cos 2\theta . \overset{r-1}{\Theta} - (r-1)^2 . \overset{r-2}{\Theta},$$

welche mit der §. 112. gefundenen Relation (8.) übereinstimmt, wenn man nur für das dortige v jetzt $\cos 2\theta$ setzt. Daher haben wir sofort die Ausdrücke

$$4. \quad \begin{cases} \overset{1}{\Theta} = \cos 2\theta, \\ \overset{2}{\Theta} = 3\cos^2 2\theta - 1, \\ \overset{3}{\Theta} = 15\cos^3 2\theta - 9\cos 2\theta, \\ \overset{4}{\Theta} = 105\cos^4 2\theta - 90\cos^2 2\theta + 9, \\ \overset{5}{\Theta} = 945\cos^5 2\theta - 1050\cos^3 2\theta + 225\cos 2\theta, \\ \overset{6}{\Theta} = 10395\cos^6 2\theta - 14175\cos^4 2\theta + 4725\cos^2 2\theta - 225 \\ \qquad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

und im Allgemeinen ist $\overset{r}{\Theta} = \frac{\partial^r (x^2-1)^r}{2^r . \partial x^r}$ für $x = \cos 2\theta$.

Setzt man $\theta = 0$, so wird

$$(1-2\cos 2\theta.t^2+t^4)^{-\frac{1}{2}} = (1-t^2)^{-1} = 1+t^2+t^4+t^6+\dots.$$

Setzt man $\theta = \frac{1}{4}\pi$, so wird

$$(1-2\cos 2\theta.t^2+t^4)^{-\frac{1}{2}} = (1+t^4)^{-\frac{1}{2}} = 1-\tfrac{1}{2}t^4+\frac{1.3}{2.4}t^8-\frac{1.3.5}{2.4.6}.t^{12}+\dots.$$

Setzt man $\theta = \frac{1}{2}\pi$, so wird

$$(1-2\cos 2\theta.t^2+t^4)^{-\frac{1}{2}} = (1+t^2)^{-1} = 1-t^2+t^4-t^6+t^8-+\dots.$$

Daher sind die Gröfsen

$$\frac{\overset{1}{\Theta}}{1'},\quad \frac{\overset{2}{\Theta}}{2'},\quad \frac{\overset{3}{\Theta}}{3'},\quad \frac{\overset{4}{\Theta}}{4'},\ \dots$$

immer ächte Brüche, wenn der Arcus θ reell ist.

Wird die Reihe (2.) mit $2\partial t$ multiplicirt und integrirt, so erhält man

$$u = 2\left(t-\frac{\overset{1}{\Theta}}{1'}.\frac{t^3}{3}+\frac{\overset{2}{\Theta}}{2'}.\frac{t^5}{5}-\frac{\overset{3}{\Theta}}{3'}.\frac{t^7}{7}+\frac{\overset{4}{\Theta}}{4'}.\frac{t^9}{9}-\frac{\overset{5}{\Theta}}{5'}.\frac{t^{11}}{11}+-\dots\right).$$

Wird nun $\frac{1}{2}\pi-\theta$ statt θ gesetzt, so bleiben $\overset{2}{\Theta}, \overset{4}{\Theta}, \overset{6}{\Theta}, \dots$ ungeändert, hingegen $\overset{1}{\Theta}, \overset{3}{\Theta}, \overset{5}{\Theta}, \dots$ ändern nur ihr Vorzeichen; daher haben wir noch

$$v = 2\left(t+\frac{\overset{1}{\Theta}}{1'}.\frac{t^3}{3}+\frac{\overset{2}{\Theta}}{2'}.\frac{t^5}{5}+\frac{\overset{3}{\Theta}}{3'}.\frac{t^7}{7}+\frac{\overset{4}{\Theta}}{4'}.\frac{t^9}{9}+\dots\right).$$

Aus den vorstehenden Reihen erhält man durch Addition und Subtraction

$$5.\quad \begin{cases} \dfrac{v+u}{4} = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\phi+\dfrac{\overset{2}{\Theta}}{2'}.\dfrac{\operatorname{tang}^5\frac{1}{2}\varphi}{5}+\dfrac{\overset{4}{\Theta}}{4'}.\dfrac{\operatorname{tang}^9\frac{1}{2}\varphi}{9}+\dfrac{\overset{6}{\Theta}}{6'}.\dfrac{\operatorname{tang}^{13}\frac{1}{2}\varphi}{13}+\dots \\[2ex] \dfrac{v-u}{4} = \dfrac{\overset{1}{\Theta}}{1'}.\dfrac{\operatorname{tang}^3\frac{1}{2}\varphi}{3}+\dfrac{\overset{3}{\Theta}}{3'}.\dfrac{\operatorname{tang}^7\frac{1}{2}\varphi}{7}+\dfrac{\overset{5}{\Theta}}{5'}.\dfrac{\operatorname{tang}^{11}\frac{1}{2}\varphi}{11}+\dfrac{\overset{7}{\Theta}}{7'}.\dfrac{\operatorname{tang}^{15}\frac{1}{2}\varphi}{15}+\dots \end{cases}$$

und diese Reihen convergiren für jeden Modul und für jede Amplitude ϕ. Setzt man $\phi = \frac{1}{2}\pi$, welcher Fall am ungünstigsten ist, so wird $u = K$ und $v = K'$, daher haben wir

$$6.\quad \begin{cases} \dfrac{K'+K}{4} = 1+\tfrac{1}{5}.\dfrac{\overset{2}{\Theta}}{2'}+\tfrac{1}{9}.\dfrac{\overset{4}{\Theta}}{4'}+\tfrac{1}{13}.\dfrac{\overset{6}{\Theta}}{6'}+\tfrac{1}{17}.\dfrac{\overset{8}{\Theta}}{8'}+\dots, \\[2ex] \dfrac{K'-K}{4} = \tfrac{1}{3}.\dfrac{\overset{1}{\Theta}}{1'}+\tfrac{1}{7}.\dfrac{\overset{3}{\Theta}}{3'}+\tfrac{1}{11}.\dfrac{\overset{5}{\Theta}}{5'}+\tfrac{1}{15}.\dfrac{\overset{7}{\Theta}}{7'}+\dots \end{cases}$$

Aufser der im §. 112. angegebenen independenten Bestimmung von $\overset{r}{\Theta}$ geben wir noch einige andere. Es ist

$$\partial u = \frac{\partial\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}} = S\underset{2^\alpha\ \alpha'}{\underline{[1,-2]}}^{\alpha}\, k^{2\alpha}\sin^{2\alpha}\phi.\partial\phi.$$

Ferner ist $\sin\phi = \dfrac{2t}{1+t^2}$ und $\partial\phi = \dfrac{2\partial t}{1+t^2}$, also

$$\partial u = 2.S\frac{[1,-2]^{\alpha}}{\alpha'}k^{2\alpha}.2^{\alpha}.t^{2\alpha}(1+t)^{-(2\alpha+1)}\,\partial t,$$

und da $(1+t^2)^{-(2\alpha+1)} = S\frac{[-(2\alpha+1)]^{\beta}}{\beta'}t^{2\beta}$ ist, so ist

$$\partial u = 2.S\frac{[1,-2]^{\alpha}}{\alpha'}\frac{[-(2\alpha+1)]^{\beta}}{\beta'}k^{2\alpha}.2^{\alpha}t^{2\gamma}.\partial t \quad \text{cond. } (\alpha+\beta=\gamma).$$

Wird dieser Ausdruck mit dem vorigen verglichen, so hat man

$$(-1)^r.\frac{\overset{r}{\Theta}}{r'} = S\left\{\frac{[1,-2]^{\alpha}}{\alpha'}\frac{[-(2\alpha+1)]^{\beta}}{\beta'}k^{2\alpha}.2^{\alpha}\right\} \quad \text{cond. } (\alpha+\beta=r).$$

Es ist aber $[-(2\alpha+1)]^{\beta} = (-1)^{\beta}[2\alpha+1,-1]^{\beta}$, $[1,-2]^{\alpha} = \frac{[1,-1]^{2\alpha}}{2^{\alpha}\alpha'}$,

$[2\alpha+1,-1]^{\beta}[1,-1]^{2\alpha} = [1,-1]^{2\alpha+\beta} = (2\alpha+\beta)' = (r+\alpha)' = \beta'[r+\alpha]^{2\alpha}$, daher haben wir

$$7. \quad \frac{\overset{r}{\Theta}}{r'} = S(-1)^{\alpha}\frac{[r+\alpha]^{2\alpha}}{\alpha'\alpha'}\sin^{2\alpha}\theta,$$

also $(-1)^r.\frac{\overset{r}{\Theta}}{r'} = S(-1)^{\alpha}\frac{[r+\alpha]^{2\alpha}}{\alpha'\alpha'}\cos^{2\alpha}\theta$, wenn noch $\frac{1}{2}\pi-\theta$ statt θ gesetzt wird; oder auch:

$$\frac{\overset{r}{\Theta}}{r'} = 1-\frac{(r+1)r}{1^2}\sin^2\theta+\frac{(r+2)(r+1)(r)(r-1)}{1^2.2^2}\sin^4\theta$$
$$-\frac{(r+3)(r+2)(r+1)(r)(r-1)(r-2)}{1^2.2^2.3^2}\sin^6\theta+-\ldots,$$

$$(-1)^r.\frac{\overset{r}{\Theta}}{r'} = 1-\frac{(r+1)r}{1^2}\cos^2\theta+\frac{(r+2)(r+1)(r)(r-1)}{1^2.2^2}\cos^4\theta$$
$$-\frac{(r+3)(r+2)(r+1)(r)(r-1)(r-2)}{1^2.2^2.3^2}\cos^6\theta+-\ldots.$$

In §. **272.** wird noch eine andere Formel für $\overset{r}{\Theta}$ hergeleitet werden, welche nach den Cosinus der Vielfachen von 2θ fortschreitet.

Zusatz. Setzt man $\varphi = \text{am}\,2u$, also $t = \text{tang}\frac{1}{2}\varphi = \text{tang}\frac{1}{2}\text{am}\,2u = \text{tn}\,u\,\text{dn}\,u = \frac{\text{sn}\,u}{\text{snc}\,u}$, so hat man

$$u = t-\frac{\overset{1}{\Theta}}{1'}.\frac{t^3}{3}+\frac{\overset{2}{\Theta}}{2'}.\frac{t^5}{5}-\frac{\overset{3}{\Theta}}{3'}.\frac{t^7}{7}+\frac{\overset{4}{\Theta}}{4'}.\frac{t^9}{9}-+\ldots.$$

und setzt man $t = \text{tang}\frac{1}{2}\text{am}'2v = \frac{\text{sn}'v}{\text{snc}'v}$, so hat man auch

$$v = t + \frac{\overset{1}{\Theta}}{1'} \cdot \frac{t^3}{3} + \frac{\overset{2}{\Theta}}{2'} \cdot \frac{t^5}{5} + \frac{\overset{3}{\Theta}}{3'} \cdot \frac{t^7}{7} + \frac{\overset{4}{\Theta}}{4'} \cdot \frac{t^9}{9} + \ldots,$$

daher ist nun

$$1.\quad \begin{cases} \dfrac{v+u}{2} = t + \dfrac{\overset{2}{\Theta}}{2'} \cdot \dfrac{t^5}{5} + \dfrac{\overset{4}{\Theta}}{4'} \cdot \dfrac{t^9}{9} + \dfrac{\overset{6}{\Theta}}{6'} \cdot \dfrac{t^{13}}{13} + \dfrac{\overset{8}{\Theta}}{8'} \cdot \dfrac{t^{17}}{17} + \ldots \text{ und} \\ \dfrac{v-u}{2} = \dfrac{\overset{1}{\Theta}}{1'} \cdot \dfrac{t^3}{3} + \dfrac{\overset{3}{\Theta}}{3'} \cdot \dfrac{t^7}{7} + \dfrac{\overset{5}{\Theta}}{5'} \cdot \dfrac{t^{11}}{11} + \dfrac{\overset{7}{\Theta}}{7'} \cdot \dfrac{t^{15}}{15} + \dfrac{\overset{9}{\Theta}}{9'} \cdot \dfrac{t^{19}}{19} + \ldots \end{cases}$$

Setzt man in diesen Reihen $t = 1$, so ist $u = K - u$, also $u = \frac{1}{2}K$, und ebenso $v = \frac{1}{2}K'$, und man findet die obigen Reihen (6.) wieder; setzt man aber $\frac{1}{t}$ für t, so vertauscht man u mit $K - u$ und v mit $K' - v$; daher ist, wenn $K - u = u'$ und $K' - v = v'$ gesetzt wird,

$$2.\quad \begin{cases} \dfrac{v'+u'}{2} = \dfrac{1}{t} + \dfrac{\overset{2}{\Theta}}{2'} \cdot \dfrac{1}{5t^5} + \dfrac{\overset{4}{\Theta}}{4'} \cdot \dfrac{1}{9t^9} + \dfrac{\overset{6}{\Theta}}{6'} \cdot \dfrac{1}{13t^{13}} + \ldots \\ \dfrac{v'-u'}{2} = \dfrac{\overset{1}{\Theta}}{1'} \cdot \dfrac{1}{3t^3} + \dfrac{\overset{3}{\Theta}}{3'} \cdot \dfrac{1}{7t^7} + \dfrac{\overset{5}{\Theta}}{5'} \cdot \dfrac{1}{11t^{11}} + \dfrac{\overset{7}{\Theta}}{7'} \cdot \dfrac{1}{15t^{15}} + \ldots \end{cases}$$

Diese Reihen convergiren, wenn t oder die Brüche $\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{snc} u}$ und $\frac{\operatorname{sn}' v}{\operatorname{snc}' v}$ gröfser als Eins sind; dann ist $u > \frac{1}{2}K$ und $v > \frac{1}{2}K'$. Daher sind nun $u' < \frac{1}{2}K$ und $v' > \frac{1}{2}K'$. Indem man aber u' und v' berechnet, findet man auch u und v, da die Quadranten K und K' als bekannt angesehen werden.

Anmerkung. Ist der Modul $k = \sin\frac{1}{4}\pi$, so wird $\overset{1}{\Theta} = \overset{3}{\Theta} = \overset{5}{\Theta} \ldots = 0$, daher ist nun $v = u$, und zwar

$$u = 2\left(\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{1}{2}\operatorname{tang}^5\tfrac{1}{2}\varphi + \frac{1}{9}\cdot\frac{1.3}{2.4}\operatorname{tang}^9\tfrac{1}{2}\varphi - \frac{1}{13}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}\operatorname{tang}^{13}\tfrac{1}{2}\varphi + \frac{1}{17}\cdot\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\operatorname{tang}^{17}\tfrac{1}{2}\varphi + \ldots\right),$$

wenn $\varphi = \operatorname{am} u$ gesetzt wird. Bezeichnen wir den zu dem Modul $k = \sin\frac{1}{4}\pi$ gehörenden Modularquadranten mit I, so haben wir

$$I = 2 - \tfrac{2}{5}\cdot\tfrac{1}{2} + \frac{2}{9}\cdot\frac{1.3}{2.4} - \frac{2}{13}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6} + \frac{2}{17}\cdot\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} - + \ldots \text{ oder}$$

$$I = 1{,}85407\,46773\,01.$$

§. 271.

Reihen zur Berechnung von $\operatorname{el} u$ und $\operatorname{el} v'$, wenn $\varphi = \operatorname{am} u = \operatorname{am}' v$ gegeben ist.

Setzen wir wieder $t = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\operatorname{am} u = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\operatorname{am}' v$, so ist

$$\partial u = \frac{2\partial t}{\sqrt{(1+2\cos 2\theta . t^2 + t^4)}} \text{ und } \operatorname{dn}^2 u = \frac{1+2\cos 2\theta . t^2 + t^4}{(1+t^2)^2}.$$

da nun $\mathrm{el}\,u = \int_0 \mathrm{dn}^2 u.\partial u$ ist, so findet sich

$$\mathrm{el}\,u = \int_0 \frac{2\partial t \sqrt{(1+2\cos 2\theta . t^2 + t^4)}}{(1+t^2)^2} \quad \text{und}$$

$$\mathrm{el}'v = \int_0 \frac{2\partial t \sqrt{(1-2\cos\theta . t^2 + t^4)}}{(1+t^2)^2}.$$

Wird die Reihe

$$\frac{1}{\sqrt{(1+2\cos 2\theta . t^2 + t^4)}} = 1 - \frac{\overset{1}{\Theta}}{1'}t^2 + \frac{\overset{2}{\Theta}}{2'}t^4 - \frac{\overset{3}{\Theta}}{3'}t^6 + \frac{\overset{4}{\Theta}}{4'}t^8 - \frac{\overset{5}{\Theta}}{5'}t^{10} \text{ etc.}$$

mit $1+2\cos 2\theta . t^2 + t^4$ multiplicirt, so erhält man für $\sqrt{(1+2\cos 2\theta . t^4 + t^4)}$ zunächst die Reihe

$$\left.\begin{matrix} 1-\frac{\overset{1}{\Theta}}{1'} \\ +2\cos\theta \\ \end{matrix}\right\} t^2 \left.\begin{matrix} +\frac{\overset{2}{\Theta}}{2'} \\ -2\cos 2\theta . \frac{\overset{1}{\Theta}}{1'} \\ +1 \end{matrix}\right\} t^4 \left.\begin{matrix} -\frac{\overset{3}{\Theta}}{3'} \\ +2\cos 2\theta . \frac{\overset{2}{\Theta}}{2'} \\ -\frac{\overset{1}{\Theta}}{1'} \end{matrix}\right\} t^6 \left.\begin{matrix} +\frac{\overset{4}{\Theta}}{4'} \\ -2\cos 2\theta . \frac{\overset{3}{\Theta}}{3'} \\ +\frac{\overset{2}{\Theta}}{2'} \end{matrix}\right\} t^8 \text{ etc.}$$

Da aber $(2r-1)\cos 2\theta . \overset{r-1}{\Theta} = \overset{r}{\Theta} + (r-1)^2 \overset{r-2}{\Theta}$, also

$$2\cos 2\theta . \frac{\overset{r-1}{\Theta}}{(r-1)'} = \frac{2r}{2r-1} . \frac{\overset{r}{\Theta}}{r'} + \frac{2r-2}{2r-1} . \frac{\overset{r-2}{\Theta}}{(r-2)'}$$

ist, so erhält man durch die Benutzung dieser Formel

$$\sqrt{(1+\cos 2\theta . t^2 + t^4)}$$

$$= 1 + \frac{\overset{1}{\Theta}}{1'}t^2 + \tfrac{1}{3}\left(1 - \frac{\overset{2}{\Theta}}{2'}\right)t^4 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{\overset{1}{\Theta}}{1'} - \frac{\overset{3}{\Theta}}{3'}\right)t^6 + \tfrac{1}{7}\left(\frac{\overset{2}{\Theta}}{2'} - \frac{\overset{4}{\Theta}}{4'}\right)t^8 + \tfrac{1}{9}\left(\frac{\overset{3}{\Theta}}{3'} - \frac{\overset{4}{\Theta}}{4'}\right)t^{10}$$

$$+ \tfrac{1}{11}\left(\frac{\overset{4}{\Theta}}{4'} - \frac{\overset{6}{\Theta}}{6'}\right)t^{12} - \tfrac{1}{13}\left(\frac{\overset{5}{\Theta}}{5'} - \frac{\overset{7}{\Theta}}{7'}\right)t^{14} + - \text{ etc.}$$

Jedes Glied dieser Reihe ist noch mit $\frac{2\partial t}{(1+t^2)^2}$ zu multipliciren und zu integriren, um die Reihe für $\mathrm{el}\,u$ zu erhalten. Man findet aber leicht die Relation

$$(2n-1).\int_0 \frac{t^{2n+2}\partial t}{(1+t^2)^2} = \frac{t^{2n+1}}{1+t^2} - (2n+1)\int_0 \frac{t^{2n}\partial t}{(1+t^2)^2},$$

und setzt man zur Abkürzung allgemein

$$T_{(n)} = \int_0 \frac{2t^{2n}.\partial t}{(2n-1)(1+t^2)^2},$$

so verwandelt sich die vorige Relation in

$$T_{(n+1)} = \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} . \frac{t^{2n+1}}{1+t^2} - T_{(n)}.$$

Man findet aber

$$\int_0 \frac{2\partial t}{(1+t^2)^2} = \tfrac{1}{2}\varphi + \frac{t}{1+t^2},$$

also

$$T_1 = +\tfrac{1}{2}\varphi - \frac{t}{1+t^2},$$

$$T_2 = -\tfrac{1}{2}\varphi + \frac{t}{1+t^2} + \frac{2t^3}{1.3(1+t^2)},$$

$$T_3 = +\tfrac{1}{2}\varphi - \frac{t}{1+t^2} - \frac{2t^3}{1.3(1+t^2)} + \frac{2t^5}{3.5(1+t^2)},$$

$$T_4 = -\tfrac{1}{2}\varphi - \frac{t}{1+t^2} - \frac{2t^3}{1.3(1+t^2)} + \frac{2t^5}{3.5(1+t^2)} - \frac{2t^7}{5.7(1+t^2)}$$

u. s. w.

Werden diese Werthe substituirt, so erhält man für el$u$ eine Reihe von der Form

$$\mathrm{el}\,u = \overset{0}{a}.\tfrac{1}{2}\varphi + \overset{1}{a}.\frac{t}{1+t^2} + \frac{2\overset{2}{a}.t^3}{1.3(1+t^2)} + \frac{2\overset{3}{a}.t^5}{3.5(1+t^2)} + \frac{2\overset{4}{a}.t^7}{5.7(1+t^2)} + \text{etc.}$$

und die Coëfficienten $\overset{0}{a}, \overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a}$ etc. in ihr werden durch Reihen angegeben, die sich gleichsam von selbst summiren. Es ist

$$\overset{0}{a} = 1 - \left(0 - \frac{\overset{1}{\Theta}}{1'}\right) - \left(1 - \frac{\overset{2}{\Theta}}{2'}\right) - \left(\frac{\overset{1}{\Theta}}{1'} - \frac{\overset{3}{\Theta}}{3'}\right) - \left(\frac{\overset{2}{\Theta}}{2'} - \frac{\overset{4}{\Theta}}{4'}\right) - \text{etc. oder}$$

$$\overset{0}{a} = 1 - \left[0 + 1 + \frac{\overset{1}{\Theta}}{1'} + \frac{\overset{2}{\Theta}}{2'} + \frac{\overset{3}{\Theta}}{3'} + \text{etc.}\right] + \left[\frac{\overset{1}{\Theta}}{1'} + \frac{\overset{2}{\Theta}}{2'} + \frac{\overset{3}{\Theta}}{3'} + \frac{\overset{4}{\Theta}}{4'} + \text{etc.}\right]$$

$$= 1 - 1 = 0. \quad \text{Ferner}$$

$$\overset{1}{a} = 1 + \left[0 + 1 + \frac{\overset{1}{\Theta}}{1'} + \frac{\overset{2}{\Theta}}{2'} + \frac{\overset{3}{\Theta}}{3'} + \text{etc.}\right] - \left[\frac{\overset{1}{\Theta}}{1'} + \frac{\overset{2}{\Theta}}{2'} + \frac{\overset{3}{\Theta}}{3'} + \frac{\overset{4}{\Theta}}{4'} + \text{etc.}\right]$$

$$= 1 + 1 = 2,$$

$$\overset{2}{a} = \left[1 + \frac{\overset{1}{\Theta}}{1'} + \frac{\overset{2}{\Theta}}{2'} + \frac{\overset{3}{\Theta}}{3'} + \frac{\overset{4}{\Theta}}{4'} + \text{etc.}\right] - \left[\frac{\overset{2}{\Theta}}{2'} + \frac{\overset{3}{\Theta}}{3'} + \frac{\overset{4}{\Theta}}{4'} + \frac{\overset{5}{\Theta}}{5'} + \text{etc.}\right]$$

$$= 1 + \frac{\overset{1}{\Theta}}{1'},$$

$$\overset{3}{a} = -\frac{\overset{1}{\Theta}}{1'} + \frac{\overset{2}{\Theta}}{2'} + \frac{\overset{3}{\Theta}}{3'} + \text{etc.}\Big] + \left[\frac{\overset{3}{\Theta}}{3'} + \frac{\overset{4}{\Theta}}{4'} + \frac{\overset{5}{\Theta}}{5'} + \text{etc.}\right] = -\left(\frac{\overset{1}{\Theta}}{1'} + \frac{\overset{2}{\Theta}}{2'}\right),$$

Ebenso findet man

$$\overset{4}{a} = \frac{\overset{2}{\Theta}}{2'} + \frac{\overset{3}{\Theta}}{3'}, \quad \overset{5}{a} = -\left(\frac{\overset{3}{\Theta}}{3'} + \frac{\overset{4}{\Theta}}{4'}\right), \quad \overset{6}{a} = \frac{\overset{4}{\Theta}}{4'} + \frac{\overset{5}{\Theta}}{5'}, \quad \overset{7}{a} = -\left(\frac{\overset{5}{\Theta}}{5'} + \frac{\overset{6}{\Theta}}{6'}\right), \text{ u. s. w.}$$

Beachtet man nun aufserdem, dafs $\frac{2t}{1+t^2} = \sin\varphi$ ist, so entsteht die Reihe

$$\mathrm{el}\,u = \sin\varphi\Big[1+\Big(1+\frac{\overset{1}{\Theta}}{1'}\Big)\cdot\frac{t^2}{1.3}-\Big(\frac{\overset{1}{\Theta}}{1'}+\frac{\overset{2}{\Theta}}{2'}\Big)\cdot\frac{t^4}{3.5}+\Big(\frac{\overset{2}{\Theta}}{2'}+\frac{\overset{3}{\Theta}}{3'}\Big)\cdot\frac{t^6}{5.7}-\Big(\frac{\overset{3}{\Theta}}{3'}+\frac{\overset{4}{\Theta}}{4'}\Big)\cdot\frac{t^8}{7.9}+-\text{etc.}\Big].$$

Wird nun der Modul $k=\sin\theta$ mit $k'=\cos\theta$ vertauscht, so erhält man

$$\mathrm{el}'v = \sin\varphi\Big[1+\Big(1-\frac{\overset{1}{\Theta}}{1'}\Big)\cdot\frac{t^2}{1.3}-\Big(-\frac{\overset{1}{\Theta}}{1'}+\frac{\overset{2}{\Theta}}{2'}\Big)\cdot\frac{t^4}{3.5}+\Big(\frac{\overset{2}{\Theta}}{2'}-\frac{\overset{3}{\Theta}}{3'}\Big)\cdot\frac{t^6}{5.7}-\Big(-\frac{\overset{3}{\Theta}}{3'}+\frac{\overset{4}{\Theta}}{4'}\Big)\cdot\frac{t^8}{7.9}+-\text{etc.}\Big],$$

und verbindet man diese Reihe mit der vorigen durch Addition und Subtraction, so entstehet

$$\frac{\mathrm{el}\,u+\mathrm{el}'v}{2} = \sin\varphi.\Big(1+\frac{t^2}{1.3}-\frac{\overset{2}{\Theta}}{2'}\cdot\frac{t^4}{3.5}+\frac{\overset{2}{\Theta}}{2'}\cdot\frac{t^6}{5.7}-\frac{\overset{4}{\Theta}}{4'}\cdot\frac{t^8}{7.9}+\frac{\overset{4}{\Theta}}{4'}\cdot\frac{t^{10}}{9.11}-\frac{\overset{6}{\Theta}}{6'}\cdot\frac{t^{12}}{11.13}+\frac{\overset{6}{\Theta}}{6'}\cdot\frac{t^{14}}{13.15}-\frac{\overset{8}{\Theta}}{8'}\cdot\frac{t^{16}}{15.17}+-\text{etc.}\Big]$$

und

$$\frac{\mathrm{el}\,u-\mathrm{el}'u}{2} = \sin\varphi.\Big(\frac{\overset{1}{\Theta}}{1'}\cdot\frac{t^2}{1.3}-\frac{\overset{1}{\Theta}}{1'}\cdot\frac{t^4}{3.5}+\frac{\overset{3}{\Theta}}{3'}\cdot\frac{t^6}{5.7}-\frac{\overset{3}{\Theta}}{3'}\cdot\frac{t^8}{7.9}+\frac{\overset{5}{\Theta}}{5'}\cdot\frac{t^{10}}{9.11}-\frac{\overset{5}{\Theta}}{5'}\cdot\frac{t^{12}}{11.13}+\frac{\overset{7}{\Theta}}{7'}\cdot\frac{t^{14}}{13.15}-\frac{\overset{7}{\Theta}}{7'}\cdot\frac{t^{16}}{15.17}+-\text{etc.}\Big).$$

Setzt man $t=\tang\frac{1}{2}\varphi=1$, so ist auch $\sin\varphi=1$, und man erhält in diesem für die Anwendung der Reihen ungünstigsten Falle

$$\frac{E+E'}{8}=\frac{1}{1.3}-\frac{\overset{2}{\Theta}}{2'}\cdot\frac{1}{3.5.7}-\frac{\overset{4}{\Theta}}{4'}\cdot\frac{1}{7.9.11}-\frac{\overset{6}{\Theta}}{6'}\cdot\frac{1}{11.13.15}-\frac{\overset{8}{\Theta}}{8'}\cdot\frac{1}{15.17.19}+\text{etc.},$$

$$\frac{E-E'}{8}=\frac{\overset{1}{\Theta}}{1'}\cdot\frac{1}{1.3.5}+\frac{\overset{3}{\Theta}}{3'}\cdot\frac{1}{5.7.9}+\frac{\overset{5}{\Theta}}{5'}\cdot\frac{9}{9.11.13}+\frac{\overset{7}{\Theta}}{7'}\cdot\frac{1}{13.15.17}+\frac{\overset{9}{\Theta}}{9'}\cdot\frac{1}{17.19.21}+\text{etc.}$$

Auch die Modular-Integrale zweiter Art gestatten ähnliche Entwicklungen, womit wir uns jedoch der Kürze wegen hier nicht aufhalten.

§. 272.

Entwicklung der Functionen $\overset{1}{\Theta}, \overset{2}{\Theta}, \overset{3}{\Theta}, \overset{4}{\Theta}, \ldots$ nach den Cosinus der Vielfachen von θ.

Setzen wir wieder

$$(1-2\cos 2\theta.t^2+t^4)^{-\frac{1}{2}} = 1+\frac{\overset{1}{\Theta}}{1'}.t^2+\frac{\overset{2}{\Theta}}{2'}.t^4+\frac{\overset{3}{\Theta}}{3'}.t^6+\frac{\overset{4}{\Theta}}{4'}.t^8+\frac{\overset{5}{\Theta}}{5'}.t^{10}+\ldots,$$

so können die Coëfficienten in dieser Reihe nach den Cosinus der Vielfachen von θ entwickelt werden, und zwar auf folgende Art. Es ist

$$1-2\cos 2\theta . t^2+t^4 = (1-e^{2\theta i}.t^2)(1-e^{-2\theta i}.t^2).$$

Setzen wir nun

$$\frac{1}{\sqrt{(1-e^{2\theta i}.t^2)}} = (0)+(1).e^{2\theta i}.t^2+(2).e^{4\theta i}.t^4+(3).e^{6\theta i}.t^6+(4).e^{8\theta i}.t^8+\ldots,$$

indem wir die numerischen Coëfficienten in dieser Reihe der Kürze wegen durch (0), (1), (2), (3), ... bezeichnen, so ist

$$\frac{1}{\sqrt{(1-e)^{2\theta i}.t^2)}} = S(\alpha).e^{2\alpha\theta i}.t^{2\alpha} \quad \text{und}$$

$$\frac{1}{\sqrt{(1-e^{-2\theta i}.t^2)}} = S(\beta).e^{-2\beta\theta i}.t^{2\beta}:$$

daher ist

$$\frac{1}{\sqrt{(1-2\cos 2\theta . t^2+t^4)}} = S(\alpha)(\beta).e^{2(\alpha-\beta)\theta i}.t^{2\gamma} \quad \text{cond.}\,(\alpha+\beta=\gamma),$$

und da diese Reihe der obigen gleich sein mufs, so ist auch

$$\frac{\overset{r}{\Theta}}{r'} = (S(\alpha)(\beta).e^{2(\alpha-\beta)\theta i}) \text{ cond.}(\alpha+\beta=r).$$

Vertauschen wir α mit β, so erhalten wir einen dem vorigen ähnlichen Ausdruck, und das arithmetische Mittel beider ist

$$\frac{\overset{r}{\Theta}}{r'} = (S(\alpha)(\beta)\cos 2(\alpha-\beta)\theta) \quad \text{cond.}\,(\alpha+\beta=r).$$

In diesem Ausdrucke sind die äufsersten Glieder und auch diejenigen jedesmal gleich grofs, welche von den äufsersten gleich weit abstehen. Die Coëfficienten (α) und (β) sind Brüche und es ist $(\alpha)=\frac{1.3.5\ldots.(2\alpha-1)}{2.4.6\ldots.(2\alpha)}$; ebenso ist $(\beta)=\frac{1.3.5\ldots.(2\beta-1)}{2.4.6\ldots.(2\beta)}$. Setzen wir also der Kürze wegen das Product der ungeraden Zahlen

$$(1.3.5\ldots.(2\alpha-1))(1.3.5\ldots.(2\beta-1)) = [\alpha.\beta],$$

so ist

$$\frac{\overset{r}{\Theta}}{r'} = S\frac{[\alpha.\beta]}{2^r.\alpha'\beta'}\cos 2(\alpha-\beta)\theta$$

oder auch

$$2^r.\overset{r}{\Theta} = \left(S[r\underset{\alpha'}{\overset{\alpha}{]}}.[\alpha.\beta]\cos 2(\alpha-\beta)\theta\right) \quad \text{cond.}\,(\alpha+\beta=r),$$

und nun sind die Coëfficienten der cyklischen Cosinus der Vielfachen von θ in dem Ausdrucke ganze Zahlen. Da $\cos 2(\alpha-\beta)=\cos 2(\beta-\alpha)$ ist,

so können immer zwei Glieder, für welche α und β verschieden sind, als gleiche zu einem Gliede vereinigt werden. Für $r = 5$ hat man z. B.

$$2^4.\overset{5}{\Theta} = 1.3.5.7.9.\cos 10\theta + 5.1.3.5.7 \cos 6\theta + 10.1.3.1.3.5 \cos 2\theta$$

oder

$$\overset{5}{\Theta} = \tfrac{15}{16}(63\cos 10\theta + 35\cos 6\theta + 30\cos 2\theta).$$

Hieraus erhellet nun zunächst, daſs sich die Functionen el$u$, el'v, wie auch die Argumente u und v selbst, in Reihen entwickeln lassen, welche nach den Cosinus des vervielfachten Arcus θ fortschreiten.

Nach der vorhin entwickelten allgemeinen Formel findet man die folgenden Werthe:

$$\begin{aligned}
\overset{1}{\Theta} &= \cos 2\theta,\\
2.\overset{2}{\Theta} &= 3\cos 4\theta + 1,\\
2^2.\overset{3}{\Theta} &= 3(5\cos 6\theta + 3\cos 2\theta),\\
2^3.\overset{4}{\Theta} &= 3(35\cos 8\theta + 20\cos 4\theta + 9),\\
2^4.\overset{5}{\Theta} &= 3.5(63\cos 10\theta + 35\cos 6\theta + 30\cos 2\theta),\\
2^5.\overset{6}{\Theta} &= 3.5(693\cos 12\theta + 378\cos 8\theta + 315\cos 4\theta + 150),\\
2^6.\overset{7}{\Theta} &= 3.5.7(1287\cos 14\theta + 693\cos 10\theta + 567\cos 6\theta + 525\cos 2\theta)
\end{aligned}$$

u. s. w.

Anmerkung. Die Functionen $\frac{\overset{1}{\Theta}}{1'}, \frac{\overset{2}{\Theta}}{2'}, \frac{\overset{3}{\Theta}}{3'}, \ldots$ sind noch in anderen Beziehungen von Wichtigkeit. Man vergleiche die Abhandlung: „Ueber eine besondere Gattung algebraischer Functionen, die aus der Entwicklung der Function $(1-2xz+z^2)^{-\frac{1}{2}}$ entstehen" von *Jacobi* im 2ten Bande des Journals der Mathematik von *Crelle*.

§. 273.

Zweite Umwandlung der Reihen, welche zur Berechnung von u und v aus $\varphi = \mathrm{am}\, u = \mathrm{am}'v$ dienen.

Man kann die Argumente u und v nach Cosinus der Vielfachen Arcus von $\theta = \arcsin(k)$ entwickeln; aber auch nach Potenzen von $\cos 2\theta$. Diese Entwicklung hat den Vorzug vor jener, und daher beschränken wir uns lediglich hierauf. Man kann zwei Wege einschlagen, indem man entweder von den im §. 270. gefundenen Reihen ausgeht, oder auch von der ursprünglichen Differentialformel

$$u = \int_0 \frac{2\partial t}{\sqrt{(1+2\cos 2\theta . t^2 + t^4)}}.$$

Es ist $1+2\cos 2\theta . t^2+t^4 = 2t^2\left(\frac{t^2+t^{-2}}{2}+\cos 2\theta\right)$, also ist auch

$$u = \int_0 \frac{\partial t}{t} \cdot \sqrt{\left(\frac{2}{\frac{t^2+t^{-2}}{2}+\cos 2\theta}\right)}.$$

Setzen wir nun

$$t = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi = e^{-\psi},$$

so ist, da überhaupt $\mathfrak{L}\varphi = \log\operatorname{tang}(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}\varphi)$, auch $\mathfrak{L}(\frac{1}{2}\pi-\varphi) = \log\frac{1}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi}$, und da

$$1. \quad \begin{cases} \psi = \log\dfrac{1}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi} = \log\dfrac{1}{t} \text{ ist, so ist} \\ \psi = \mathfrak{L}(\frac{1}{2}\pi-\varphi). \end{cases}$$

Nimmt man die hyperbolischen Functionen, so hat man

$$2. \quad \begin{cases} \mathfrak{Cos}\,\psi = \dfrac{1}{\cos(\frac{1}{2}\pi-\varphi)} = \dfrac{1}{\sin\varphi}, \\ \mathfrak{Sin}\,\psi = \operatorname{tang}(\frac{1}{2}\pi-\varphi) = \cot\varphi, \\ \mathfrak{Tang}\,\psi = \cos\varphi. \end{cases}$$

Da $\mathfrak{Sin}\,2\psi = 2\,\mathfrak{Sin}\,\psi\,\mathfrak{Cos}\,\psi$ und $\mathfrak{Cos}\,2\psi = 2\,\mathfrak{Cos}^2\psi-1$ ist, so erhalten wir

$$3. \quad \mathfrak{Sin}\,2\psi = \frac{2\cos\varphi}{\sin^2\varphi} \text{ und } \mathfrak{Cos}\,2\psi = \frac{2}{\sin^2\varphi}-1 = \frac{2(1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi)}{\sin^2\varphi}.$$

Wollen wir ψ durch t ausdrücken, so haben wir aufser der Gleichung $\psi = \log\frac{1}{t}$ noch die Gleichungen

$$4. \quad \begin{cases} \mathfrak{Cos}\,\psi = \dfrac{1+t^2}{2t}, \quad \mathfrak{Sin}\,\psi = \dfrac{1-t^2}{2t}, \quad \mathfrak{Tang}\,\psi = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \\ \mathfrak{Cos}\,2\psi = \dfrac{1+t^4}{2t^2} = \dfrac{t^2+t^{-2}}{2}, \quad \mathfrak{Sin}\,2\psi = \dfrac{1-t^4}{2t^2} = \dfrac{t^{-2}-t^2}{2} \text{ und} \\ \qquad \mathfrak{Tang}\,2\psi = \dfrac{1-t^4}{1+t^4}, \end{cases}$$

Differentiiren wir die Formel $\psi = \mathfrak{L}(\frac{1}{2}\pi-\varphi)$, so erhalten wir $\partial\psi = \frac{\partial(\frac{1}{2}\pi-\varphi)}{\cos(\frac{1}{2}\pi-\varphi)}$ oder

$$5. \quad \partial\psi = -\frac{\partial\varphi}{\sin\varphi} = -\frac{\partial t}{t}.$$

Werden diese Werthe benutzt, so verwandelt sich das vorgelegte Differential in

$$6. \quad u = \int_\infty -\partial\psi . \sqrt{\left(\frac{2}{\mathfrak{Cos}\,2\psi+\cos 2\theta}\right)}.$$

Da nun

$$\sqrt{\frac{2}{\mathfrak{Cos}\,2\psi+\cos 2\theta}} = \sqrt{\frac{2}{\mathfrak{Cos}\,2\psi}} - \tfrac{1}{2}\cos 2\theta.\sqrt{\frac{2}{\mathfrak{Cos}^3 2\psi}} + \frac{1.3}{2.4}\cos^2 2\theta.\sqrt{\frac{2}{\mathfrak{Cos}^5 2\psi}}$$
$$- \frac{1.3.5}{2.4.6}\cos^3 2\theta.\sqrt{\frac{2}{\mathfrak{Cos}^7 2\psi}} + - \dots$$

ist, so haben wir

$$u = \int_\infty -\partial\psi.\sqrt{\frac{2}{\mathfrak{Cos}\,2\psi}} + \frac{1.3}{2.4}\cos^2 2\theta \int_\infty -\partial\psi.\sqrt{\frac{2}{\mathfrak{Cos}^5 2\psi}}$$
$$+ \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cos^4 2\theta \int_\infty -\partial\psi.\sqrt{\frac{2}{\mathfrak{Cos}^9 2\psi}} + \dots$$
$$- \tfrac{1}{2}\cos 2\theta.\int_\infty -\partial\psi.\sqrt{\frac{2}{\mathfrak{Cos}^3 2\psi}} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\cos^3 2\theta.\int_\infty -\partial\psi.\sqrt{\frac{2}{\mathfrak{Cos}^7 2\psi}}$$
$$- \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\cos^5 2\theta.\int_\infty -\partial\psi.\sqrt{\frac{2}{\mathfrak{Cos}^{11} 2\psi}} - \dots$$

Setzen wir nun die Integrale

$$\int_\infty -\partial\psi.\sqrt{\frac{2}{\mathfrak{Cos}\,2\psi}} = U \quad \text{und} \quad \int_\infty -\partial\psi.\sqrt{\frac{2}{\mathfrak{Cos}^3 2\psi}} = \overset{1}{U},$$
$$\int_\infty -\partial\psi.\sqrt{\frac{2}{\mathfrak{Cos}^5 2\psi}} = \tfrac{1}{3}\overset{2}{U} \quad \text{und} \quad \int_\infty -\partial\psi.\sqrt{\frac{2}{\mathfrak{Cos}^7 2\psi}} = \tfrac{3}{5}\overset{3}{U},$$
$$\int_\infty -\partial\psi.\sqrt{\frac{2}{\mathfrak{Cos}^9 2\psi}} = \frac{1.5}{3.7}.\overset{4}{U} \quad \text{und} \quad \int_\infty -\partial\psi.\sqrt{\frac{2}{\mathfrak{Cos}^{11} 2\psi}} = \frac{3.7}{5.9}\overset{5}{U},$$
$$\int_\infty -\partial\psi.\sqrt{\frac{2}{\mathfrak{Cos}^{13} 2\psi}} = \frac{1.5.9}{3.7.11}.\overset{6}{U} \quad \text{und} \quad \int_\infty -\partial\psi.\sqrt{\frac{2}{\mathfrak{Cos}^{15} 2\psi}} = \frac{3.7.11}{5.9.13}\overset{7}{U}$$

u. s. w.,

so verwandelt sich die obige Reihe in

$$u = U + \frac{1^2}{2.4}\overset{2}{U}.\cos^2 2\theta + \frac{1^2.5^2}{2.4.6.8}\overset{4}{U}\cos^4 2\theta + \frac{1^2.5^2.9^2}{2.4.6.8.10.12}\overset{6}{U}\cos^6 2\theta + \dots$$
$$- \tfrac{1}{2}\overset{1}{U}\cos 2\theta - \frac{3^2}{2.4.6}\overset{3}{U}\cos^3 2\theta - \frac{3^2.7^2}{2.4.6.8.10}\overset{5}{U}\cos^5 2\theta$$
$$- \frac{3^2.7^2.11^2}{2.4.6.8.10.12.14}\overset{7}{U}\cos^7 2\theta - \dots,$$

und hierin sind die Functionen U, $\overset{2}{U}$, $\overset{3}{U}$, $\overset{4}{U}$ etc. unabhängig von dem Modul $k = \sin\theta$. Vertauschen wir θ mit $\frac{1}{2}\pi - \theta$, so verwandelt sich, da $\varPhi = \mathrm{am}\,u = \mathrm{am}'v$ sein soll, das Argument u in v, und $\cos 2\theta$ in $-\cos 2\theta$: daher ist

$$7. \begin{cases} \dfrac{v+u}{2} = U + \dfrac{1^2}{2.4}\overset{2}{U}\cos^2 2\theta + \dfrac{1^2.5^2}{2.4.6.8}\overset{4}{U}\cos^4 2\theta \\ \qquad + \dfrac{1^2.5^2.9^2}{2.4.6.8.10.12}\overset{6}{U}\cos^6 2\theta + \dots \quad \text{und} \\ \dfrac{v-u}{2} = \tfrac{1}{2}\overset{1}{U}\cos 2\theta + \dfrac{3^2}{2.4.6}\overset{3}{U}\cos^3 2\theta + \dfrac{3^2.7^2}{2.4.6.8.10}\overset{5}{U}\cos^5 2\theta \\ \qquad + \dfrac{3^2.7^2.11^2}{2.4.6.8.10.12.14}\overset{7}{U}\cos^7 2\theta + \dots, \end{cases}$$

und es bleiben nun nur noch die Functionen $U, \overset{1}{U}, \overset{2}{U}, \overset{3}{U}$ etc. der Amplitude Φ zu ermitteln übrig. Bilden diese eine convergirende Reihe, so haben die vorstehenden Reihen eine um so gröfsere Convergenz.

Anmerkung. Setzen wir $\theta = 0$, so wird $u = \Phi$ und $v = \mathfrak{L}\Phi$: daher haben wir noch die besonderen Reihen

$$8. \quad \begin{cases} \dfrac{\mathfrak{L}\varphi + \varphi}{2} = U + \dfrac{1^2}{2.4}\overset{2}{U} + \dfrac{1^2.5^2}{2.4.6.8}\overset{4}{U} + \dfrac{1^2.5^2.9^2}{2.4.6.8.10.12}\overset{6}{U} + \ldots., \\ \dfrac{\mathfrak{L}\varphi - \varphi}{2} = \tfrac{1}{2}\overset{1}{U} + \dfrac{3^2}{2.4.6}\overset{3}{U} + \dfrac{3^2.7^2}{2.4.6.8.10}\overset{5}{U} + \dfrac{3^2.7^2.11^2}{2.4.6.8.10.12.14}\overset{7}{U} + \ldots. \end{cases}$$

§. 274.

Nehmen wir nun die einzelnen, nur von der Amplitude $\Phi = \operatorname{am} u = \operatorname{am}' v$ abhängenden Integrale in Betracht, so finden wir

$$1. \quad U = \int_\infty -\partial\psi \sqrt{\frac{2}{\mathfrak{Cos}\, 2\psi}} = \int_0 \frac{2\partial t}{\sqrt{(1+t^4)}} \quad \text{oder auch} \quad U = \int_0 \frac{\partial\varphi}{\sqrt{(1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi)}},$$

d. h. *es ist* Φ *auch die Amplitude des Argumentes* U *mit Beziehung auf den Modul* $k = \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \sin\tfrac{1}{4}\pi$.

Die Werthe dieses Integrals U kann man für jede Amplitude Φ aus den von *Legendre* berechneten Tafeln entnehmen, und es darf sein Werth insofern als bekannt angesehen werden. Indessen wird es sich bald zeigen, dafs man auch ohne Vermehrung der Arbeit den Werth des Integrals U durch dieselbe Rechnung findet, wodurch man die Werthe von u und v ermittelt. Setzt man in den Reihen (7) $\theta = \tfrac{1}{4}\pi$, so wird in der That $u = v = U$; was mit dem so eben gefundenen Resultate übereinstimmt.

Da $\partial U = \dfrac{\partial U}{\mathfrak{Cos}\, 2\psi}$ ist, so erhält man

$$2. \quad \overset{1}{U} = \int_0 \frac{4t^2\,\partial t}{\sqrt{(1+t^4)^3}}, \quad \overset{1}{U} = \int_0 \frac{\sin^2\varphi.\partial\varphi}{2\sqrt{(1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi)^3}}.$$

Dieses Integral hängt von einem Modular-Integrale der ersten Art ab, welches den Modul $\sin\tfrac{1}{4}\pi = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$ hat. Setzen wir

$$3. \quad V = \int_0 \partial\Phi\, \sqrt{(1 - \tfrac{1}{2}\sin^2\Phi)},$$

wählen für den Modular- und für den elliptischen Quadranten, welcher zu dem Modul $\sin\tfrac{1}{4}\pi$ gehört, die Zeichen I und G: setzen wir nämlich, wie in §. 270.,

$$4. \quad \begin{cases} I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{(1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi)}} = 1{,}85407\,46773\,01, \\ G = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \partial\Phi\,\sqrt{(1-\tfrac{1}{2}\sin^2\Phi)} = 1{,}35064\,38810\,48 \quad \text{(nach } \textit{Legendre}\text{)}, \end{cases}$$

und setzen wir aufserdem, mit Beziehung auf den Modul $\sin\frac{1}{4}\pi$, die Amplitude $\varphi = \text{am}\, U$, so reducirt sich das Integral (2.) auf

$$\overset{1}{U} = \int_0 \text{cnc}^2 U . \partial U \quad \text{für} \quad k = \sin\tfrac{1}{4}\pi;$$

daher ist nach §. 64.

$$\overset{1}{U} = \frac{G - \text{elc}\, U - k'^2 U}{k^2} = \frac{\text{el}\, U - k^2 \,\text{sn}\, U\, \text{snc}\, U - k'^2 U}{k^2} \quad \text{für } k = \sin\tfrac{1}{4}\pi, \text{ oder}$$

$$5. \quad \overset{1}{U} = 2.V - U - \frac{\sin\varphi \cos\varphi}{\sqrt{(1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi)}}.$$

Drückt man den periodischen Theil des Integrals $\overset{1}{U}$ durch t und ψ aus, so hat man die Ausdrücke

$$6. \quad \overset{1}{U} = 2.V - U - \mathfrak{Tang}\,\psi \sqrt{\frac{2}{\mathfrak{Cos}\,2\psi}} \quad \text{und} \quad \overset{1}{U} = 2.V - U - \frac{1-t^2}{1+t^2} \cdot \frac{2t}{\sqrt{(1+t^4)}}.$$

Setzen wir, mit Beziehung auf die Ausdrücke der übrigen Integrale, noch $\text{amc}\, U = \varphi'$, so dafs

$$7. \quad \text{tang}\,\varphi . \text{tang}\,\varphi' = \sqrt{2}, \quad \sin\varphi' = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{(1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi)}}, \quad \cos\varphi' = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{2}.\sqrt{(1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi)}}$$

ist, so haben wir die Formel

$$8. \quad \overset{1}{U} = 2V - U - \sin\varphi \sin\varphi'.$$

Aufserdem ist noch

$$9. \quad \mathfrak{Cos}\,2\psi = \frac{1}{\cos^2\varphi'} = \frac{2\cot^2\varphi}{\sin^2\varphi'}.$$

Anmerkung. Werden U und $\overset{1}{U}$ nach Potenzen von $t = \text{tang}\frac{1}{2}\varphi$ entwickelt, so erhalten wir

$$U = 2\left(t - \frac{1}{2} \cdot \frac{t^5}{5} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{t^9}{9} - \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{t^{13}}{13} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} \cdot \frac{t^{17}}{17} - + \ldots\right),$$

$$\overset{1}{U} = 4\left(\frac{t^3}{3} - \frac{3}{2} \cdot \frac{t^7}{7} + \frac{3.5}{2.4} \cdot \frac{t^{11}}{11} - \frac{3.5.7}{2.4.6} \cdot \frac{t^{15}}{15} + \frac{3.5.7.9}{2.4.6.8} \cdot \frac{t^{19}}{19} - + \ldots\right).$$

Da nicht nur U, sondern auch V aus den von *Legendre* für den Modul $\sin\frac{1}{4}\pi$ berechneten Tafeln für jeden Werth von φ entnommen werden können, so ist die Anwendung dieser Reihen unnöthig.

§. 275.

Nachdem nun die Anfangsgröfsen U und $\overset{1}{U}$ in den Reihen (7. §. 273.) ermittelt worden sind, lassen sich leicht die nachfolgenden Gröfsen $\overset{2}{U}, \overset{3}{U}, \overset{4}{U}$ etc., welche als Coëfficienten in den genannten Reihen vorkommen, ebenfalls

ermitteln. Man überzeugt sich leicht von der Richtigkeit der Relation

$$n.\int_\infty -\partial\psi.\sqrt{\frac{2}{\mathfrak{Cos}^{n+2}2\psi}} = (n-2).\int_\infty -\partial\psi.\sqrt{\frac{2}{\mathfrak{Cos}^{n-2}2\psi}} - \mathfrak{Sin}\,2\psi.\sqrt{\frac{2}{\mathfrak{Cos}^{n}2\psi}}.$$

Setzt man hierin $n=3$, so erhält man

$$\overset{2}{U} = U - \mathfrak{Sin}\,2\psi.\sqrt{\frac{2}{\mathfrak{Cos}^3 2\psi}}.$$

Setzt man $n=5$, so hat man $\overset{3}{U} = \overset{1}{U} - \frac{1}{3}\mathfrak{Sin}\,2\psi.\sqrt{\frac{2}{\mathfrak{Cos}^5 2\psi}}$. So fortfahrend erhält man

$$\overset{4}{U} = \overset{2}{U} - \frac{3}{5}\mathfrak{Sin}\,2\psi.\sqrt{\frac{2}{\mathfrak{Cos}^7 2\psi}}$$

u. s. w.

Da überhaupt

$$\int_\infty -\partial\psi.\sqrt{\frac{2}{\mathfrak{Cos}^{4\alpha+1}2\psi}} = \frac{1.5.\,9\ldots.(4\alpha-3)}{3.7.11\ldots.(4\alpha-1)}.\overset{2\alpha}{U} \quad \text{und}$$

$$\int_\infty -\partial\psi.\sqrt{\frac{2}{\mathfrak{Cos}^{4\alpha+3}2\psi}} = \frac{3.7.11\ldots.(4\alpha-1)}{5.9.13\ldots.(4\alpha+1)}.\overset{2\alpha+1}{U}$$

zu setzen ist, so verwandelt sich die obige allgemeine Relation in die beiden folgenden:

$$\overset{2\alpha+2}{U} = \overset{2\alpha}{U} - \frac{3.7.11\ldots.(4\alpha-1)}{5.9.13\ldots.(4\alpha+1)}.\mathfrak{Sin}\,2\psi.\sqrt{\frac{2}{\mathfrak{Cos}^{4\alpha+3}2\psi}},$$

$$\overset{2\alpha+1}{U} = \overset{2\alpha-1}{U} - \frac{1.5.\,9\ldots.(4\alpha-3)}{3.7.11\ldots.(4\alpha-1)}.\mathfrak{Sin}\,2\psi.\sqrt{\frac{2}{\mathfrak{Cos}^{4\alpha+1}2\psi}}.$$

Setzen wir nun zu noch mehrerer Abkürzung

$$1.\quad \begin{cases} \varDelta = \mathfrak{Sin}\,2\psi.\sqrt{\frac{2}{\mathfrak{Cos}\,2\psi}}, \\ \overset{1}{\varDelta} = \mathfrak{Sin}\,2\psi.\sqrt{\frac{2}{\mathfrak{Cos}^3 2\psi}}, \\ \overset{2}{\varDelta} = \mathfrak{Sin}\,2\psi.\sqrt{\frac{2}{\mathfrak{Cos}^5 2\psi}}, \\ \overset{3}{\varDelta} = \mathfrak{Sin}\,2\psi.\sqrt{\frac{2}{\mathfrak{Cos}^7 2\psi}} \\ \quad\text{u. s. w.,} \end{cases}$$

so ist überhaupt

$$\overset{2\alpha+1}{\varDelta} = \mathfrak{Sin}\,2\psi.\sqrt{\frac{2}{\mathfrak{Cos}^{4\alpha+3}2\psi}} \quad \text{und} \quad \overset{2\alpha}{\varDelta} = \mathfrak{Sin}\,2\psi.\sqrt{\frac{2}{\mathfrak{Cos}^{4\alpha+1}2\psi}},$$

und also

$$\overset{2\alpha+2}{U} = \overset{2\alpha}{U} - \frac{3.7.11\ldots.(4\alpha-1)}{5.9.13\ldots.(4\alpha+1)}.\overset{2\alpha+1}{\varDelta}, \qquad \overset{2\alpha+1}{U} = \overset{2\alpha-1}{U} - \frac{1.5.9\ldots.(4\alpha-3)}{3.7.11\ldots.(4\alpha-1)}.\overset{2\alpha}{\varDelta}.$$

Diesen Formeln gemäfs erhalten wir nun die folgenden einfachen Ausdrücke:

$$2.\quad \begin{cases} \overset{2}{U} = U - \overset{1}{\varDelta}, \\ \overset{4}{U} = U - \overset{1}{\varDelta} - \frac{3}{5}.\overset{3}{\varDelta}, \\ \overset{6}{U} = U - \overset{1}{\varDelta} - \frac{3}{5}.\overset{3}{\varDelta} - \frac{3.7}{5.9}.\overset{5}{\varDelta}, \\ \overset{8}{U} = U - \overset{1}{\varDelta} - \frac{3}{5}.\overset{3}{\varDelta} - \frac{3.7}{5.9}.\overset{5}{\varDelta} - \frac{3.7.11}{5.9.13}.\overset{7}{\varDelta} \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

und

$$3.\quad \begin{cases} \overset{3}{U} = \overset{1}{U} - \frac{1}{3}.\overset{2}{\varDelta}, \\ \overset{5}{U} = \overset{1}{U} - \frac{1}{3}.\overset{2}{\varDelta} - \frac{1.5}{3.7}.\overset{4}{\varDelta}, \\ \overset{7}{U} = \overset{1}{U} - \frac{1}{3}.\overset{2}{\varDelta} - \frac{1.5}{3.7}.\overset{4}{\varDelta} - \frac{1.5.9}{3.7.11}.\overset{6}{\varDelta}, \\ \overset{9}{U} = \overset{1}{U} - \frac{1}{3}.\overset{2}{\varDelta} - \frac{1.5}{3.7}.\overset{4}{\varDelta} - \frac{1.5.9}{3.7.11}.\overset{6}{\varDelta} - \frac{1.5.9.13}{3.7.11.15}.\overset{8}{\varDelta}, \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Die Gröſsen $\varDelta$, $\overset{1}{\varDelta}$, $\overset{2}{\varDelta}$, $\overset{3}{\varDelta}$, $\overset{4}{\varDelta}$ etc., welche in den Ausdrücken (2.) und (3.) vorkommen, lassen sich leicht unmittelbar aus den Amplituden Φ und Φ' berechnen. Da nämlich $\mathfrak{Sin}\,2\psi = \frac{2\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$ und $\sqrt{\frac{2}{\mathfrak{Cos}\,2\psi}} = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{(1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi)}}$ ist, so ist $\varDelta = \frac{2\cos\varphi}{\sin\varphi\sqrt{(1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi)}}$, oder auch

$$\varDelta = 2.\frac{\sin\varphi'}{\sin\varphi},\ \text{ also }\ \overset{1}{\varDelta} = \varDelta.\cos^2\Phi',\quad \overset{2}{\varDelta} = \overset{1}{\varDelta}\cos^2\Phi' \text{ u. s. w. oder}$$

$$4.\quad \overset{1}{\varDelta} = \left(\frac{2\sin\varphi'}{\sin\varphi}\right)\cos^2\Phi',\quad \overset{2}{\varDelta} = \left(\frac{2\sin\varphi'}{\sin\varphi}\right)\cos^4\Phi',\quad \overset{3}{\varDelta} = \left(\frac{2\sin\varphi'}{\sin\varphi}\right)\cos^6\Phi'$$

u. s. w. allgemein

$$\overset{r}{\varDelta} = \left(\frac{2\sin'\varphi}{\sin\varphi}\right).\cos^{2r}\Phi'.$$

Die Gröſsen $\overset{1}{\varDelta}$, $\overset{2}{\varDelta}$, $\overset{3}{\varDelta}$, $\overset{4}{\varDelta}$ etc. verschwinden für $\Phi = 0$ und für $\Phi = \frac{1}{2}\pi$, und bilden im Uebrigen eine convergirende geometrische Progression.

Anmerkung. Da

$$\int_{\infty} -\partial\psi.\sqrt{\frac{2}{\mathfrak{Cos}^n e\psi}} = \int_0 \frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}}.\frac{\sin^{n-1}\varphi.\partial\varphi}{\sqrt{(1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi)^n}},$$

so kann dieses Integral in eine nach Potenzen von $\sin\Phi$ fortschreitende Reihe von der Form

$$\frac{1}{n.\sqrt{2^{n-1}}}(\sin^n\Phi + a.\sin^{n+1}\Phi + b\sin^{n+2}\Phi + \ldots.)\cos\Phi$$

entwickelt werden, in welcher kein Coëfficient unendlich wird, wenn man n

unendlich grofs nimmt. Eben deswegen ist aber Null die Grenze des Integrals, wenn n unendlich grofs genommen wird. Hieraus folgt leicht, dafs sich die Gröfsen

$$U,\ \overset{1}{U},\ \overset{2}{U},\ \overset{3}{U},\ \overset{4}{U} \text{ etc.}$$

im Fortgange immer mehr der Grenze Null nähern. Setzen wir aber in den Formeln für $\overset{2\alpha}{U}$ und $\overset{2\alpha+1}{U}$ die Zeigezahl $\alpha=\infty$, also $\overset{2\alpha}{U}=0$ und $\overset{2\alpha+1}{U}=0$, so erhalten wir die Reihen

$$5.\quad \begin{cases} U = \overset{1}{\varDelta} + \frac{3}{5}.\overset{3}{\varDelta} + \frac{3.7}{5.9}.\overset{5}{\varDelta} + \frac{3.7.11}{5.9.13}.\overset{7}{\varDelta} + \frac{3.7.11.15}{5.9.13.17}.\overset{9}{\varDelta} + \ldots, \\ \overset{1}{U} = \frac{1}{3}.\overset{2}{\varDelta} + \frac{1.5}{3.7}.\overset{4}{\varDelta} + \frac{1.5.\ 9}{3.7.11}.\overset{6}{\varDelta} + \frac{1.5.\ 9.13}{3.7.11.15}.\overset{8}{\varDelta} + \ldots, \end{cases}$$

welche aber nur so lange gelten, als $\varphi < \frac{1}{2}\pi$ ist. Ist φ auffallend kleiner als $\frac{1}{2}\pi$, so convergiren diese Reihen sehr rasch, und man wird dann U und $\overset{1}{U}$ mittelst derselben schneller berechnen, als man ihre Werthe aus den erwähnten Tafeln entnehmen kann, weil die in den beiden Reihen vorkommenden Glieder sämmtlich ohnehin bei Anwendung der Formeln (2.) und (3.) berechnet werden müssen.

§. 276.

Berechnung der Modular-Quadranten K und K' nach Reihen, welche einen Potenzen-Fortschritt mit dem Grundfactor $\cos 2\theta$ haben.

Setzen wir in den beiden Reihen (7. §. 273.) für $\frac{1}{2}(v+u)$ und $\frac{1}{2}(v-u)$ die Amplitude $\varphi=\frac{1}{2}\pi$, so wird $u=K$ und $v=K'$. Da nun für $\varphi=\frac{1}{2}\pi$, $\overset{1}{\varDelta}=\overset{2}{\varDelta}=\overset{3}{\varDelta}=\overset{4}{\varDelta}=\ldots=0$ wird, so wird auch

$$\overset{2}{U}=\overset{4}{U}=\overset{6}{U}=\overset{8}{U}=\ldots=U \quad\text{und}\quad \overset{3}{U}=\overset{5}{U}=\overset{7}{U}=\overset{9}{U}=\ldots=\overset{1}{U}.$$

Setzen wir nun noch

$$1.\quad \begin{cases} S = 1 + \frac{1^2}{2.4}\cos^2 2\theta + \frac{1^2.5^2}{2.4.6.8}\cos^4 2\theta + \frac{1^2.5^2.7^2}{2.4.6.8.10.12}\cos^6 2\theta \\ \qquad + \frac{1^2.5^2.7^2.9^2}{2.4.6.8.10.12.14.16}\cos^8 2\theta + \ldots, \\ D = \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{3^2}{2.4.6}\cos^3 2\theta + \frac{3^2.7^2}{2.4.6.8.10}\cos^5 2\theta \\ \qquad + \frac{3^2.7^2.11^2}{2.4.6.8.10.12.14}\cos^7 2\theta + \ldots, \end{cases}$$

so haben wir zunächst die beiden Ausdrücke

$$\tfrac{1}{2}(K'+K) = S.U \quad\text{und}\quad \tfrac{1}{2}(K'-K) = D.\overset{1}{U},$$

in welchen aber auch noch U und $\overset{1}{U}{}'$ so zu bestimmen sind, dafs $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ ist. Wenden wir die Bezeichnung §. 274. an, so haben wir jetzt $U = I = 1{,}85407\,46773\,01$, und $\overset{1}{U} = 2V - U - \sin\varphi \sin\varphi'$ reducirt sich auf $\overset{1}{U} = 2G - I = 0{,}84721\,30847\,95$; daher ist

$$2.\quad \begin{cases} \dfrac{K'+K}{2} = (1{,}85407\,46773\,01\ldots).S, \\[2mm] \dfrac{K'-K}{2} = (0{,}84721\,30847\,95\ldots).D. \end{cases}$$

Man kann auch die zweite Constante auf die erste I zurückführen. Da nämlich im Allgemeinen

$$KE' + K'E - KK' = \tfrac{1}{2}\pi$$

ist, so wird, wenn der Arcus θ des Moduls $= \frac{1}{4}\pi$ gesetzt wird, $K = K' = I$ und $E = E' = G$; daher verwandelt sich die Gleichung nun in $2G.I - I^2 = \frac{1}{2}\pi$. Es ist also $2G - I = \frac{1}{2}\pi . \frac{1}{I}$; mithin haben wir

$$3.\quad \frac{K'-K}{2} = S.I \quad \text{und} \quad \frac{K'-K}{2} = \tfrac{1}{2}\pi . \frac{D}{I}.$$

§. 277.

Umordnung der vorigen Reihen zur Berechnung von u und v aus $\varphi = \operatorname{am} u = \operatorname{am}' v$.

Hat man die beiden Modularquadranten K und K' nach den Formeln §. 276. berechnet, so lassen sich sehr leicht auch die Argumente u und v berechnen, welche zu einer beliebigen andern Amplitude $\varphi = \operatorname{am} u = \operatorname{am}' v$ gehören.

Subtrahiren wir von der Summe S nach einander die ersten Glieder derselben Reihe S, und berechnen wir also

$$S_1 = S - 1,$$

$$S_2 = S - 1 - \frac{1^2}{2.4}\cos^2 2\theta,$$

$$S_3 = S - 1 - \frac{1^2}{2.4}\cos^2 2\theta - \frac{1^2.5^2}{2.4.6.8}\cos^4 2\theta,$$

$$S_4 = S - 1 - \frac{1^2}{2.4}\cos^2 2\theta - \frac{1^2.5^2}{2.4.6.8}\cos^4 2\theta - \frac{1^2.5^2.7^2}{2.4.6.8.10.12}\cos^6 2\theta,$$

u. s. w.;

subtrahiren wir ebenso von der Summe D nach einander die ersten Glieder derselben Reihe D, und berechnen wir also

$$D_1 = D - \tfrac{1}{2}\cos 2\theta,$$
$$D_2 = D - \tfrac{1}{2}\cos 2\theta - \frac{3^2}{2.4.6}\cos^3 2\theta,$$
$$D_3 = D - \tfrac{1}{2}\cos 2\theta - \frac{3^2}{2.4.6}\cos^3 2\theta - \frac{3^2.7^2}{2.4.6.8.10}\cos 2\theta,$$
$$D_4 = D - \tfrac{1}{2}\cos 2\theta - \frac{3^2}{2.4.6}\cos^3 2\theta - \frac{3^2.7^2}{2.4.6.8.10}\cos^5 2\theta - \frac{3^2.7^2.11^2}{2.4.6.8.10.12.14}\cos^7 2\theta$$

u. s. w.

und substituiren wir in den Reihen (7. §. 273.) für $\overset{2}{U}, \overset{3}{U}, \overset{4}{U}, \overset{5}{U}, \overset{6}{U}$ etc. die in §. 275. gefundenen Ausdrücke (2.) und (3.) dieser Gröfsen, so erhalten wir mit Anwendung der vorhin angegebenen Bezeichnung sofort die Reihen:

$$\tfrac{1}{2}(v+u) = S.U - S_1.\overset{1}{\varDelta} - \tfrac{3}{5}.S_2.\overset{3}{\varDelta} - \frac{3.7}{5.9}.S_3.\overset{5}{\varDelta} - \frac{3.7.11}{5.9.13}.S_4.\overset{7}{\varDelta} - \frac{3.7.11.15}{5.9.13.17}.S_5.\overset{9}{\varDelta} - \dots$$

und

$$\tfrac{1}{2}(v-u) = D.\overset{1}{U} - \tfrac{1}{3}D_1.\overset{2}{\varDelta} - \frac{1.5}{3.7}.D_2.\overset{4}{\varDelta} - \frac{1.5.9}{3.7.11}.D_3.\overset{6}{\varDelta} - \frac{1.5.\ 9.13}{3.7.11.15}.D_4.\overset{8}{\varDelta} - \dots,$$

welchen gemäfs man aus $\varphi = \operatorname{am} u = \operatorname{am}' v$ die Argumente u und v gleichzeitig berechnen kann. Bei Anwendung dieser Reihen wird man die Werthe der Integrale

$$U = \int_0 \frac{\partial\varphi}{\sqrt{(1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi)}} \quad \text{und} \quad V = \int_0 \partial\varphi\sqrt{(1-\tfrac{1}{2}\sin^2\varphi)}$$

aus den Tafeln von *Legendre* entnehmen, woraus dann sofort $\overset{1}{U}$ nach der Formel

$$\overset{1}{U} = 2V - U - \sin\varphi\sin\varphi'$$

§. 274. folgt. Die Gröfsen $\overset{1}{\varDelta}, \overset{2}{\varDelta}, \overset{3}{\varDelta}$ etc. sind gemäfs (§. 375.)

$$\varDelta = \frac{2\sin\varphi'}{\sin\varphi}, \quad \overset{1}{\varDelta} = \varDelta.\cos^2\varphi', \quad \overset{2}{\varDelta} = \varDelta.\cos^4\varphi', \quad \overset{3}{\varDelta} = \varDelta.\cos^6\varphi', \text{ etc.}$$

und die Amplituden φ und φ' hängen der Formel $\operatorname{tang}\varphi.\operatorname{tang}\varphi' = \sqrt{2}$ gemäfs von einander ab. Die vorstehenden Reihen sind wegen des hohen Grades der Convergenz beachtungswerth.

Anmerkung. Setzt man

$$\sqrt{x} = \frac{(k+k')\sin\varphi}{\operatorname{dn}u + \operatorname{dn}'v}, \text{ oder } \sin^2\varphi = \frac{2(1+\lambda)x}{(1+x)(1+\lambda x)}, \quad \cos^2\varphi = \frac{(1-x)(1-\lambda x)}{(1+x)(1+\lambda x)},$$

$\mathrm{dn}^2 u = \frac{(1-\sqrt{\lambda}.x)^2}{(1+x)(1+\lambda x)}$, $\mathrm{dn}'^2 v = \frac{(1+\sqrt{\lambda}.x)^2}{(1+x)(1+\lambda x)}$, $k^2 = \sin^2\theta = \frac{(1-\sqrt{\lambda})^2}{2(1+\lambda)}$, $k'^2 = \cos^2\theta = \frac{(1+\sqrt{\lambda})^2}{2(1+\lambda)}$, so ist, wie *Legendre* gefunden und *Jacobi* im 8ten Bande des Journals der Mathematik von *Crelle* pag. 415 berichtet hat,

$$\tfrac{1}{2}(v+u) = \int_0 \sqrt{\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)} \cdot \frac{\partial x}{\sqrt{[x(1-x^2)(1-\lambda^2 x^2)]}} \text{ und}$$

$$\tfrac{1}{2}(v-u) = \int_0 \sqrt{\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)} \cdot \frac{\sqrt{x}.\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1-\lambda^2 x^2)]}}.$$

Daher lassen sich diese beiden Integrale ebenfalls unmittelbar nach den vorhin entwickelten Reihen berechnen. Insofern die vorstehenden Relationen nur specielle Formen von allgemeineren sind, welche von *Jacobi* an der vorhingenannten Stelle pag. 416 bekannt gemacht wurden, liegen sie schon jenseits der Grenzen dieses Werks.

§. 278.

Reihen zur Berechnung von $\mathrm{el}\,u$ und $\mathrm{el}'v$ aus $\varphi = \mathrm{am}\,u = \mathrm{am}'v$, welche nach Potenzen von $\cos 2\theta$ entwickelt sind.

Nach §. 271. ist $\mathrm{el}\,u = \int_0 \frac{2\partial t\sqrt{(1+2.\cos 2\theta.t^2+t^4)}}{(1+t^2)^2}$. Setzen wir nun wieder $t = e^{-\psi}$, so erhalten wir, wenn wir den vorigen Ausdruck zuerst also darstellen:

$$\mathrm{el}\,u = \int_0 \frac{\partial t}{t} \cdot \frac{\sqrt{2}.\sqrt{(\frac{1}{2}(t^2+t^{-2})+\cos 2\theta)}}{1+\frac{1}{2}(t^2+t^{-2})},$$

auf der Stelle die Formel

$$\mathrm{el}\,u = \int_0 \frac{-\partial\psi.\sqrt{2}.\sqrt{(\mathrm{Cos}\,2\psi+\cos 2\theta)}}{1+\mathrm{Cos}\,2\psi}.$$

Durch Entwicklung erhält man ein von $\cos 2\theta$ unabhängiges Anfangsglied, welches $= \int_0 \partial\varphi\sqrt{(1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi)} = V$ ist. Die Reihe wird also, wenn wir überhaupt $\int_\infty \frac{-\partial\psi}{1+\mathrm{Cos}\,2\psi}\sqrt{\frac{2}{\mathrm{Cos}^{2r+1}2\psi}} = T_r$ setzen,

$$1.\quad \mathrm{el}\,u = V + \tfrac{1}{2}.T_0\cos 2\theta - \frac{1}{2.4}.T_1\cos^2 2\theta - \frac{1.3}{2.4.6}.T_2.\cos^3 2\theta$$
$$- \frac{1.3.5}{2.4.6.8}.T_3.\cos^4 2\theta + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}.T_4.\cos^5 2\theta - + \ldots.$$

Setzen wir wieder $U = \int_0 \frac{\partial\varphi}{\sqrt{(1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi)}}$, so findet sich das Integral

$$T_0 = U - V.$$

Setzen wir nun noch das Integral

$$\int_\infty -\partial\psi \sqrt{\frac{2}{\mathfrak{Cos}^{2r+1} 2\psi}} = t_r,$$

so findet sich die einfache Relation

$$T_r = t_r - T_{(r-1)}.$$

Die Integrale t_0, t_1, t_2, t_3, t_4 etc. sind in §. 274. und §. 275. gefunden worden, und hieraus lassen sich die Integrale T_1, T_2, T_3, T_4 etc. berechnen. Man hat

$$T_0 = U - V,$$
$$T_1 = t_1 - U + V,$$
$$T_2 = t_2 - t_1 + U - V,$$
$$T_3 = t_3 - t_2 + t_1 - U + V,$$
$$T_4 = t_4 - t_3 + t_2 - t_1 + U - V,$$

u. s. w.

Werden diese Werthe in der vorigen Reihe substituirt, so erhält V als Coëfficienten die Reihe

$$1 - \tfrac{1}{2}\cos 2\theta - \frac{1}{2.4}\cos^2 2\theta - \frac{1.3}{2.4.6}\cos^3 2\theta - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}\cos^4 2\theta - \ldots$$
$$= \sqrt{(1 - \cos 2\theta)}.$$

U erhält den Coëfficienten $1 - \sqrt{(1 - \cos 2\theta)}$;

t_1 den Coëfficienten $1 - \frac{1}{2}\cos 2\theta - \sqrt{(1 - \cos 2\theta)}$;

t_2 den Coëfficienten $1 - \frac{1}{2}\cos 2\theta - \frac{1}{2.4}\cos^2 2\theta - \sqrt{(1 - \cos 2\theta)}$; u. s. w.;

daher ist mit Anwendung der Bezeichnung des §. 273.

$$2.\quad \mathrm{el}\, u = V.\sqrt{(1-\cos\theta)} + U[1 - \sqrt{(1 - \cos 2\theta)}]$$
$$- \overset{1}{U}[1 - \tfrac{1}{2}\cos 2\theta - \sqrt{(1 - \cos 2\theta)}]$$
$$+ \tfrac{1}{3}\overset{2}{U}\left[1 - \tfrac{1}{2}\cos 2\theta - \frac{1}{2.4}\cos^2 2\theta - \sqrt{(1 - \cos 2\theta)}\right]$$
$$- \tfrac{3}{5}\overset{3}{U}\left[1 - \tfrac{1}{2}\cos 2\theta - \frac{1}{2.4}\cos^2 2\theta - \frac{1.3}{2.4.6}\cos^3 2\theta - \sqrt{(1 - \cos 2\theta)}\right]$$
$$+ \frac{1.5}{3.7}\overset{4}{U}\left[1 - \tfrac{1}{2}\cos 2\theta - \frac{1}{2.4}\cos^2 2\theta - \frac{1.3}{2.4.6}\cos^3 2\theta - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}\cos^5 2\theta - \sqrt{(1 - \cos 2\theta)}\right]$$
$$+ \text{etc.}$$

Diese Reihe hat einen hohen Grad der Convergenz, und die Rechnung nach ihr ist sehr bequem, zumal dann, wenn man das Argument u bereits nach den Formeln (7. §. 273.) und nach den Formeln §. 274. und §. 275. berechnet

hat, weil dann schon die sämmtlichen Coëfficienten $V, U, \overset{1}{U}, \overset{2}{U}, \overset{3}{U}, \overset{4}{U}$ etc. bekannt geworden sind.

Die in dieser Reihe vorkommenden eingeschlossenen Factoren vertreten nun die nach Potenzen von $\cos 2\theta$ fortschreitenden Reihen, durch deren Summation sie entstanden sind.

Die Rechnung läfst sich aber auch, wenn die Gröfsen $U, \overset{1}{U}, \overset{2}{U}, \overset{3}{U}$ etc. schon bei der Berechnung von u und v aus $\varphi = \operatorname{am} u = \operatorname{am}' v$ bekannt sind, auch nach der Reihe (1.) ausführen. Man hat dann

$$-T_0 = V - U,$$
$$+T_1 = V - U + \overset{1}{U},$$
$$-T_2 = V - U + \overset{1}{U} - \tfrac{1}{3}\overset{2}{U},$$
$$+T_3 = V - U + \overset{1}{U} - \tfrac{1}{3}\overset{2}{U} + \tfrac{3}{5}\overset{3}{U},$$
$$-T_4 = V - U + \overset{1}{U} - \tfrac{1}{3}\overset{2}{U} + \tfrac{3}{5}\overset{3}{U} - \frac{1.5}{3.7}\overset{4}{U},$$
$$+T_5 = V - U + \overset{1}{U} - \tfrac{1}{3}\overset{2}{U} + \tfrac{3}{5}\overset{3}{U} - \frac{1.5}{3.7}\overset{4}{U} + \frac{3.7}{5.9}\overset{5}{U},$$
$$-T_6 = V - U + \overset{1}{U} - \tfrac{1}{3}\overset{2}{U} + \tfrac{3}{5}\overset{3}{U} - \frac{1.5}{3.7}\overset{4}{U} + \frac{3.7}{5.9}\overset{5}{U} - \frac{1.5.\ 9}{3.7.11}\overset{6}{U},$$
$$+T_7 = V - U + \overset{1}{U} - \tfrac{1}{3}\overset{2}{U} + \tfrac{3}{5}\overset{3}{U} - \frac{1.5}{3.7}\overset{4}{U} + \frac{3.7}{5.9}\overset{5}{U} - \frac{1.5.\ 9}{3.7.11}\overset{6}{U} + \frac{3.7.11}{5.9.13}\overset{7}{U}$$

u. s. w.

Werden diese Werthe benutzt, so hat man

$$3.\quad \begin{cases} \dfrac{\operatorname{el} u + \operatorname{el}' v}{2} = V - \dfrac{1}{2.4} T_1 . \cos^2 2\theta - \dfrac{1.3.5}{2.4.6.8} T_3 . \cos^4 2\theta \\ \qquad\qquad - \dfrac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10.12} T_5 . \cos^6 2\theta - \ldots, \\ \dfrac{\operatorname{el} u - \operatorname{el}' v}{2} = \tfrac{1}{2} T_0 . \cos 2\theta + \dfrac{1.3}{2.4.6} T_2 . \cos^3 2\theta + \dfrac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10} T_4 . \cos^5 2\theta \\ \qquad\qquad + \dfrac{1.3.5.7.9.11}{2.4.6.8.10.12.14} T_6 . \cos^7 2\theta + \ldots \end{cases}$$

Beachtet man, dafs $\dfrac{\sqrt{(1+\cos 2\theta)} \pm \sqrt{(1-\cos 2\theta)}}{2} = \dfrac{\cos\theta \pm \sin\theta}{\sqrt{2}} = \cos(\tfrac{1}{4}\pi \mp \theta)$ ist, so folgen aus der Reihe (2.) noch zwei andere, worin sich je zwei Glieder vereinigen lassen, nämlich:

$$
4.\quad \left\{ \begin{aligned}
\frac{\operatorname{el} u + \operatorname{el}' v}{2} &= V\cos(\tfrac{1}{4}\pi - \theta) + (U - \overset{1}{U})(1 - \cos(\tfrac{1}{4}\pi - \theta)) \\
&+ (\tfrac{1}{3}\overset{2}{U} - \tfrac{3}{5}\overset{3}{U})\left(1 - \frac{1}{2.4}\cos^2 2\theta - \cos(\tfrac{1}{4}\pi - \theta)\right) \\
&+ \left(\frac{1.5}{3.7}\overset{4}{U} - \frac{3.7}{5.9}\overset{5}{U}\right)\left(1 - \frac{1}{2.4}\cos^2 2\theta - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}\cos^4 2\theta - \cos(\tfrac{1}{4}\pi - \theta)\right) \\
&+ \left(\frac{1.5.9}{3.7.11}\overset{6}{U} - \frac{3.7.11}{5.9.13}\overset{7}{U}\right)\left(1 - \frac{1}{2.4}\cos^2 2\theta - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}\cos^4 2\theta \right. \\
&\qquad\qquad \left. - \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10.12}\cos^6 2\theta - \cos(\tfrac{1}{4}\pi - \theta)\right) \\
&+ \ldots\ldots \text{ und} \\
\frac{\operatorname{el} u - \operatorname{el}' v}{2} &= (U - V)\sin(\tfrac{1}{4}\pi - \theta) + (\overset{1}{U} - \tfrac{1}{3}\overset{2}{U})(\tfrac{1}{2}\cos 2\theta - \sin(\tfrac{1}{4}\pi - \theta)) \\
&+ \left(\tfrac{3}{5}\overset{3}{U} - \frac{1.5}{3.7}\overset{4}{U}\right)\left(\tfrac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1.3}{2.4.6}\cos^3 2\theta - \sin(\tfrac{1}{4}\pi - \theta)\right) \\
&+ \left(\frac{3.7}{5.9}\overset{5}{U} - \frac{1.5.9}{3.7.11}\overset{6}{U}\right)\left(\tfrac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1.3}{2.4.6}\cos^3 2\theta \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}\cos^5 2\theta - \sin(\tfrac{1}{4}\pi - \theta)\right) \\
&+ \left(\frac{3.7.11}{5.9.13}\overset{7}{U} - \frac{1.5.9.13}{3.7.11.15}\overset{8}{U}\right)\left(\tfrac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1.3}{2.4.6}\cos^3 2\theta \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}\cos^5 2\theta + \frac{1.3.5.7.9.11}{2.4.6\ldots14}\cos^7 2\theta - \sin(\tfrac{1}{4}\pi - \theta)\right) \\
&+ \ldots\ldots,
\end{aligned} \right.
$$

welche Reihen einen hohen Grad der Convergenz haben.

Neunzehnter Abschnitt.

§. 279.

Umformung der Gleichung $x = \operatorname{sn} u$ in eine ähnliche mit einem andern Argumente und einem andern Modul durch eine Substitution des dritten Grades.

Setzt man $y = \frac{(1+k)x}{1+kx^2}$ und $x = \operatorname{sn} u$ mit dem Modul k und ferner $y = \operatorname{sn} v$ mit dem Modul λ, so ist bekanntlich $v = (1+k)u$ und $\lambda = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}$. Die höchste Potenz von x, welche in dem rationalen Bruche $y = \frac{(1+k)x}{1+kx^2}$ vorkommt, ist vom zweiten Grade, und aus diesem Grunde wird der ganzen Substitution, eigentlich dem zu substituirenden Bruche, der zweite Grad zugeschrieben.

Eine Substitution dritten Grades bietet der Bruch

$$y = \frac{A+Bx+Cx^2+Dx^3}{A'+B'x+C'x^2+D'x^3}$$

dar, und es fragt sich nun, ob durch eine solche Substitution die Gleichung

$$v = \int_0 \frac{\partial y}{\sqrt{(1-y^2)}\sqrt{(1-\lambda^2 y^2)}}$$

in eine ähnliche

$$u = \int_0 \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}\sqrt{(1-k^2 x^2)}}$$

umgeformt werden könne, vorausgesetzt, dafs das Verhältnifs der Argumente u und v constant sein soll und also in der Gleichung

$$v = \mu . u$$

der Multiplicator μ nur von dem Modul k oder λ abhängt. Da der Gleichung $v = \mu . u$ gemäfs für $u = 0$ auch $v = 0$ sein, ferner v in $-v$ übergehen mufs, wenn $-u$ statt u gesetzt wird, so mufs für $x = 0$ auch $y = 0$ werden und y in $-y$ übergehen, wenn x in $-x$ verwandelt wird. Diese Bedingungen werden befriedigt, wenn man setzt

$$A = 0, \quad C = 0, \quad B' = 0, \quad D' = 0.$$

Der zu substituirende Bruch hat also die Form

$$y = \frac{ax+bx^3}{1+cx^2} \quad \text{oder} \quad \operatorname{sn} v = \frac{a . \operatorname{sn} u + b \operatorname{sn}^3 u}{1+c \operatorname{sn}^2 u},$$

wenn man die Modularfunctionen des Argumentes u auf den Modul k, und die des Argumentes v auf den unbekannten Modul λ bezieht.

Wir bezeichnen die den Moduln λ und $\lambda' = \sqrt{(1-\lambda^2)}$ zugehörigen Modularquadranten durch L und L', so wie wir die zu den Moduln k und k' gehörigen Modularquadranten durch K und K' bezeichnen. Soll, wie bei der Substitution zweiten Grades, $v = L$ werden für $u = K$, so mufs $y = 1$ werden für $x = 1$: daher haben wir die Bedingung

$$\frac{a+b}{1+c} = 1 \quad \text{oder} \quad a+b-c-1 = 0.$$

Setzen wir bei der Substitution zweiten Grades $u + iK'$ statt u, also $\frac{1}{kx}$ statt x, so bleibt y ungeändert; eine andere Bewandtnifs hat es mit dem vorstehenden Werthe von y. Setzen wir da $u + iK'$ statt u, also $\frac{1}{kx}$ statt x, so verwandelt sich derselbe in

$$\frac{b+ak^2x^2}{ckx+k^3x^3},$$

woraus wir schliefsen, dafs sich v in $v + iL'$ verwandelt $\left(\text{also } y \text{ in } \frac{1}{\lambda y}\right)$,

wenn $u+iK'$ statt u gesetzt wird. Setzen wir aber

$$\lambda y = \frac{ckx+k^3x^3}{b+ak^2x^2},$$

so ist

$$y = \frac{\frac{ck}{b\lambda}x+\frac{k^3}{b\lambda}.x^3}{1+\frac{ak^2}{b}x^2},$$

und damit dieser Bruch mit dem anfänglichen übereinstimme, mufs

$$ck = ab.\lambda, \quad k^3 = b^2.\lambda, \quad ak^2 = bc$$

sein. Diese Gleichungen gelten nur soviel als zwei, weil aus zweien von ihnen die dritte folgt. Die ermittelten Bedingungsgleichungen reichen also zur Bestimmung der Gröfsen a, b, c und λ noch nicht hin.

Aus den vorigen Formeln leiten wir aber noch her

$$1+y = \frac{(1+x)(1-(1-a)x+bx^2)}{1+(a+b-1)x^2},$$

$$1-y = \frac{(1-x)(1+(1-a)x+bx^2)}{1+(a+b-1)x^2},$$

$$1+\lambda y = \frac{(1+kx)(k^2x^2-(1-a)kx+b)}{b+ak^2x^2},$$

$$1-\lambda y = \frac{(1-kx)(k^2x^2+(1-a)kx+b)}{b+ak^2x^2},$$

und diese Ausdrücke müssen der Gleichung

$$\frac{\partial y}{\sqrt{((1+y)(1-y)(1+\lambda y)(1-\lambda y))}} = \mu.\frac{\partial x}{\sqrt{((1+x)(1-x)(1+kx)(1-kx))}}$$

Genüge leisten, also auch der Gleichung

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \mu.\sqrt{\frac{(1+y)(1-y)(1+\lambda y)(1-\lambda y)}{(1+x)(1-x)(1+kx)(1-kx)}}.$$

Da nun $\frac{\partial y}{\partial x}$ ein rationaler Bruch ist, so mufs auch der Ausdruck auf der rechten Seite rational sein, und diese Bedingung wird erfüllt, wenn $1-(1-a)x+bx^2$ ein vollkommenes Quadrat ist. Setzen wir aber

$$a-1 = 2\alpha \quad \text{und} \quad b = \alpha^2,$$

so ist

$$1. \quad \begin{cases} a = 1+2\alpha, \\ b = \alpha^2, \\ c = \alpha^2+2\alpha, \\ k^2 = \frac{\alpha^3(\alpha+2)}{1+2\alpha}, \qquad k'^2 = \frac{(1+\alpha)^3(1-\alpha)}{2\alpha+1}, \\ \lambda^2 = \frac{(\alpha+2)^3.\alpha}{(1+2\alpha)^3}, \qquad \lambda'^2 = \frac{(1-\alpha)^3.(1+\alpha)}{(2\alpha+1)^3}. \end{cases}$$

Ferner haben wir nun

$$2.\quad \operatorname{sn} v = \frac{(1+2\alpha)\operatorname{sn} u + \alpha^2 \operatorname{sn}^3 u}{1+(\alpha^2+2\alpha)\operatorname{sn}^2 u},$$

$$3.\quad \begin{cases} 1+\operatorname{sn} v = \dfrac{(1+\operatorname{sn} u).(1+\alpha \operatorname{sn} u)^2}{1+(\alpha^2+2\alpha)\operatorname{sn}^2 u}, \\ 1-\operatorname{sn} v = \dfrac{(1-\operatorname{sn} u)(1-\alpha \operatorname{sn} u)^2}{1+(\alpha^2+2\alpha)\operatorname{sn}^2 u}, \end{cases}$$

$$4.\quad \begin{cases} 1+\lambda \operatorname{sn} v = \dfrac{(1+k\operatorname{sn} u).(\alpha+k\operatorname{sn} u)^2}{\alpha^2+(2\alpha+1)k^2 \operatorname{sn}^2 u}, \\ 1-\lambda \operatorname{sn} v = \dfrac{(1-k\operatorname{sn} u)(\alpha-k\operatorname{sn} u)^2}{\alpha^2+(2\alpha+1)k^2 \operatorname{sn}^2 u}, \end{cases}$$

$$5.\quad \operatorname{cn} v = \frac{\operatorname{cn} u.(1-\alpha^2 \operatorname{sn}^2 u)}{1+(\alpha^2+2\alpha)\operatorname{sn}^2 u},$$

$$6.\quad \operatorname{dn} v = \frac{\operatorname{dn} u.(\alpha^2-k^2\operatorname{sn}^2 u)}{\alpha^2+(2\alpha+1)k^2\operatorname{sn}^2 u} = \frac{\operatorname{dn} u}{2\alpha+1}.\frac{1+2\alpha-(\alpha^2+2\alpha)\operatorname{sn}^2 u}{1+(\alpha^2+2\alpha)\operatorname{sn}^2 u}.$$

Die Formeln für $\operatorname{cn} v$ und $\operatorname{dn} v$ lassen sich auch also darstellen:

$$7.\quad \begin{cases} \operatorname{cn} v = \dfrac{(1-\alpha^2)\operatorname{cn} u+\alpha^2 \operatorname{cn}^3 u}{(\alpha+1)^2-(\alpha^2+2\alpha)\operatorname{cn}^2 u}, \\ \operatorname{dn} v = \dfrac{\operatorname{dn}^3 u-(1-\alpha^2)\operatorname{dn} u}{(\alpha+1)^2-(2\alpha+1)\operatorname{dn}^2 u}. \end{cases}$$

Endlich hat man noch

$$8.\quad \operatorname{tn} v = \operatorname{tn} u.\frac{1+2\alpha+\alpha^2\operatorname{sn}^2 u}{1-\alpha^2\operatorname{sn}^2 u} = \frac{(1+2\alpha)\operatorname{tn} u+(1+\alpha)^2\operatorname{tn}^3 u}{1+(1-\alpha^2)\operatorname{tn}^2 u}.$$

Differentiirt man die Formel (2.), so erhält man

$$\operatorname{cn} v.\operatorname{dn} v.\partial v = \frac{2\alpha+1-2(\alpha^3+\alpha^2+\alpha)\operatorname{sn}^2 u+\alpha^3(\alpha+2)\operatorname{sn}^4 u}{(1+(\alpha^2+2\alpha)\operatorname{sn}^2 u)^2}.\operatorname{cn} u\operatorname{dn} u.\partial u,$$

und da auch

$$\operatorname{cn} v.\operatorname{dn} v = \frac{2\alpha+1-2(\alpha^3+\alpha^2+\alpha)\operatorname{sn}^2 u+\alpha^3(\alpha+2)\operatorname{sn}^4 u}{(1+(\alpha^2+2\alpha)\operatorname{sn}^2 u)^2}.\frac{\operatorname{cn} u.\operatorname{dn} u}{2\alpha+1}$$

ist, so erhalten wir $\partial v = (2\alpha+1).\partial u$, mithin

$$9.\quad v = (2\alpha+1).u.$$

Der constante Multiplicator μ ist hiernach $= 2\alpha+1$. Aus den Formeln (2.) und (5.) leiten wir her:

$$\operatorname{sn} v+\operatorname{sn} u = \frac{2(\alpha+1)\operatorname{sn} u.(1+\alpha\operatorname{sn}^2 u)}{1+(\alpha^2+2\alpha)\operatorname{sn}^2 u} \quad \text{und}$$

$$\operatorname{cn} v+\operatorname{cn} u = \frac{2\operatorname{cn} u.(1+\alpha\operatorname{sn}^2 u)}{1+(\alpha^2+2\alpha)\operatorname{sn}^2 u};$$

daher haben wir endlich

$$\frac{\operatorname{sn} v+\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} v+\operatorname{cn} u} = (\alpha+1).\operatorname{tn} u, \quad \text{oder} \quad \operatorname{tang}\left(\frac{\operatorname{am} v+\operatorname{am} u}{2}\right) = (\alpha+1)\operatorname{tn} u,$$

mithin

$$10. \quad \mathrm{am}\, v = -\mathrm{am}\, u + 2 \operatorname{arc\,tang}((\alpha+1)\operatorname{tn} u).$$

Hieraus folgt nun, dafs, wenn α positiv ist $v > u$ und auch $\mathrm{am}\, v > \mathrm{am}\, u$ sei. Da $\frac{\lambda}{k} = \frac{\alpha+2}{\alpha+2\alpha^2}$ und, den Ausdrücken für k'^2 und λ'^2 gemäfs, die absolute Gröfse von $\alpha < 1$ sein mufs, so ist $\alpha+2 > \alpha+2\alpha^2$, mithin ist

$$\lambda > k, \quad \text{also} \quad \lambda' < k'.$$

§. 280.

Aus den Formeln (1. §. 279.) erhält man

$$\sqrt{(k\lambda)} = \frac{\alpha^2+2\alpha}{2\alpha+1} \quad \text{und} \quad \sqrt{(k'\lambda')} = \frac{1-\alpha^2}{2\alpha+1},$$

und die Addition giebt nun die von α unabhängige Gleichung

$$1. \quad \sqrt{(k\lambda)} + \sqrt{(k'\lambda')} = 1,$$

nach welcher Gleichung man aus einem der beiden Moduln den andern zu berechnen hat.

Setzt man $k = \sin\theta$ und $\lambda = \sin\theta'$, so ist

$$\sqrt{(\sin\theta.\sin\theta')} + \sqrt{(\cos\theta.\cos\theta')} = 1,$$

und diese Gleichung läfst sich umformen in

$$\sin 2\theta.\sin 2\theta' = 4.\sin^4 \tfrac{1}{2}(\theta'-\theta).$$

Hiernach läfst sich aus einem der Winkel θ und θ' ziemlich schnell der andere berechnen.

Ferner findet man

$$\sqrt[4]{\frac{k^3}{\lambda}} = \alpha \quad \text{und} \quad \sqrt[4]{\frac{\lambda^3}{k}} = \frac{\alpha+2}{2\alpha+1}.$$

Wird nun der Gleichmäfsigkeit wegen $\sqrt[4]{\frac{\lambda^3}{k}} = \alpha'$ gesetzt, so ist

$$2. \quad \alpha' = \frac{\alpha+2}{2\alpha+1}.$$

Hieraus folgt $2\alpha'-1 = \frac{3}{2\alpha+1}$, oder auch

$$(2\alpha'-1)(2\alpha+1) = 3,$$

und werden die Werthe für α und α' substituirt, so hat man

$$3. \quad \left(2\sqrt[4]{\left(\frac{k^3}{\lambda}\right)}+1\right)\left(2\sqrt[4]{\left(\frac{\lambda^3}{k}\right)}-1\right) = 3.$$

Man findet auch $\alpha'-1 = \frac{1-\alpha}{2\alpha+1}$, und es können mithin die Moduln auch

also ausgedrückt werden:

$$k^2 = \alpha^3.\alpha', \quad k'^2 = (\alpha+1)^3.(\alpha'-1),$$
$$\lambda^2 = \alpha'^3.\alpha, \quad \lambda'^2 = (\alpha'-1)^3.(\alpha+1).$$

Hieraus folgt noch

$$\sqrt[4]{\frac{k'^3}{\lambda'}} = 1+\alpha \quad \text{und} \quad \sqrt[4]{\frac{\lambda'^3}{k'}} = \alpha'-1,$$

und da $(2\alpha+1)(2\alpha'-1) = 3$ oder $(2(\alpha+1)-1)(2(\alpha'-1)+1) = 3$ ist, so haben wir auch noch

$$4. \quad \left(2\sqrt[4]{\left(\frac{k'^3}{\lambda'}\right)}-1\right)\left(2\sqrt[4]{\left(\frac{\lambda'^3}{k'}\right)}+1\right) = 3.$$

Ferner hat man die beiden Gleichungen

$$5. \quad \sqrt[4]{\frac{k'^3}{\lambda'}} = 1+\sqrt[4]{\frac{k^3}{\lambda}}, \quad \sqrt[4]{\frac{\lambda^3}{k}} = 1+\sqrt[4]{\frac{\lambda'^3}{k'}}.$$

Setzt man $\sqrt[4]{k} = m$ und $\sqrt[4]{\lambda} = n$, so verwandelt sich die Gleichung (3.) in $\left(\frac{2m^3}{n}+1\right)\left(\frac{2n^3}{m}-1\right) = 3$ oder $n^4-m^4+2m^3n^3-2mn = 0$. Sieht man m als bekannt und n als unbekannt an, so ist die Gleichung vom vierten Grade in Ansehung von n.

§. 281.

Die ergänzende Substitution dritten Grades.

Ein Blick auf die vorstehenden Modulargleichungen lehrt, dafs sie ungeändert bleiben, wenn man gleichzeitig k mit λ' und k' mit λ vertauscht. Dabei vertauscht man α mit $\alpha'-1$ oder α' mit $\alpha+1$.

Setzen wir nun aufserdem v statt u und u' statt v, so verwandelt sich die Formel $\operatorname{tn} v = \frac{(1+2\alpha)\operatorname{tn} u+(1+\alpha)^2\operatorname{tn}^3 u}{1+(1-\alpha^3)\operatorname{tn}^2 u}$ (§. 279.) in

$\operatorname{tn}' u' = \frac{(2\alpha'-1)\operatorname{tn}' v+\alpha'^2\operatorname{tn}'^3 v}{1+(2\alpha'-\alpha'^2)\operatorname{tn}'^2 v}$ und $v = (2\alpha+1)u$ in $u' = (2\alpha'-1)v$. Da aber $v = (2\alpha+1)u$ ist, so ist $u' = (2\alpha'-1)(2\alpha+1)u$, oder auch $u' = 3u$, und also

$$\operatorname{tn}' 3u = \frac{(2\alpha'-1)\operatorname{tn}' v+\alpha'^2\operatorname{tn}'^3 v}{1+(2\alpha'-\alpha'^2)\operatorname{tn}'^2 v},$$

und in dieser Formel beziehen sich die Modularfunctionen des Argumentes v auf den Modul λ', so wie $\operatorname{tn}' 3u$ auf den Modul k'. Setzen wir nun ui statt u und vi statt v, so bleibt die Gleichung $v = (2\alpha+1)u$ ungeändert, und die vorige Gleichung verwandelt sich sofort in

$$1. \quad \operatorname{sn} 3u = \frac{(2\alpha'-1)\operatorname{sn} v - \alpha'^2 \operatorname{sn}^3 v}{1-(2\alpha'-\alpha'^2)\operatorname{sn}^2 v},$$

und hierin bezieht sich wieder $\operatorname{sn} v$ auf den Modul λ und $\operatorname{sn} 3u$ oder $\operatorname{sn} u'$ auf den Modul k.

Diese Substitution, wodurch man vom Modul λ auf den Modul k zurückkommt, und welche insofern als die umgekehrte der vorigen anzusehen ist, ist ebenfalls vom dritten Grade. Eliminirt man aus der Gleichung (2.) §. 279. und aus der vorigen $\operatorname{sn} v$, so erhält man $\operatorname{sn} 3u$ durch Potenzen von $\operatorname{sn} u$ ausgedrückt. Daher ist die eine Substitution eine Ergänzung der anderen zur Verdreifachung des Arguments.

Man leitet aus der vorigen Formel noch her:

$$2. \quad 1+\operatorname{sn} 3u = \frac{(1-\operatorname{sn} v)(1+\alpha' \operatorname{sn} v)^2}{1-(2\alpha'-\alpha'^2)\operatorname{sn}^2 v}, \quad 1-\operatorname{sn} 3u = \frac{(1+\operatorname{sn} v)(1-\alpha' \operatorname{sn} v)^2}{1-(2\alpha'-\alpha'^2)\operatorname{sn}^2 v}.$$

Ferner ist

$$k \operatorname{sn} 3u = \frac{\alpha}{\alpha'}\lambda . \frac{(2\alpha'-1)\operatorname{sn} v - \alpha'^2 \operatorname{sn}^3 v}{1-(2\alpha'-\alpha'^2)\operatorname{sn}^2 v} = \frac{(2\alpha'-\alpha'^2)\lambda \operatorname{sn} v - \lambda^3 \operatorname{sn}^3 v}{\alpha'^2-(2\alpha'-1)\lambda^2 \operatorname{sn}^2 v},$$

und hieraus folgt

$$3. \quad 1+k\operatorname{sn} 3u = \frac{(1-\lambda \operatorname{sn} v)(\alpha'+\lambda \operatorname{sn} v)^2}{\alpha'^2-(2\alpha'-1)\lambda^2 \operatorname{sn}^2 v}, \quad 1-k\operatorname{sn} 3u = \frac{(1+\lambda \operatorname{sn} v)(\alpha'-\lambda \operatorname{sn} v)^2}{\alpha'^2-(2\alpha'-1)\lambda^2 \operatorname{sn}^2 v}.$$

Ferner ist

$$4. \quad \begin{cases} \operatorname{cn} 3u = \dfrac{\operatorname{cn} v.(1-\alpha'^2 \operatorname{sn}^2 v)}{1-(2\alpha'-\alpha'^2)\operatorname{sn}^2 v} = \dfrac{(1-\alpha'^2)\operatorname{cn} v + \alpha'^2 \operatorname{cn}^3 v}{(\alpha'-1)^2+(2\alpha'-\alpha'^2)\operatorname{cn}^2 v}, \\ \operatorname{dn} 3u = \dfrac{\operatorname{dn} v.(\alpha'^2-\lambda^2 \operatorname{sn}^2 v)}{\alpha'^2-(2\alpha'-1)\lambda^2 \operatorname{sn}^2 v} = \dfrac{\operatorname{dn}^3 v + (\alpha'^2-1)\operatorname{dn} v}{(\alpha'-1)^2+(2\alpha'-1)\operatorname{dn}^2 v}, \\ \operatorname{tn} 3u = \dfrac{(2\alpha'-1)\operatorname{tn} v - (\alpha'-1)^2 \operatorname{tn}^3 v}{1-(\alpha'^2-1)\operatorname{tn}^2 v}. \end{cases}$$

Aus den vorstehenden Formeln leitet man noch her:

$$\frac{\operatorname{sn} 3u - \operatorname{sn} v}{\operatorname{cn} 3u - \operatorname{cn} v} = (\alpha'-1)\operatorname{tn} v, \quad \text{oder auch}$$

$$5. \quad \operatorname{am} 3u = \operatorname{am} v + 2 \operatorname{arc tang}((\alpha'-1)\operatorname{tn} v).$$

Zusatz. Aus den Gleichungen $\operatorname{sn} v = \frac{(2\alpha+1)\operatorname{sn} u + \alpha^2 \operatorname{sn}^3 u}{1+(\alpha^2+2\alpha)\operatorname{sn}^2 u}$ und $\operatorname{sn}' 3u = \frac{(2\alpha'-1)\operatorname{sn}' v + (\alpha'-1)^2 \operatorname{sn}'^3 v}{1+(\alpha'^2-1)\operatorname{sn}'^2 v}$ folgt, dafs $v = L$ für $u = K$ und $3u = K'$ für $v = L'$ ist. Da nun immer $v = (2\alpha+1)u$ ist, so ist

$$L = (2\alpha+1).K \quad \text{und} \quad L' = \tfrac{1}{3}(2\alpha+1).K',$$

und hieraus folgt noch durch die Division

$$\frac{L}{L'} = 3.\frac{K}{K'}.$$

§. 282.

Umformung der Gleichung $x = \operatorname{sn} u$ in eine ähnliche durch eine Substitution fünften Grades.

Die Substitution fünften Grades hat die Form $y = \frac{ax + cx^3 + ex^5}{1 + bx^2 + dx^4}$. Setzt man hierin $\frac{1}{kx}$ statt x und gleichzeitig $\frac{1}{\lambda y}$ statt y, so erhält man

$$\lambda y = \frac{dkx + bk^3x^3 + k^5x^5}{e + ck^2x^2 + ak^4x^4},$$

und soll dieser Ausdruck mit dem vorigen zusammenfallen, so mufs

$$1. \quad \frac{k}{\lambda} = \frac{a.c}{d}; \quad \frac{k^3}{\lambda} = \frac{ce}{b}; \quad \frac{k^5}{\lambda} = e^2; \quad k^2 = \frac{be}{c}; \quad k^4 = \frac{de}{a}$$

sein. Aus demselben Grunde wie bei der Substitution dritten Grades setzen wir nun

$$1 + y = \frac{(1+x)(1+\alpha x + \beta x^2)^2}{1 + bx^2 + dx^4}.$$

Hieraus folgt rückwärts

$$y = \frac{(1+2\alpha)x + (\alpha^2 + 2\beta + 2\alpha - b)x^2 + (\alpha^2 + 2\beta + 2\alpha\beta)x^3 + (\beta^2 + 2\alpha\beta - d)x^4 + \beta^2 x^5}{1 + bx^2 + dx^4},$$

und auch dieser Ausdruck stimmt mit dem vorigen überein, wenn

$$2. \quad \begin{cases} a = 1 + 2\alpha, \\ b = \alpha^2 + 2\beta + 2\alpha = (\alpha^2 + \beta) + (\beta + 2\alpha), \\ c = \alpha^2 + 2\beta + 2\alpha\beta = (\alpha^2 + \beta) + \beta(1 + 2\alpha), \\ d = \beta^2 + 2\alpha\beta = \beta(\beta + 2\alpha), \\ e = \beta^2 \end{cases}$$

gesetzt wird. Beziehen wir nun die Modular-Functionen des Arguments u wieder auf den Modul k und die des Arguments v auf den Modul λ, so haben wir, $x = \operatorname{sn} u$ und $y = \operatorname{sn} v$ setzend,

$$3. \quad \operatorname{sn} v = \frac{(1+2\alpha)\operatorname{sn} u + (\alpha^2 + 2\beta + 2\alpha\beta)\operatorname{sn}^3 u + \beta^2 \operatorname{sn}^5 u}{1 + (\alpha^2 + 2\beta + 2\alpha)\operatorname{sn}^2 u + \beta(\beta + 2\alpha)\operatorname{sn}^4 u}.$$

Hieraus folgt

$$4. \quad \begin{cases} 1 + \operatorname{sn} v = \dfrac{(1 + \operatorname{sn} u)(1 + \alpha \operatorname{sn} u + \beta \operatorname{sn}^2 u)^2}{1 + (\alpha^2 + 2\beta + 2\alpha)\operatorname{sn}^2 u + (\beta^2 + 2\alpha\beta)\operatorname{sn}^4 u}, \\ 1 - \operatorname{sn} v = \dfrac{(1 - \operatorname{sn} u)(1 - \alpha \operatorname{sn} u + \beta \operatorname{sn}^2 u)^2}{1 + (\alpha^2 + 2\beta + 2\alpha)\operatorname{sn}^2 u + (\beta^2 + 2\alpha\beta)\operatorname{sn}^4 u}; \end{cases}$$

$$5. \quad \begin{cases} 1 + \lambda \operatorname{sn} v = \dfrac{(1 + k\operatorname{sn} u)(\beta + \alpha k \operatorname{sn} u + k^2 \operatorname{sn}^2 u)^2}{\beta^2 (1 + (\alpha^2 + 2\beta + 2\alpha)\operatorname{sn}^2 u + (\beta^2 + 2\alpha\beta)\operatorname{sn}^4 u)}, \\ 1 - \lambda \operatorname{sn} v = \dfrac{(1 - k\operatorname{sn} u)(\beta - \alpha k \operatorname{sn} u + k^2 \operatorname{sn}^2 u)^2}{\beta^2 (1 + (\alpha^2 + 2\beta + 2\alpha)\operatorname{sn}^2 u + (\beta^2 + 2\alpha\beta)\operatorname{sn}^4 u}. \end{cases}$$

Hieraus erhalten wir nun leicht

$$6.\quad \begin{cases} \operatorname{cn} v = \dfrac{\operatorname{cn} u(1-(\alpha^2-2\beta)\operatorname{sn}^2 u+\beta^2\operatorname{sn}^4 u)}{1+(\alpha^2+2\beta+2\alpha)\operatorname{sn}^2 u+(\beta^2+2\alpha\beta)\operatorname{sn}^4 u}, \\ \operatorname{dn} v = \dfrac{\operatorname{dn} u(\beta^2-(\alpha^2-2\beta)k^2\operatorname{sn}^2 u+k^4\operatorname{sn}^4 u)}{\beta^2(1+(\alpha^2+2\beta+2\alpha)\operatorname{sn}^2 u+(\beta^2+2\alpha\beta)\operatorname{sn}^4 u)}. \end{cases}$$

Endlich findet man

$$7.\quad \operatorname{tn} v = \frac{(1+2\alpha)\operatorname{tn} u+((1+\alpha)(1+\alpha+2\beta)+2\alpha+1)\operatorname{tn}^3 u+(1+\alpha+\beta)^2\operatorname{tn}^5 u}{1+(2+2\beta-\alpha^2)\operatorname{tn}^2 u+((\beta+1)^2-\alpha^2)\operatorname{tn}^4 u}.$$

Differentiiren wir die Formel (3.), so erhalten wir

$$\operatorname{cn} v.\operatorname{dn} v.\partial v =$$
$$\frac{a+(3c-ab)\operatorname{sn}^2 u+(bc-3ad+5e)\operatorname{sn}^4 u+(3be-cd)\operatorname{sn}^6 u+de\operatorname{sn}^8 u}{(1+b\operatorname{sn}^2 u+d\operatorname{sn}^4 u)^2}.\operatorname{cn} u\operatorname{dn} u.\partial u.$$

Werden die vorigen Ausdrücke für $\operatorname{cn} v$ und $\operatorname{dn} v$ substituirt, so erhält man

$$\frac{\partial v}{\partial u} = \frac{a+(3c-ab)\operatorname{sn}^2 u+(bc-3ad+5e)\operatorname{sn}^4 u+(3be-cd)\operatorname{sn}^6 u+de\operatorname{sn}^8 u}{(1-(\alpha^2-2\beta)\operatorname{sn}^2 u+\beta^2\operatorname{sn}^4 u)\left(1-(\alpha^2-2\beta).\dfrac{k^2}{\beta^2}\operatorname{sn}^2 u+\dfrac{k^4}{\beta^2}\operatorname{sn}^4 u\right)}.$$

Dieser Bruch reducirt sich aber, wenn für a, b, c, d, e, k^2 und k^4 ihre Werthe substituirt werden, auf $\dfrac{\partial v}{\partial u} = a = 1+2\alpha$, und hieraus folgt

$$8.\quad v = (1+2\alpha).u.$$

§. 283.

Nach §. 282. ist $k^2 = \dfrac{be}{c}$ und $k^4 = \dfrac{de}{a}$, also ist

$$(\beta+2\alpha\beta)(\alpha^2+\beta+2\alpha+\beta)^2 = (2\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta+\beta+2\alpha\beta)^2.$$

Diese Gleichung reducirt sich zunächst auf

$$(\alpha^2+\beta)^2 = (2\alpha+\beta)(\beta+2\alpha\beta).$$

Durch weitere Entwicklung finden wir

$$2\beta(1+\alpha+\beta) = \alpha^3.$$

Hiernach kann β aus α berechnet werden, und durch wirkliche Auflösung erhalten wir

$$2\beta+\alpha+1 = \sqrt{((1+\alpha^2)(1+2\alpha))} = \sqrt{((1+\alpha)^2+2\alpha^3)}.$$

Es ist $k^2 = \dfrac{be}{c} = \dfrac{(\alpha^2+2\beta+2\alpha)\beta^2}{\alpha^2+2\beta+2\alpha\beta}$ und $k^4 = \dfrac{\beta^3(\beta+2\alpha)}{1+2\alpha}$. Diese Ausdrücke können noch in anderen Formen dargestellt werden. Es ist

$$\frac{\alpha^2+\beta}{2\alpha+\beta} = \frac{\beta+2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta};$$

Subtrahirt man auf beiden Seiten Eins, so hat man

$$\frac{\alpha-2}{2\alpha+\beta}=\frac{2\beta-\alpha}{\alpha^2+\beta},\text{ also }\frac{\alpha-2}{2\beta-\alpha}=\frac{2\alpha+\beta}{\alpha^2+\beta}=\frac{\alpha^2+\beta}{\beta+2\alpha\beta}=\frac{\alpha^2+\beta}{\beta(1+2\alpha)}=\sqrt{\frac{2\alpha+\beta}{\beta(1+2\alpha)}}.$$

Hiernach erhält man $k^4=\beta^4.\left(\frac{\alpha-2}{2\beta-\alpha}\right)^2$ oder auch

$$k^2=\frac{\beta^2(\alpha-2)}{2\beta-\alpha}.$$

Es ist nun $2\beta=\sqrt{((1+\alpha^2)(1+2\alpha))}-1-\alpha$, also

$$2\beta-\alpha=\sqrt{(1+2\alpha)}.(\sqrt{(1+\alpha^2)}-\sqrt{(1+2\alpha)}),$$

folglich ist

$$k^2=\frac{\alpha-2}{4\sqrt{(1+2\alpha)}}.\frac{(\sqrt{((1+\alpha^2)(1+2\alpha))}-(1+\alpha))^2}{\sqrt{(1+\alpha^2)}-\sqrt{(1+2\alpha)}},$$

und da $\frac{1}{\sqrt{(1+\alpha^2)}-\sqrt{(1+2\alpha)}}=\frac{\sqrt{(1+\alpha^2)}+\sqrt{(1+2\alpha)}}{\alpha(\alpha-2)}$ ist, so reducirt sich der Ausdruck nach einigen leichten Reductionen auf

$$2k^2=1-(1+\alpha-\alpha^2)\sqrt{\frac{1+\alpha^2}{1+2\alpha}}.$$

Setzt man $k=\sin\theta$, so ist $\cos 2\theta=1-2k^2$, und also

$$1.\quad \cos 2\theta=(1+\alpha-\alpha^2)\sqrt{\frac{1+\alpha^2}{1+2\alpha}},$$

folglich

$$\sin 2\theta=\sqrt{\left(\alpha^5.\frac{2-\alpha}{1+2\alpha}\right)}.$$

Setzt man nun noch $\alpha'=\frac{2-\alpha}{1+2\alpha}$, so ist

$$2.\quad (1+2\alpha)(1+2\alpha')=5 \quad\text{und}$$

$$3.\quad \sin 2\theta=\sqrt{(\alpha'\alpha^5)}.$$

Es ist $\frac{\lambda}{k}=\frac{d}{\alpha e}=\frac{\beta(\beta+2\alpha)}{\beta^2(1+2\alpha)}$, also $\frac{\lambda}{k}=\frac{1+\frac{2\alpha}{\beta}}{1+2\alpha}$, folglich

$$2\lambda^2=2k^2.\left(\frac{1+\frac{2\alpha}{\beta}}{1+2\alpha}\right)^2.$$

Da $\frac{1}{\beta}=\frac{2}{\sqrt{((1+\alpha)^2+2\alpha^3)}-(\alpha+1)}=\frac{\sqrt{((1+\alpha)(1+2\alpha))}+\alpha+1}{\alpha^3}$ ist, so erhält man, wenn dieser Werth und der vorhin für $2k^2$ gefundene substituirt wird, nach einigen Reductionen,

$$2\lambda^2=1-\frac{1-11\alpha-\alpha^2}{(1+2\alpha)^2}\sqrt{\frac{1+\alpha^2}{1+2\alpha}}.$$

Wird nun $\lambda=\sin\theta'$, also $\lambda'=\cos\theta'$ gesetzt, so hat man

$$\cos 2\theta'=(1-11\alpha-\alpha^2)\sqrt{\frac{1+\alpha^2}{(1+2\alpha)^5}}.$$

Aber aus der Gleichung $(1+2\alpha)(2\alpha'+1)=5$ zieht man $\alpha=\frac{2-\alpha'}{1+2\alpha}$; ferner

$$\frac{1-11\alpha-\alpha^2}{(1+2\alpha)^2} = -(1+\alpha'-\alpha'^2) \quad \text{und} \quad \frac{1+\alpha^2}{1+2\alpha} = \frac{1+\alpha'^2}{1+2\alpha'}:$$

daher ist

$$\cos 2\theta' = -(1+\alpha'-\alpha'^2)\sqrt{\frac{1+\alpha'^2}{1+2\alpha'}}, \text{ oder } \cos 2(\tfrac{1}{2}\pi-\theta') = (1+\alpha'-\alpha'^2)\sqrt{\frac{1+\alpha'^2}{1+2\alpha'}}.$$

Hieraus sieht man, dafs sich θ mit $\frac{1}{2}\pi-\theta'$, also k mit λ' und k' mit λ vertauscht, wenn α mit α' vertauscht wird.

Wir erhalten noch $\sin 2\theta' = \sqrt{\left(\alpha'^5 \cdot \frac{2-\alpha'}{1+2\alpha'}\right)}$ oder

$$4. \quad \sin 2\theta' = \sqrt{(\alpha'^5 . \alpha)}, \quad \text{und da} \quad \sin 2\theta = \sqrt{(\alpha^5 . \alpha')}$$

ist, so können aus den beiden durch die Gleichung $(1+2\alpha)(1+2\alpha')=5$ verbundenen Constanten α und α' beide Moduln θ und θ' berechnet werden. Man findet auch rückwärts

$$\alpha' = \sqrt[12]{\left(\frac{\sin^5 2\theta'}{\sin 2\theta}\right)} \quad \text{und} \quad \alpha = \sqrt[12]{\left(\frac{\sin^5 2\theta}{\sin 2\theta'}\right)}$$

und hat also die Modular-Gleichung

$$5. \quad \left(1+2\sqrt[12]{\frac{\sin^5 2\theta'}{\sin 2\theta}}\right)\left(1+2\sqrt[12]{\frac{\sin^5 2\theta}{\sin 2\theta'}}\right) = 5,$$

welche zur Berechnung des einen Moduls aus dem anderen dienen kann.

Wir stellen die Modular-Gleichung in noch anderen Formen dar. Es sei wieder

$$\sqrt[4]{k} = m \quad \text{und} \quad \sqrt[4]{\lambda} = n,$$

so ist $\sqrt{\frac{\lambda}{k}} = \frac{n^2}{m^2} = \sqrt{\frac{\beta+2\alpha}{\beta(1+2\alpha)}} = \frac{\alpha-2}{2\beta-\alpha}$, also rückwärts

$$\alpha = \frac{2m^2+2\beta n^2}{m^2+n^2}.$$

Ferner ist $e^2=\beta^4=\frac{k^5}{\lambda}=\frac{m^{20}}{n^4}$, also $\beta=\frac{m^5}{n}$ und $\beta n^2 = nm^5$, mithin ist

$$\alpha = \frac{2m^2+2nm^5}{m^2+n^2} = \frac{2m^2(1+nm^3)}{m^2+n^2}.$$

Ferner folgt aus der obigen Gleichung

$$\frac{n^4}{m^4}\beta = \frac{\beta+2\alpha}{1+2\alpha} \quad \text{oder} \quad 2\alpha = \frac{mn^3-\beta}{1-mn^3} = \frac{m}{n}\cdot\frac{n^4-m^4}{1-mn^3}.$$

Werden die beiden Werthe von α identificirt, so erhält man die Gleichung

$$6. \quad n^6-m^6+4m^5n^5+5m^2n^4-5n^2m^4-4mn = 0.$$

Da $n^6-m^6=(n^4+n^2m^2+m^4)(n^2-m^2)$ ist, so läfst sich die vorige Gleichung auch also darstellen:

$$(n^2-m^2)(n^4+6m^2n^2+m^4) = 4mn(1-m^4n^4).$$

Verbindet man hiermit die Identität

$$(n^2-m^2).4mn(n^2+m^2) = 4mn(n^4-m^4)$$

durch Addition und Subtraction, so erhält man die Gleichungen

$$(n^2-m^2)(n+m)^4 = 4mn(1+n^4)(1-m^4),$$
$$(n^2-m^2)(n-m)^4 = 4mn(1-n^4)(1+m^4).$$

Hieraus erhält man durch die Division

$$\left(\frac{n-m}{n+m}\right)^4 = \frac{1-n^4}{1+n^4}\cdot\frac{1+m^4}{1-m^4} \text{ oder auch}$$

$$7.\quad \left(\frac{\sqrt[4]{\lambda}-\sqrt[4]{k}}{\sqrt[4]{\lambda}+\sqrt[4]{k}}\right)^4 = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}\cdot\frac{1+k}{1-k}.$$

Die Multiplication giebt aber

$$(n^2-m^2)^2(n^2-m^2)^4 = 16m^2n^2(1-n^8)(1-m^8) \quad \text{oder}$$

$$(n^2-m^2)^6 = 16m^2n^2(1-n^8)(1-m^8), \text{ also } (\sqrt{\lambda}-\sqrt{k})^6 = 16\sqrt{(k\lambda)}.k'^2\lambda'^2,$$

oder $\quad 8.\quad (\sqrt{\lambda}-\sqrt{k})^3 = 4\lambda' k'\sqrt[4]{(k\lambda)}.$

Da man k mit λ' und gleichzeitig k' mit λ vertauschen darf, so ist auch noch $(\sqrt{k'}-\sqrt{\lambda'})^3 = 4k\lambda\sqrt[4]{(k'\lambda')}$, und dividirt man die vorige Gleichung hierdurch, so hat man

$$\left(\frac{\sqrt{\lambda}-\sqrt{k}}{\sqrt{k'}-\sqrt{\lambda'}}\right)^3 = \sqrt[4]{\left(\frac{k'\lambda'}{k\lambda}\right)^3} \text{ oder auch}$$

$$9.\quad \frac{\sqrt{\lambda}-\sqrt{k}}{\sqrt{k'}-\sqrt{\lambda'}} = \sqrt[4]{\frac{k'\lambda'}{k\lambda}}.$$

§. 284.

Die ergänzende Substitution fünften Grades.

Es ist schon §. 283. gezeigt worden, dafs man in den vorstehenden, sich auf die Substitution fünften Grades beziehenden Formeln, ohne die Modulargleichung zu ändern, α' statt α setzen darf, wodurch k mit λ' und k' mit λ vertauscht wird. Werden aber die beiden durch die Gleichung $(1+2\alpha)(1+2\alpha') = 5$ verbundenen Gröfsen mit einander vertauscht, wodurch sich β in β' verwandelt, so ist

$$1.\quad 2\beta'(1+\alpha'+\beta') = \alpha'^3 \quad \text{oder} \quad 2\beta'+\alpha'+1 = \sqrt{((1+\alpha'^2)(1+2\alpha'))}.$$

Setzen wir nun v statt u, wodurch v in u' übergehen mag, so verwandelt sich die Gleichung $v = (1+2\alpha)u$ in $u' = (1+2\alpha')v$; daher ist $u' = (1+2\alpha)(1+2\alpha')u$, oder $u' = 5u$.

Hiernach verwandelt sich die Gleichung (3.) §. 282. in

$$2.\quad \operatorname{sn}'5u = \frac{(1+2\alpha')\operatorname{sn}'v+(\alpha'^2+2\beta'+2\alpha'\beta')\operatorname{sn}'^3v+\beta'^2\operatorname{sn}'^5v}{1+(\alpha'^2+2\beta'+2\alpha')\operatorname{sn}'^2v+(\beta'^2+2\alpha'\beta')\operatorname{sn}'^4v},$$

wenn man $\text{sn}'v$ auf den Modul λ', so wie $\text{sn}'5u$ auf den Modul k' bezieht. Dieser Gleichung gemäfs ist für $v = L'$ auch $\text{sn}'5u = 1$ oder $5u = K'$, und da immer $v = (1+2\alpha).u$ ist, so ist

$$3.\quad L' = \tfrac{1}{5}(1+2\alpha).K'.$$

Der Gleichung (3.) §. 282. gemäfs ist aber für $u = K$, $v = L$, und also

$$4.\quad L = (1+2\alpha).K.$$

Wird diese Gleichung durch die vorige dividirt, so erhält man noch

$$5.\quad \frac{L}{L'} = 5.\frac{K}{K'},$$

und dieser Gleichung gemäfs ist der Modul λ merklich gröfser als der Modul k.

Auf ähnliche Weise wie die Gleichung (2.) hergeleitet wurde, findet man

$$\text{tn}'5u = \frac{(1+2\alpha')\,\text{tn}'v + ((1+\alpha')(1+\alpha'+2\beta')+2\alpha'+1)\,\text{tn}'^3v + (1+\alpha'+\beta')^2\,\text{tn}'^5v}{1+(2+2\beta'-\alpha'^2)\,\text{tn}'^2v + ((\beta'+1)^2-\alpha'^2)\,\text{tn}'^4v}.$$

Setzt man in dieser Formel gleichzeitig vi statt v und ui statt u, so bleibt die Gleichung $v = (1+2\alpha)u$ ungeändert und man erhält

$$6.\quad \text{sn}\,5u = \frac{(1+2\alpha')\,\text{sn}\,v - ((1+\alpha')(1+\alpha'+2\beta')+2\alpha'+1)\,\text{sn}^3v + (1+\alpha'+\beta')^2\,\text{sn}^5v}{1-(2+2\beta'-\alpha'^2)\,\text{sn}^2v + ((\beta'+1)^2-\alpha'^2)\,\text{sn}^4v}.$$

Eliminirt man hieraus mittelst der Formel (3.) §. 282. die Function $\text{sn}\,v$, so erhält man $\text{sn}\,5u$ durch $\text{sn}\,u$ ausgedrückt; daher ergänzen sich die beiden in Rede stehenden Substitutionen zur Verfünffachung des Arguments.

Führt man in die Formel (6.) eine Gröfse β_1 statt β' ein, indem man $\beta_1 = \frac{-\sqrt{((1+\alpha'^2)(1+2\alpha'))}-(1+\alpha')}{2}$, oder $\beta' = -\beta_1 - (1+\alpha')$ setzt, so erhält man

$$7.\quad \text{sn}\,5u = \frac{(1+2\alpha')\,\text{sn}\,v + (\alpha'^2+2\beta_1+2\beta_1\alpha')\,\text{sn}^3v + \beta_1^2\,\text{sn}^5v}{1+(\alpha'^2+2\beta_1+2\alpha')\,\text{sn}^2v + (\beta_1^2+2\alpha'\beta_1)\,\text{sn}^4v}.$$

Vergleicht man diese Formel mit der Formel (3.) §. 282., so zeigt sich eine merkwürdige Uebereinstimmung und das einfache Gesetz, dafs in den Formeln (3. bis 7.) α statt α', β statt β_1, k statt λ, λ statt k, v statt u und $5u$ statt v gesetzt werden mufs und dafs sie sich dadurch sämmtlich in die sich auf die ergänzende Substitution beziehenden Formeln verwandeln.

Zusatz. Aus den Formeln (3. und 6.) für $\text{sn}\,v$ und $\text{cn}\,v$ §. 282. leiten wir noch her:

$$\frac{\text{sn}\,v - \text{sn}\,u}{\text{cn}\,v + \text{cn}\,u} = \frac{\alpha\,\text{sn}\,u\,\text{cn}\,u}{1+(\alpha+\beta)\,\text{sn}^2u} = \frac{\alpha\,\text{tn}\,u}{1+(1+\alpha+\beta)\,\text{tn}^2u}.$$

Diese Gleichung läfst sich umformen in

$$\operatorname{am} v = \operatorname{am} u + 2 \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\alpha \operatorname{tn} u}{1+(1+\alpha+\beta)\operatorname{tn}^2 u}\right),$$

und hierin ist $1+\alpha+\beta = \frac{1+\alpha+\sqrt{((1+\alpha^2)(1+2\alpha))}}{2}$.

Nach dem kurz vorher nachgewiesenen Gesetze findet man nun noch

$$\operatorname{am} 5u = \operatorname{am} v + 2 \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\alpha' \operatorname{tn} v}{1+(1+\alpha'+\beta_1)\operatorname{tn}^2 v}\right),$$

und hierin ist $1+\alpha'+\beta_1 = \frac{1+\alpha'-\sqrt{((1+\alpha'^2)(1+2\alpha'))}}{2}$.

Allgemeine Umformung der Gleichung $x = \operatorname{sn} u$ in eine ähnliche durch eine Substitution $n$ten Grades, wenn n eine ungerade Zahl ist.

§. 285.

Es sei, mit Beziehung auf den Modul k, wozu der Quadrant K und als conjugirter Quadrant K' gehören mag,

$$\omega = \frac{2aK+2biK'}{n}.$$

Ferner sei n eine ungerade ganze Zahl, a und b hingegen seien ebenfalls ganze Zahlen, nur mit der Einschränkung, dafs wenigstens die eine dieser beiden Zahlen keinen Factor mit n gemein habe, welcher gröfser als Eins wäre. Bilden wir nun das Product

$$1-y = g(1-\operatorname{sn} u)(1-\operatorname{sn}(u+2\omega))(1-\operatorname{sn}(u+4\omega))(1-\operatorname{sn}(u+6\omega))\ldots$$
$$\ldots(1-\operatorname{sn}(u+2(n-1)\omega)),$$

welches aus n binomischen Factoren besteht, so hat dasselbe die Eigenschaft, dafs sein Werth nicht geändert wird, wenn man das Argument u in ihm um 2ω vermehrt. Abgesehen von dem constanten Factor g, dessen Werth wir noch näher bestimmen werden, verwandelt sich jeder Factor in den nächst folgenden, wenn $u+2\omega$ statt u gesetzt wird, und der letzte Factor verwandelt sich wieder in den ersten, da $\operatorname{sn}(u+2n\omega) = \operatorname{sn}(u+4aK+4biK') = \operatorname{sn} u$, also auch $1-\operatorname{sn}(u+2n\omega) = 1-\operatorname{sn} u$ ist. Setzt man in der Gleichung $\operatorname{sn}(u+2n\omega) = \operatorname{sn} u$, $u-2\beta\omega$ statt u, so verwandelt sie sich in

$$\operatorname{sn}(u+2\alpha\omega) = \operatorname{sn}(u-2\beta\omega), \quad \text{für} \quad \alpha+\beta = n.$$

Hiernach kann das vorige Product auch also dargestellt werden:

$$1-y = g(1-\mathrm{sn}\,u).\left\{\begin{array}{r}(1-\mathrm{sn}(u+2\omega))(1-\mathrm{sn}(u+4\omega))(1-\mathrm{sn}(u+6\omega))\ldots\\ \ldots(1-\mathrm{sn}(u+(n-1)\omega))\\ (1-\mathrm{sn}(u-2\omega))(1-\mathrm{sn}(u-4\omega))(1-\mathrm{sn}(u-6\omega))\ldots\\ \ldots(1-\mathrm{sn}(u-(n-1)\omega))\end{array}\right\}.$$

Da nach §. 36. $(1-\mathrm{sn}(u+2\omega))(1-\mathrm{sn}(u-2\omega)) = \frac{(\mathrm{cn}\,2\omega - \mathrm{dn}\,2\omega.\mathrm{sn}\,u)^2}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,2\omega.\mathrm{sn}^2\,u}$
$= \frac{\mathrm{cn}^2\,2\omega.\left(1-\frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{snc}\,2\omega}\right)^2}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,2\omega.\mathrm{sn}^2\,u}$ ist, so erhalten wir, wenn wir zur Abkürzung

$$1.\quad\left\{\begin{array}{l} p = (\ \mathrm{sn}\,2\omega.\ \mathrm{sn}\,4\omega.\ \mathrm{sn}\,6\omega\ldots\ \mathrm{sn}(n-1)\omega)^2,\\ p' = (\mathrm{snc}\,2\omega.\mathrm{snc}\,4\omega.\mathrm{snc}\,6\omega\ldots\mathrm{snc}(n-1)\omega)^2,\\ q = (\ \mathrm{cn}\,2\omega.\ \mathrm{cn}\,4\omega.\ \mathrm{cn}\,6\omega\ldots\ \mathrm{cn}(n-1)\omega)^2,\\ q' = (\mathrm{cnc}\,2\omega.\mathrm{cnc}\,4\omega.\mathrm{cnc}\,6\omega\ldots\mathrm{cnc}(n-1)\omega)^2,\\ r = (\ \mathrm{dn}\,2\omega.\ \mathrm{dn}\,4\omega.\ \mathrm{dn}\,6\omega\ldots\ \mathrm{dn}(n-1)\omega)^2,\\ r' = (\mathrm{dnc}\,2\omega.\mathrm{dnc}\,4\omega.\mathrm{dnc}\,6\omega\ldots\mathrm{dnc}(n-1)\omega)^2 \end{array}\right.$$

setzen, woraus leicht

$$2.\quad p' = \frac{q}{r},\qquad q' = k'^{n-1}.\frac{p}{r}\quad\text{und}\quad r' = \frac{k'^{n-1}}{r}$$

folgt, die Umformung

$$1-y = gq.(1-\mathrm{sn}\,u)\frac{\left\{\left(1-\frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{snc}\,2\omega}\right)\left(1-\frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{snc}\,4\omega}\right)\ldots\left(1-\frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{snc}(n-1)\omega}\right)\right\}^2}{(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,2\omega.\mathrm{sn}^2\,u)(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,4\omega.\mathrm{sn}^2\,u)\ldots(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,(n-1)\omega.\mathrm{sn}^2\,u)}.$$

Wir bestimmen nun den Factor g so, dafs $u=0$ für $y=0$ wird. Setzen wir aber $u=0$, so erhalten wir $1-y=gq$; also mufs $gq=1$ sein, wenn $y=0$ sein soll. Hieraus folgt $g=\frac{1}{q}$, und also

$$3.\quad 1-y = (1-x).\frac{C^2}{D.D'},$$

wenn wir zur Abkürzung setzen:

$$4.\quad\left\{\begin{array}{l} x = \mathrm{sn}\,u,\\ C = \left(1-\frac{x}{\mathrm{snc}\,2\omega}\right)\left(1-\frac{x}{\mathrm{snc}\,4\omega}\right)\left(1-\frac{x}{\mathrm{snc}\,6\omega}\right)\ldots\left(1-\frac{x}{\mathrm{snc}(n-1)\omega}\right),\\ C' = \left(1+\frac{x}{\mathrm{snc}\,2\omega}\right)\left(1+\frac{x}{\mathrm{snc}\,4\omega}\right)\left(1+\frac{x}{\mathrm{snc}\,6\omega}\right)\ldots\left(1+\frac{x}{\mathrm{snc}(n-1)\omega}\right),\\ D = (1-k\,\mathrm{sn}\,2\omega.x)(1-k\,\mathrm{sn}\,4\omega.x)(1-k\,\mathrm{sn}\,6\omega.x)\ldots(1-k\,\mathrm{sn}(n-1)\omega.x),\\ D' = (1+k\,\mathrm{sn}\,2\omega.x)(1+k\,\mathrm{sn}\,4\omega.x)(1+k\,\mathrm{sn}\,6\omega.x)\ldots(1+k\,\mathrm{sn}(n-1)\omega.x). \end{array}\right.$$

Für die Werthe $x=\mathrm{snc}\,\omega$, $\mathrm{snc}\,4\omega$, $\mathrm{snc}\,6\omega$, ... $\mathrm{snc}(n-1)\omega$ wird $C=0$, also $1-y=0$, folglich $y=+1$, und für $x=1$ wird $y=1$.

§. 286.

Aus dem Ausdrucke $1-y=\frac{(1-x)C^2}{DD'}$ folgt $y=\frac{DD'-(1-x)C^2}{DD'}$. Da nun DD' von der $(n-1)$ten Ordnung, hingegen $(1-x).C^2$ von der $n$ten Ordnung ist, so ist der Zähler des Ausdrucks von y eine rationale ganze Function von x von der $n$ten Ordnung. Da ferner $y=0$ für $x=\operatorname{sn}u, =0$ ist und y seinen Werth nicht ändert, wenn das Argument u beliebig oft um 2ω vermehrt wird, so befriedigen die Werthe $x=0$, $x=\operatorname{sn}2\omega$, $x=\operatorname{sn}4\omega$, $\operatorname{sn}x=6\omega$, ... $x=\operatorname{sn}2(n-1)\omega$ die Gleichung

$$DD'-(1-x)C^2=0.$$

Jene Werthe sind sämmtlich verschieden von einander und ihre Anzahl n stimmt mit dem Grade der vorstehenden Gleichung überein. Daher ist

$$DD'-(1-x)C^2=\mu.x\left(1-\frac{x}{\operatorname{sn}2\omega}\right)\left(1-\frac{x}{\operatorname{sn}4\omega}\right)\left(1-\frac{x}{\operatorname{sn}6\omega}\right)\dots\left(1-\frac{x}{\operatorname{sn}2(n-1)\omega}\right),$$

wenn μ einen noch näher zu bestimmenden constanten Factor bezeichnet.

Da $\operatorname{sn}2\alpha\omega=-\operatorname{sn}2\beta\omega$ ist für $\alpha+\beta=n$, so haben wir auch

$$DD'-(1-x)C^2=\mu x\left(1-\frac{x}{\operatorname{sn}2\omega}\right)\left(1+\frac{x}{\operatorname{sn}2\omega}\right)\left(1-\frac{x}{\operatorname{sn}4\omega}\right)\left(1+\frac{x}{\operatorname{sn}4\omega}\right)\dots$$
$$\dots\left(1-\frac{x}{\operatorname{sn}(n-1)\omega}\right)\left(1+\frac{x}{\operatorname{sn}(n-1)\omega}\right)$$
$$=\mu x\left(1-\frac{x^2}{\operatorname{sn}^2 2\omega}\right)\left(1-\frac{x^2}{\operatorname{sn}^2 4\omega}\right)\dots\left(1-\frac{x^2}{\operatorname{sn}^2(n-1)\omega}\right),$$

und also

$$1.\quad y=\mu x.\frac{\left(1-\frac{x^2}{\operatorname{sn}^2 2\omega}\right)\left(1-\frac{x^2}{\operatorname{sn}^2 4\omega}\right)\left(1-\frac{x^2}{\operatorname{sn}^2 6\omega}\right)\dots\left(1-\frac{x^2}{\operatorname{sn}^2(n-1)\omega}\right)}{(1-k^2\operatorname{sn}^2 2\omega.x^2)(1-k^2\operatorname{sn}^2 4\omega.x^2)(1-k^2\operatorname{sn}^2 6\omega.x^2)\dots(1-k^2\operatorname{sn}^2(n-1)\omega.x^2)}.$$

Setzt man in diesem Ausdrucke $-x$ statt x, so sieht man, dafs sich dadurch y in $-y$ verwandelt.

Da $(n-1)\omega=2aK+2biK'-\omega$, $(n-2)\omega=2aK+2biK'-2\omega$, u. s. w. ist, so ist

$\operatorname{sn}(n-1)\omega=(-1)^a.\operatorname{sn}\omega$, $\operatorname{sn}(n-3)\omega=(-1)^a.\operatorname{sn}3\omega$, $\operatorname{sn}(n-5)\omega=(-1)^a.\operatorname{sn}5\omega$ u. s. w., also

$\operatorname{sn}^2(n-1)\omega=\operatorname{sn}^2\omega$, $\operatorname{sn}^2(n-3)\omega=\operatorname{sn}^2 3\omega$, $\operatorname{sn}^2(n-5)\omega=\operatorname{sn}^2 5\omega$ u. s. w.

Auf ähnliche Art findet man

$\operatorname{cn}^2(n-1)\omega=\operatorname{cn}^2\omega$, $\operatorname{cn}^2(n-3)\omega=\operatorname{cn}^2 3\omega$, $\operatorname{cn}^2(n-5)\omega=\operatorname{cn}^2 5\omega$ u. s. w., und
$\operatorname{dn}^2(n-1)\omega=\operatorname{dn}^2\omega$, $\operatorname{dn}^2(n-3)\omega=\operatorname{dn}^2 3\omega$, $\operatorname{dn}^2(n-5)\omega=\operatorname{dn}^2 5\omega$ u. s. w.

Hiernach kann die Formel (1.) auch also dargestellt werden:

$$2.\quad y=\mu x.\frac{\left(1-\frac{x^2}{\operatorname{sn}^2\omega}\right)\left(1-\frac{x^2}{\operatorname{sn}^2 2\omega}\right)\left(1-\frac{x^2}{\operatorname{sn}^2 3\omega}\right)\dots\left(1-\frac{x^2}{\operatorname{sn}^2\frac{1}{2}(n-1)\omega}\right)}{(1-k^2\operatorname{sn}^2\omega.x^2)(1-k^2\operatorname{sn}^2 2\omega.x^2)(1-k^2\operatorname{sn}^2 3\omega.x^2)\dots(1-k^2\operatorname{sn}^2\frac{1}{2}(n-1)\omega.x^2)}.$$

Ferner hat man auch

$$3.\quad \begin{cases} p = (\operatorname{sn}\omega\,.\,\operatorname{sn}2\omega\,.\,\operatorname{sn}3\omega\,\ldots\,\operatorname{sn}\tfrac{1}{2}(n-1)\omega)^2, \\ p' = (\operatorname{snc}\omega\,.\,\operatorname{snc}2\omega\,.\,\operatorname{snc}3\omega\,\ldots\,\operatorname{snc}\tfrac{1}{2}(n-1)\omega)^2, \\ q = (\operatorname{cn}\omega\,.\,\operatorname{cn}2\omega\,.\,\operatorname{cn}3\omega\,\ldots\,\operatorname{cn}\tfrac{1}{2}(n-1)\omega)^2, \\ q' = (\operatorname{cnc}\omega\,.\,\operatorname{cnc}2\omega\,.\,\operatorname{cnc}3\omega\,\ldots\,\operatorname{cnc}\tfrac{1}{2}(n-1)\omega)^2, \\ r = (\operatorname{dn}\omega\,.\,\operatorname{dn}2\omega\,.\,\operatorname{dn}3\omega\,\ldots\,\operatorname{dn}\tfrac{1}{2}(n-1)\omega)^2, \\ r' = (\operatorname{dnc}\omega\,.\,\operatorname{dnc}2\omega\,.\,\operatorname{dnc}3\omega\,\ldots\,\operatorname{dnc}\tfrac{1}{2}(n-1)\omega)^2. \end{cases}$$

Die Constante μ läfst sich dadurch bestimmen, dafs man $x=1$ setzt, wodurch nach §. 285. auch $y=1$ wird. Hiernach erhält man

$$1 = \mu.(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}.\frac{q}{p.r} = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}.\mu.\frac{p'}{p}, \text{ also}$$

$$4.\quad \mu = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}.\frac{p}{p'} = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}.\left(\frac{\operatorname{sn}\omega\,.\,\operatorname{sn}2\omega\,.\,\operatorname{sn}3\omega\,\ldots\,\operatorname{sn}\frac{1}{2}(n-1)\omega}{\operatorname{snc}\omega\,.\,\operatorname{snc}2\omega\,.\,\operatorname{snc}3\omega\,\ldots\,\operatorname{snc}\frac{1}{2}(n-1)\omega}\right)^2.$$

Da sich y in $-y$ verwandelt, wenn $-x$ statt x gesetzt wird, so verwandelt sich die Formel

$$5.\quad 1-y = (1-x).\frac{C^2}{DD'} \quad \text{in} \quad 1+y = (1+x).\frac{C'^2}{DD'}.$$

So wie ferner

$$6.\quad \begin{cases} 1-y = \frac{1}{q}(1-\operatorname{sn}u)(1-\operatorname{sn}(u+2\omega))(1-\operatorname{sn}(u+4\omega))(1-\operatorname{sn}(u+6\omega))\ldots \\ \qquad\qquad \ldots(1-\operatorname{sn}(u+2(n-1)\omega)) \text{ ist, so ist auch} \\ 1+y = \frac{1}{q}(1+\operatorname{sn}u)(1+\operatorname{sn}(u+2\omega))(1+\operatorname{sn}(u+4\omega))(1+\operatorname{sn}(u+6\omega))\ldots \\ \qquad\qquad \ldots(1+\operatorname{sn}(u+2(n-1)\omega)). \end{cases}$$

Es ist $y=0$ für $x=0$, $\pm\operatorname{sn}\omega$, $\pm\operatorname{sn}2\omega$, $\pm\operatorname{sn}3\omega$, $\pm\operatorname{sn}4\omega$, ... $\pm\operatorname{sn}\frac{1}{2}(n-1)\omega$.

§. 287.

Wir stellen die Formel (1.) §. 286. noch in einer andern Gestalt dar. Es ist zunächst

$$y = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}.\frac{\mu}{p}.\operatorname{sn}u.\frac{\operatorname{sn}^2u-\operatorname{sn}^2 2\omega}{1-k^2\operatorname{sn}^2 2\omega.\operatorname{sn}^2u}.\frac{\operatorname{sn}^2u-\operatorname{sn}^2 4\omega}{1-k^2\operatorname{sn}^2 4\omega.\operatorname{sn}^2u}\ldots$$
$$\ldots\frac{\operatorname{sn}^2u-\operatorname{sn}^2(n-1)\omega}{1-k^2\operatorname{sn}^2(n-1)\omega.\operatorname{sn}^2u}.$$

Da nun $\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}.\mu}{p} = \frac{1}{p'}$ ist, so haben wir

$$1.\quad \begin{cases} y = \frac{1}{p'}\operatorname{sn}u.\operatorname{sn}(u+2\omega)\operatorname{sn}(u-2\omega)\operatorname{sn}(u+4\omega)\operatorname{sn}(u-4\omega)\ldots \\ \qquad\qquad \ldots\operatorname{sn}(u+(n-1)\omega)\operatorname{sn}(u-(n-1)\omega) \text{ oder auch} \\ y = \frac{1}{p'}\operatorname{sn}u.\operatorname{sn}(u+2\omega)\operatorname{sn}(u+4\omega)\operatorname{sn}(u+6\omega)\ldots\operatorname{sn}(u+2(n-1)\omega). \end{cases}$$

Die Formel (2.) §. 286. läfst sich ganz ebenso in

$$y = \frac{1}{p'} \operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u+\omega) \operatorname{sn}(u-\omega) \operatorname{sn}(u+2\omega) \operatorname{sn}(u-2\omega) \operatorname{sn}(u+3\omega) \operatorname{sn}(u-3\omega) \ldots$$
$$\ldots \operatorname{sn}(u+\tfrac{1}{2}(n-1)\omega) \operatorname{sn}(u-\tfrac{1}{2}(n-1)\omega)$$

verwandeln. Setzt man $u+iK'$ statt u, also $\frac{1}{kx}$ statt x und bezeichnet den geänderten Werth von y durch y', so hat man auf der Stelle

$$y' = \frac{1}{p'.k^n} \cdot \frac{1}{\operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u+2\omega) \operatorname{sn}(u+4\omega) \ldots \operatorname{sn}(u+2(n-1)\omega)};$$

daher ist

$$yy' = \frac{1}{p'^2.k^n}.$$

Setzt man also

$$2. \quad \lambda = p'^2.k^n = k^n.(\operatorname{snc}\omega \operatorname{snc} 2\omega \operatorname{snc} 3\omega \ldots \operatorname{snc}\tfrac{1}{2}(n-1)\omega)^4,$$

so ist $y' = \frac{1}{\lambda y}$, und es *verwandelt sich also y in $\frac{1}{\lambda y}$, wenn x in $\frac{1}{kx}$ verwandelt wird.*

Hiernach verwandelt sich also

$$1+y = \frac{1}{q}(1+\operatorname{sn} u)(1+\operatorname{sn}(u+2\omega)) \ldots (1+\operatorname{sn}(u+2(n-1)\omega)) \quad \text{in}$$

$$\frac{1+\lambda y}{\lambda y} = \frac{1}{qk^n} \cdot \frac{(1+k\operatorname{sn} u)(1+k\operatorname{sn}(u+2\omega))(1+k\operatorname{sn}(u+4\omega)) \ldots (1+k\operatorname{sn}(u+2(n-1)\omega))}{\operatorname{sn} u . \operatorname{sn}(u+2\omega) \operatorname{sn}(u+4\omega) \ldots \operatorname{sn}(u+2(n-1)\omega)}.$$

Da nun $\frac{\lambda}{p'qk^n} = \frac{p'}{q} = \frac{1}{r}$ ist, so erhält man, wenn diese Gleichung mit der Gleichung (1.) multiplicirt wird,

$$3. \begin{cases} 1+\lambda y = \frac{1}{r}(1+k\operatorname{sn} u)(1+k\operatorname{sn}(u+2\omega))(1+k\operatorname{sn}(u+4\omega)) \ldots \\ \qquad \ldots (1+k\operatorname{sn}(u+2(n-1)\omega)), \text{ und eben so} \\ 1-\lambda y = \frac{1}{r}(1-k\operatorname{sn} u)(1-k\operatorname{sn}(u+2\omega))(1-k\operatorname{sn}(u+4\omega)) \ldots \\ \qquad \ldots (1-k\operatorname{sn}(u+2(n-1)\omega)). \end{cases}$$

Stellen wir die erste Formel also dar:

$$1+\lambda y = \frac{1}{r}(1+k\operatorname{sn} u) . \begin{Bmatrix} (1+k\operatorname{sn}(u+2\omega)).(1+k\operatorname{sn}(u+4\omega)) \ldots \\ \ldots (1+k\operatorname{sn}(u+(n-1)\omega)) \\ (1+k\operatorname{sn}(u-2\omega)).(1+k\operatorname{sn}(u-4\omega)) \ldots \\ \ldots (1+k\operatorname{sn}(u-(n-1)\omega)) \end{Bmatrix},$$

und beachten, dafs nach §. 36.

$$(1+k\operatorname{sn}(u+2\omega))(1+k\operatorname{sn}(u-2\omega)) = \frac{(\operatorname{dn} 2\omega + k\operatorname{cn} 2\omega . \operatorname{sn} u)^2}{1-k^2\operatorname{sn}^2 2\omega . \operatorname{sn}^2 u}$$
$$= \operatorname{dn}^2 2\omega . \frac{(1+k\operatorname{snc} 2\omega . x)^2}{1-k^2\operatorname{sn}^2 2\omega . x^2}$$

ist, und setzen wir noch

$$4.\quad \begin{cases} B = (1-k\,\mathrm{snc}\,2\omega.x)(1-k\,\mathrm{snc}\,4\omega.x)(1-k\,\mathrm{snc}\,6\omega.x)\ldots \\ \qquad\qquad \ldots(1-k\,\mathrm{snc}(n-1)\omega.x), \\ B' = (1+k\,\mathrm{snc}\,2\omega.x)(1+k\,\mathrm{snc}\,4\omega.x)(1+k\,\mathrm{snc}\,6\omega.x)\ldots \\ \qquad\qquad \ldots(1+k\,\mathrm{snc}(n-1)\omega.x), \end{cases}$$

so haben wir

$$5.\quad 1+\lambda y = (1+kx).\frac{B'^2}{DD'} \quad \text{und} \quad 1-\lambda y = (1-kx).\frac{B^2}{DD'}.$$

Zieht man aus dem Producte dieser beiden Gleichungen die Quadratwurzel, so erhält man

$$\sqrt{(1-\lambda^2 y^2)} = \sqrt{(1-k^2 x^2)}.\frac{BB'}{DD'}.$$

Da nun für $x=1$, $y=1$ ist, so erhält man, wenn man $\sqrt{(1-\lambda^2)}=\lambda'$ setzt, zunächst

$$6.\quad \lambda' = k'.\frac{r'}{r} = \frac{k'^n}{r^2} \quad \text{oder} \quad \lambda' = k'^n.\left(\frac{1}{\mathrm{dn}\,\omega\,\mathrm{dn}\,2\omega\,\mathrm{dn}\,3\omega\ldots.\mathrm{dn}\,\frac{1}{2}(n-1)\omega}\right)^4.$$

§. 288.

Die Function y kann auch in der Form eines $n$gliedrigen Ausdrucks oder in der Form einer geschlossenen Reihe dargestellt werden. Nach §. 287. ist

$$p'y = \frac{x(x^2-\mathrm{sn}^2\omega)(x^2-\mathrm{sn}^2 2\omega)(x^2-\mathrm{sn}^2 3\omega)\ldots.(x^2-\mathrm{sn}^2\frac{1}{2}(n-1)\omega)}{(1-k^2\mathrm{sn}^2\omega.x^2)(1-k^2\mathrm{sn}^2 2\omega.x^2)(1-k^2\mathrm{sn}^2 3\omega.x^2)\ldots(1-k^2\mathrm{sn}^2\frac{1}{2}(n-1)\omega.x^2)}.$$

Sieht man nun y als gegeben, x hingegen als unbekannt an, so hat man eine Gleichung von der Form

$$x^n - \overset{1}{A}x^{n-1} + \overset{2}{A}.x^{n-2} - \ldots. + \overset{n}{A} = 0$$

aufzulösen. In derselben sind die Coëfficienten

$\overset{1}{A} = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}.p.k^{n-1}.p'y$ und

$\overset{2}{A} = -(\mathrm{sn}^2\omega + \mathrm{sn}^2 2\omega + \mathrm{sn}^2 3\omega + \mathrm{sn}^2 4\omega\ldots. + \mathrm{sn}^2\frac{1}{2}(n-1)\omega)$ oder $\overset{2}{A} = -s$,

wenn man zur Abkürzung setzt:

$$1.\quad s = \mathrm{sn}^2\omega + \mathrm{sn}^2 2\omega + \mathrm{sn}^2 3\omega + \ldots. + \mathrm{sn}^2\tfrac{1}{2}(n-1)\omega.$$

Die Wurzeln der vorstehenden Gleichung sind aber schon bekannt; denn es ist $x = \mathrm{sn}\,u$ schon eine Wurzel der Gleichung, und da y nicht geändert wird, wenn u beliebig oft um 2ω vermehrt oder auch vermindert wird, so sind die Wurzeln überhaupt

$$\overset{1}{x} = \mathrm{sn}\,u,\quad \overset{2}{x} = \mathrm{sn}(u+2\omega),\quad \overset{3}{x} = \mathrm{sn}(u-2\omega),\quad \ldots.\quad \overset{n-1}{x} = \mathrm{sn}(u+(n-1)\omega)$$
$$\text{und}\quad \overset{n}{x} = \mathrm{sn}(u-(n-1)\omega).$$

Es ist nun der Coëfficient

$$\overset{1}{A} = \overset{1}{x} + \overset{2}{x} + \overset{3}{x} + \ldots + \overset{n}{x},$$

und der Coëfficient $\overset{2}{A}$ ist gleich der Summe der Producte aus je zwei von diesen Wurzeln. Es ist also

$$\overset{1}{A}{}^{2} = (\overset{1}{x} + \overset{2}{x} + \overset{3}{x} \ldots + \overset{n}{x})^2 = \overset{1}{x}{}^2 + \overset{2}{x}{}^2 + \overset{3}{x}{}^2 \ldots + \overset{n}{x}{}^2 + 2.\overset{2}{A} \text{ oder}$$

$$\overset{1}{x}{}^2 + \overset{2}{x}{}^2 + \overset{3}{x}{}^2 + \ldots + \overset{n}{x}{}^2 = \overset{1}{A}{}^2 - 2\overset{2}{A}.$$

Wir vereinfachen noch den Ausdruck des Coëfficienten $\overset{1}{A}$. Es ist $\mu = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} . \frac{p}{p'}$, also $\overset{1}{A} = \mu . p^{2} . k^{n-1} . y = \frac{\mu\lambda}{k} . y$. Daher ist

$$2.\quad \begin{cases} \frac{\lambda\mu}{k} . y = \operatorname{sn} u + \operatorname{sn}(u+2\omega) + \operatorname{sn}(u+4\omega) + \operatorname{sn}(u+6\omega) + \ldots \\ \qquad\qquad \ldots + \operatorname{sn}(u+(n-1)\omega) \\ \qquad + \operatorname{sn}(u-2\omega) + \operatorname{sn}(u-4\omega) + \operatorname{sn}(u-6\omega) + \ldots \\ \qquad\qquad \ldots + \operatorname{sn}(u-(n-1)\omega) \end{cases}$$

und noch aufserdem

$$3.\quad \begin{cases} \left(\frac{\lambda\mu}{k}\right)^2 . y^2 + 2s = \operatorname{sn}^2 u + \operatorname{sn}^2(u+2\omega) + \operatorname{sn}^2(u+4\omega) + \operatorname{sn}^2(u+6\omega) \ldots \\ \qquad\qquad \ldots + \operatorname{sn}^2(u+(n-1)\omega) \\ \qquad + \operatorname{sn}^2(u-2\omega) + \operatorname{sn}^2(u-4\omega) + \operatorname{sn}^2(u-6\omega) \ldots \\ \qquad\qquad \ldots + \operatorname{sn}^2(u-(n-1)\omega). \end{cases}$$

§. 289.

Differentiiren wir die Formel (2.) §. 288., so erhalten wir

$$\frac{\lambda\mu}{k} . \frac{\partial y}{\partial u} =$$

$$\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u + \operatorname{cn}(u+2\omega)\operatorname{dn}(u+2\omega) + \ldots + \operatorname{cn}(u+(n-1)\omega)\operatorname{dn}(u+(n-1)\omega)$$
$$+ \operatorname{cn}(u-2\omega)\operatorname{dn}(u-2\omega) + \ldots + \operatorname{cn}(u-(n-1)\omega)\operatorname{dn}(u-(n-1)\omega),$$

woraus erhellet, dafs das Differentialverhältnifs $\frac{\partial y}{\partial u}$ ungeändert bleibt, wenn das Argument u beliebig oft um 2ω vermehrt oder auch vermindert wird. Dasselbe folgt übrigens aus der gleichen Eigenschaft von y selbst.

Da

$$\operatorname{cn}(u+2\omega)\operatorname{dn}(u+2\omega) + \operatorname{cn}(u-2\omega)\operatorname{dn}(u-2\omega)$$
$$= \frac{2\operatorname{cn} 2\omega \operatorname{dn} 2\omega . \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u (1 + k^2 \operatorname{sn}^2 2\omega . \operatorname{sn}^2 u)}{(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 2\omega . \operatorname{sn}^2 u)^2}$$

ist, so erhalten wir auch

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{k}{\lambda\mu}\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u.\Big(1 + \frac{2\,\mathrm{cn}\,2\omega\,\mathrm{dn}\,2\omega\,(1+k^2\,\mathrm{sn}^2\,2\omega.x^2)}{(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,2\omega.x^2)^2}$$
$$+ \frac{2\,\mathrm{cn}\,4\omega.\mathrm{dn}\,4\omega.(1+k^2\,\mathrm{sn}^2\,4\omega.x^2)}{(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,4\omega.x^2)^2} + \dots + \frac{2\,\mathrm{cn}(n-1)\omega.\mathrm{dn}(n-1)\omega.(1+k^2\,\mathrm{sn}^2(n-1)\omega.x^2)}{(1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,(n-1)\omega.x^2)^2}\Big).$$

Der Factor $\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u = \sqrt{(1-x^2)}.\sqrt{(1-k^2x^2)}$ ist $=0$ für $x = \pm 1$ und für $x = \pm\frac{1}{k}$, d. h. für

$$x = \pm\,\mathrm{sn}\,K \quad \text{und für} \quad x = \pm\,\mathrm{sn}(K+iK');$$

für diese Werthe ist daher auch $\frac{\partial y}{\partial u} = 0$. Da sich nun der Werth dieses Verhältnisses nicht ändert, wenn das Argument u um ein Vielfaches von 2ω vermehrt oder vermindert wird, so ist überhaupt $\frac{\partial y}{\partial u} = 0$ für Werthe von der Form

$x = \pm\,\mathrm{sn}(K \pm 2a\omega) = \pm\,\mathrm{snc}\,2a\omega$ und $x = \pm\,\mathrm{sn}(K+iK' \pm 2a\omega) = \pm\frac{1}{k\,\mathrm{snc}\,2a\omega}$,

wenn a eine ganze Zahl bezeichnet. Der eingeklammerte vielgliederige Factor von $\frac{\partial y}{\partial u}$ kann als eine rationale gebrochene Function von x dargestellt werden; der Nenner ist dann $(DD')^2$ und also eine Form $(2n-2)$ten Grades. Bezeichnen wir den Zähler mit X, so daſs

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\mathrm{cn}\,u.\mathrm{dn}\,u.X}{D.D'^2}$$

ist, so ist auch X eine rationale ganze Function von x vom $(2n-2)$ten Grade, welche für die folgenden Werthe von x gleich Null werden muſs:

$$x = \pm\,\mathrm{snc}\,2\omega,\quad \pm\,\mathrm{snc}\,4\omega,\quad \pm\,\mathrm{snc}\,6\omega,\ \dots\ \pm\,\mathrm{snc}(n-1)\omega \quad \text{und}$$
$$x = \pm\frac{1}{k\,\mathrm{snc}\,2\omega},\quad \frac{\pm 1}{k\,\mathrm{snc}\,4\omega},\quad \frac{\pm 1}{k\,\mathrm{snc}\,6\omega},\ \dots\ \frac{\pm 1}{k\,\mathrm{snc}(n-1)\omega}.$$

Alle diese Werthe sind verschieden von einander, und da ihre Anzahl $=2n-2$ mit dem Grade der Gleichung $X=0$ übereinstimmt, auch der Nenner $(DD')^2$ für keinen jener Werthe unendlich wird, so sind jene Werthe die Wurzeln der Gleichung $X=0$.

Die in der ersten Horizontalreihe enthaltenen Wurzeln befriedigen auch die Gleichung $C.C'=0$ und die in der zweiten Horizontalreihe enthaltenen Wurzeln befriedigen die Gleichung $B.B'=0$ und sind die sämmtlichen Wurzeln dieser Gleichung; daher hat die Gleichung $X=0$ dieselben Wurzeln wie die Gleichung $BB'CC'=0$, und es ist mithin für jeden Werth von x,

$$X = g.BB'CC',$$

wo g eine noch zu ermittelnde Constante bezeichnet, oder auch

$$\frac{\partial y}{\partial u} = g.\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u.\frac{C.C'.B.B'}{D.D'.D.D'}.$$

Da aber aus den Gleichungen (5.) §. 286. durch Multiplication $\sqrt{(1-y^2)} = \text{cn}\,u.\frac{C.C'}{D.D'}$ folgt und nach §. 287. $\sqrt{(1-\lambda^2 y^2)} = \text{dn}\,u.\frac{B.B'}{D.D'}$ ist, so ist

$$g\partial u = \frac{\partial y}{\sqrt{(1-y^2)}\sqrt{(1-\lambda^2 y)}}.$$

Da ferner für $u=0$, $y=0$ ist, so ist

$$gu = \int_0 \frac{\partial y}{\sqrt{(1-y^2)}\sqrt{(1-\lambda^2 y^2)}}.$$

Setzen wir $gu = v$, so ist, der gefundenen Gleichung gemäfs, y der Modularsinus des Arguments v für den Modul λ. Beziehen wir also die Functionen $\text{sn}\,v$, $\text{cn}\,v$, $\text{dn}\,v$, $\text{tn}\,v$ auf den Modul λ, also $\text{sn}'v$, $\text{cn}'v$, $\text{dn}'v$, $\text{tn}'v$ auf den Modul $\lambda' = \sqrt{(1-\lambda^2)}$, so ist

$$1.\quad y = \text{sn}\,v,\quad \sqrt{(1-y^2)} = \text{cn}\,v,\quad \sqrt{(1-\lambda^2 y)} = \text{dn}\,v.$$

Den constanten Factor g finden wir leicht. Nach §. 286. ist $\frac{y}{x}$ (für $x=0$) $=\mu$; ferner ist $\frac{y}{x} = \frac{\text{sn}\,v}{\text{sn}\,u}$ nach der bekannten Regel für $u=0$ gleich $\frac{\partial\,\text{sn}\,v}{\partial\,\text{sn}\,u} = \frac{\partial v}{\partial u} = g$, also ist $g=\mu$ und mithin

$$2.\quad v = \mu.u.$$

Die Gleichung $x = \text{sn}\,u$ ist also in die ähnliche $y = \text{sn}\,v$ mit einem andern Modul durch eine Substitution $n$ten Grades umgeformt worden, und es haben die Argumente u und v das durch die Gleichung (2.) ausgedrückte constante Verhältnifs zu einander.

§. 290.

Wir haben nun in den vorigen Formeln nur noch durchgehends $\text{sn}\,v$, mit Beziehung auf den Modul λ, statt y zu setzen. Aufserdem ist

$p' = \sqrt{\frac{\lambda}{k^n}}$,

$r = \sqrt{\frac{k'^n}{\lambda'}}$, und da $q = r.p'$ ist, so ist

$q = \sqrt{\frac{\lambda k'^n}{\lambda' k^n}}$. Ferner ist $p = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}.\mu.p'$, also

$p = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}.\mu\sqrt{\frac{\lambda}{k^n}}$. Da $q' = k'^{n-1}.\frac{p}{r} = \frac{k'^n}{k'}.\frac{p}{r}$ ist, so ist

$q' = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}.\mu\sqrt{\frac{\lambda\lambda'.k'^n}{k'k'.k^n}}$ und

$r' = \sqrt{(\lambda' k'^{n-2})}$.

Werden auch noch diese Werthe benutzt, so erhalten wir

$$1.\quad\begin{cases}
\operatorname{sn} v = \sqrt{\left(\frac{k^n}{\lambda}\right)}.\operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u+2\omega)\operatorname{sn}(u+4\omega)\operatorname{sn}(u+6\omega)\ldots \\
\qquad\ldots\operatorname{sn}(u+2(n-1)\omega), \\
1-\operatorname{sn} v = \sqrt{\left(\frac{\lambda' k^n}{\lambda k'^n}\right)}(1-\operatorname{sn} u)(1-\operatorname{sn}(u+2\omega))(1-\operatorname{sn}(u+4\omega))\ldots \\
\qquad\ldots(1-\operatorname{sn}(u+2(n-1)\omega)), \\
1+\operatorname{sn} v = \sqrt{\left(\frac{\lambda' k^n}{\lambda k'^n}\right)}(1+\operatorname{sn} u)(1+\operatorname{sn}(u+2\omega))(1+\operatorname{sn}(u+4\omega))\ldots \\
\qquad\ldots(1+\operatorname{sn}(u+2(n-1)\omega)), \\
1-\lambda\operatorname{sn} v = \sqrt{\left(\frac{\lambda'}{k'^n}\right)}(1-k\operatorname{sn} u)(1-k\operatorname{sn}(u+2\omega))(1-k\operatorname{sn}(u+4\omega))\ldots \\
\qquad\ldots(1-k\operatorname{sn}(u+2(n-1)\omega)), \\
1+\lambda\operatorname{sn} v = \sqrt{\left(\frac{\lambda'}{k'^n}\right)}(1+k\operatorname{sn} u)(1+k\operatorname{sn}(u+2\omega))(1+k\operatorname{sn}(u+4\omega))\ldots \\
\qquad\ldots(1+k\operatorname{sn}(u+2(n-1)\omega)), \\
\operatorname{cn} v = \sqrt{\left(\frac{\lambda' k^n}{\lambda k'^n}\right)}.\operatorname{cn} u.\operatorname{cn}(u+2\omega)\operatorname{cn}(u+4\omega)\ldots.\operatorname{cn}(u+2(n-1)\omega), \\
\operatorname{dn} v = \sqrt{\left(\frac{\lambda'}{k'^n}\right)}.\operatorname{dn} u.\operatorname{dn}(u+2\omega)\operatorname{dn}(u+4\omega)\ldots.\operatorname{dn}(u+2(n-1)\omega), \\
\operatorname{tn} v = \sqrt{\left(\frac{k'^n}{\lambda'}\right)}.\operatorname{tn} u.\operatorname{tn}(u+2\omega)\operatorname{tn}(u+4\omega)\ldots.\operatorname{tn}(u+2(n-1)\omega).
\end{cases}$$

Aus diesen Formeln folgt noch, da $\operatorname{snc} v = \frac{\operatorname{cn} v}{\operatorname{dn} v}$ ist,

$$2.\quad\begin{cases}
\operatorname{snc} v = \sqrt{\left(\frac{k^n}{\lambda}\right)}\operatorname{snc} u\operatorname{snc}(u+2\omega)\operatorname{snc}(u+4\omega)\ldots.\operatorname{snc}(u+2(n-1)\omega);\ \text{ebenso} \\
\operatorname{cnc} v = \sqrt{\left(\frac{\lambda' k^n}{\lambda k'^n}\right)}\operatorname{cnc} u\operatorname{cnc}(u+2\omega)\operatorname{cnc}(u+4\omega)\ldots.\operatorname{cnc}(u+2(n-1)\omega), \\
\operatorname{dnc} v = \sqrt{\left(\frac{\lambda'}{k'^n}\right)}\operatorname{dnc} u\operatorname{dnc}(u+2\omega)\operatorname{dnc}(u+4\omega)\ldots.\operatorname{dnc}(u+2(n-1)\omega), \\
\operatorname{tnc} v = \sqrt{\left(\frac{k'^n}{\lambda'}\right)}\operatorname{tnc} u\operatorname{tnc}(u+2\omega)\operatorname{tnc}(u+4\omega)\ldots.\operatorname{tnc}(u+2(n-1)\omega),
\end{cases}$$

woraus erhellet, dafs $\operatorname{sn} v$, $\operatorname{cn} v$, $\operatorname{dn} v$ und $\operatorname{tn} v$ sich in $\operatorname{snc} v$, $\operatorname{cnc} v$, $\operatorname{dnc} v$ und $\operatorname{tnc} v$ verwandeln, wenn $K-u$ statt u gesetzt wird, wenn man nur beachtet, dafs $-\omega$ statt ω gesetzt werden darf, ohne die vorstehenden Formeln im mindesten zu verändern. Bezeichnen wir den zum Modul λ gehörigen Modular-Quadranten mit L, so ist sowohl

$$v = \mu.u, \quad \text{als auch} \quad L-v = \mu(K-u), \quad \text{und also}$$

$$3.\quad L = \mu.K.$$

Der Quadrant L ist mithin reell, wenn μ es ist, und imaginär, wenn μ imaginär ist.

Setzt man in der Formel für $\operatorname{dn} v$, $u-iK'$ statt u, so verwandelt

sich $\mathrm{dn}\,u$ in $\frac{i}{\mathrm{tn}\,u}$ und man erhält, wenn man den geänderten Werth von v mit v' bezeichnet,

$$\mathrm{dn}\,v' = \sqrt{\left(\frac{\lambda'}{k'^n}\right)} \cdot \frac{i^n}{\mathrm{tn}\,u\;\mathrm{tn}(u+2\omega)\;\mathrm{tn}(u+4\omega)\ldots\mathrm{tn}(u+2(n-1)\omega)},\text{ also}$$

$$\mathrm{dn}\,v' = \frac{i^n}{\mathrm{tn}\,v}.$$

Bezeichnet man nun den zum Modul λ' gehörigen Modular-Quadranten mit L', so ist auch $\mathrm{dn}(v-niL') = \frac{i^n}{\mathrm{tn}\,v}$, und also $\mathrm{dn}\,v' = \mathrm{dn}(v-niL')$, oder $v' = v-niL$. Wird also $u-iK'$ statt u gesetzt, so verwandelt sich v in $v-niL'$; mithin verwandelt sich die Gleichung

$v=\mu u$ in $v-niL' = \mu(u-iK')$, und es ist also $niL' = \mu.iK'$, oder

$$4.\quad n.L' = \mu.K'.$$

Aus dieser und der vorigen Gleichung erhält man endlich

$$5.\quad \frac{L}{L'} = n.\frac{K}{K'}.$$

§. 291.

Die Formeln für $\mathrm{sn}\,v$, $\mathrm{cn}\,v$, $\mathrm{dn}\,v$ und $\mathrm{tn}\,v$ lassen sich auch also darstellen:

$$\mathrm{sn}\,v = \sqrt{\left(\frac{k^n}{\lambda}\right)}\,.\,\mathrm{sn}\,u\,.\,\mathrm{sn}(u+\omega)\,\mathrm{sn}(u-\omega)\,\mathrm{sn}(u+2\omega)\,\mathrm{sn}(u-2\omega)\ldots$$
$$\ldots\mathrm{sn}(u+\tfrac{1}{2}(n-1)\omega)\,\mathrm{sn}(u-\tfrac{1}{2}(n-1)\omega),$$

$$\mathrm{cn}\,v = \sqrt{\left(\frac{\lambda' k^n}{\lambda k'^n}\right)}\,.\,\mathrm{cn}\,u\,.\,\mathrm{cn}(u+\omega)\,\mathrm{cn}(u-\omega)\,\mathrm{cn}(u+2\omega)\,\mathrm{cn}(u-2\omega)\ldots$$
$$\ldots\mathrm{cn}(u+\tfrac{1}{2}(n-1)\omega)\,\mathrm{cn}(u-\tfrac{1}{2}(n-1)\omega),$$

$$\mathrm{tn}\,v = \sqrt{\left(\frac{k'^n}{\lambda'}\right)}\,.\,\mathrm{tn}\,u\,.\,\mathrm{tn}(u+\omega)\,\mathrm{tn}(u-\omega)\,\mathrm{tn}(u+2\omega)\,\mathrm{tn}(u-2\omega)\ldots$$
$$\ldots\mathrm{tn}(u+\tfrac{1}{2}(n-1)\omega)\,\mathrm{tn}(u-\tfrac{1}{2}(n-1)\omega),$$

$$\mathrm{dn}\,v = \sqrt{\left(\frac{\lambda'}{k'^n}\right)}\,.\,\mathrm{dn}\,u\,.\,\mathrm{dn}(u+\omega)\,\mathrm{dn}(u-\omega)\,\mathrm{dn}(u+2\omega)\,\mathrm{dn}(u-2\omega)\ldots$$
$$\ldots\mathrm{dn}(u+\tfrac{1}{2}(n-1)\omega)\,\mathrm{dn}(u-\tfrac{1}{2}(n-1)\omega).$$

Setzt man hierin gleichzeitig $\frac{1}{2}u$ statt u und $\frac{1}{2}v$ statt v, so bleibt die Gleichung $v=\mu.u$ ungeändert und man erhält dadurch

$$\mathrm{tn}\tfrac{1}{2}v\,\mathrm{dn}\tfrac{1}{2}v = \mathrm{tn}\tfrac{1}{2}u.\mathrm{dn}\tfrac{1}{2}u.\mathrm{tn}(\tfrac{1}{2}u+\omega)\,\mathrm{dn}(\tfrac{1}{2}u+\omega)\,\mathrm{tn}(\tfrac{1}{2}u-\omega)\,\mathrm{dn}(\tfrac{1}{2}u-\omega)$$
$$\times\,\mathrm{tn}(\tfrac{1}{2}u+2\omega)\,\mathrm{dn}(\tfrac{1}{2}u+2\omega)\,\mathrm{tn}(\tfrac{1}{2}u-2\omega)\,\mathrm{dn}(\tfrac{1}{2}u-2\omega)\ldots$$
$$\ldots\mathrm{tn}(\tfrac{1}{2}u+\tfrac{1}{2}(n-1)\omega)\,\mathrm{dn}(\tfrac{1}{2}u+\tfrac{1}{2}(n-1)\omega)\,\mathrm{tn}(\tfrac{1}{2}u-\tfrac{1}{2}(n-1)\omega)\,\mathrm{dn}(\tfrac{1}{2}u-\tfrac{1}{2}(n-1)\omega).$$

Da nun aber $\sqrt{\frac{1-\mathrm{cn}\,u}{1+\mathrm{cn}\,u}} = \mathrm{tn}\tfrac{1}{2}u\;\mathrm{dn}\tfrac{1}{2}u$ ist, nach §. 32., so haben wir

$$1.\quad \sqrt{\frac{1-\mathrm{cn}\,v}{1+\mathrm{cn}\,v}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1-\mathrm{cn}\,u}{1+\mathrm{cn}\,u}\cdot\frac{1-\mathrm{cn}(u+2\omega)}{1+\mathrm{cn}(u+2\omega)}\cdot\frac{1-\mathrm{cn}(u-2\omega)}{1+\mathrm{cn}(u-2\omega)}\cdots\frac{1-\mathrm{cn}(u+(n-1)\omega)}{1+\mathrm{cn}(u+(n-1)\omega)}\cdot\frac{1-\mathrm{cn}(u-(n-1)\omega)}{1+\mathrm{cn}(u-(n-1)\omega)}\right)}.$$

Wird diese Formel mit der von $\operatorname{sn} v$ multiplicirt, so erhält man, nach einer geringen Abänderung,

$$2.\quad\begin{cases} 1-\operatorname{cn} v = \sqrt{\left(\frac{k^n}{\lambda}\right)}(1-\operatorname{cn} u)(1-\operatorname{cn}(u+2\omega))(1-\operatorname{cn}(u+4\omega))\ldots \\ \qquad\qquad \ldots(1-\operatorname{cn}(u+2(n-1)\omega)) \text{ und die Division giebt} \\ 1+\operatorname{cn} v = \sqrt{\left(\frac{k^n}{\lambda}\right)}(1+\operatorname{cn} u)(1+\operatorname{cn}(u+2\omega))(1+\operatorname{cn}(u+4\omega))\ldots \\ \qquad\qquad \ldots(1+\operatorname{cn}(u+2(n-1)\omega)). \end{cases}$$

Beachtet man, dafs $\sqrt{\frac{1-\operatorname{dn} u}{1+\operatorname{dn} u}} = k \operatorname{sn}\frac{1}{2}u \operatorname{snc}\frac{1}{2}u$ ist, so leitet man zunächst

$$3.\quad \sqrt{\frac{1-\operatorname{dn} v}{1+\operatorname{dn} v}} = \sqrt{\left(\frac{1-\operatorname{dn} u}{1+\operatorname{dn} u}\cdot\frac{1-\operatorname{dn}(u+2\omega)}{1+\operatorname{dn}(u+2\omega)}\cdot\frac{1-\operatorname{dn}(u+4\omega)}{1+\operatorname{dn}(u+4\omega)}\cdots\frac{1-\operatorname{dn}(u+2(n-1)\omega)}{1+\operatorname{dn}(u+2(n-1)\omega)}\right)}$$

her, und da $\sqrt{(1-\operatorname{dn} u)}\sqrt{(1+\operatorname{dn} u)} = k \operatorname{sn} u$ ist, so erhält man

$$4.\quad\begin{cases} 1-\operatorname{dn} v = \sqrt{\left(\frac{\lambda}{k^n}\right)}(1-\operatorname{dn} u)(1-\operatorname{dn}(u+2\omega))(1-\operatorname{dn}(u+4\omega))\ldots \\ \qquad\qquad \ldots(1-\operatorname{dn}(u+2(n-1)\omega)), \\ 1+\operatorname{dn} v = \sqrt{\left(\frac{\lambda}{k^n}\right)}(1+\operatorname{dn} u)(1+\operatorname{dn}(u+2\omega))(1+\operatorname{dn}(u+4\omega))\ldots \\ \qquad\qquad \ldots(1+\operatorname{dn}(u+2(n-1)\omega)). \end{cases}$$

§. 292.

Setzt man auch in der Formel §. 288. für y den Werth $\operatorname{sn} v$, so hat man

$$1.\quad \frac{\lambda\mu}{k}\operatorname{sn} v = \operatorname{sn} u + \operatorname{sn}(u+2\omega) + \operatorname{sn}(u+4\omega)\ldots + \operatorname{sn}(u+(n-1)\omega) \\ + \operatorname{sn}(u-2\omega) + \operatorname{sn}(u-4\omega)\ldots + \operatorname{sn}(u-(n-1)\omega).$$

Setzt man in dieser Formel $u+iK'$ statt u, wodurch $\operatorname{sn} v$ in $\operatorname{sn}(v+niL') = \frac{1}{\lambda \operatorname{sn} v}$ übergeht, so erhält man

$$2.\quad \frac{\mu}{\operatorname{sn} v} = \frac{1}{\operatorname{sn} u} + \frac{1}{\operatorname{sn}(u+2\omega)} + \frac{1}{\operatorname{sn}(u+4\omega)}\cdots + \frac{1}{\operatorname{sn}(u+(n-1)\omega)} \\ + \frac{1}{\operatorname{sn}(u-2\omega)} + \frac{1}{\operatorname{sn}(u-4\omega)}\cdots + \frac{1}{\operatorname{sn}(u-(n-1)\omega)}.$$

Setzt man in der Formel (1.) §. 291. $K-u$ statt u, also auch $L-v$ statt v, und differentiirt man dieselbe logarithmisch, beachtend, dafs $\partial \log\sqrt{\frac{1+\operatorname{cnc} u}{1-\operatorname{cnc} u}} = \partial\mathfrak{L}(\frac{1}{2}\pi - \operatorname{amc} u) = \frac{k'}{\operatorname{cn} u}.\partial u$, also $\partial \log\sqrt{\frac{1+\operatorname{cnc} v}{1-\operatorname{cnc} v}} = \frac{\lambda'}{\operatorname{sn} v}\partial v$ und auch $\partial v = \mu.\partial u$ ist, so erhält man

$$3.\quad \frac{\lambda'}{k'}\mu.\frac{1}{\operatorname{cn} v} = \frac{1}{\operatorname{cn} u} + \frac{1}{\operatorname{cn}(u+2\omega)} + \frac{1}{\operatorname{cn}(u+4\omega)} + \cdots + \frac{1}{\operatorname{cn}(u+(n-1)\omega)} \\ + \frac{1}{\operatorname{cn}(u-2\omega)} + \frac{1}{\operatorname{cn}(u-4\omega)} + \cdots + \frac{1}{\operatorname{cn}(u-(n-1)\omega)}.$$

Setzt man in dieser Formel $u+iK'$ statt u, also $v+niL'$ statt v, so verwandelt sich $\operatorname{cn} u$ in $\frac{k'}{ik}\cdot\frac{1}{\operatorname{cnc} u}$, und $\operatorname{cn} v$ in $\frac{1}{i^n}\cdot\frac{\lambda'}{\lambda}\cdot\frac{1}{\operatorname{cnc} v}$. Setzt man daher aufserdem noch $K-u$ statt u, also $L-v$ statt v, so erhält man, da $i^{n-1}=(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}$ ist,

$$4.\quad \begin{cases} (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}.\frac{\lambda}{k}.\mu.\operatorname{cn} v = \operatorname{cn} u+\operatorname{cn}(u+2\omega)+\operatorname{cn}(u+4\omega)+\ldots \\ \qquad\ldots+\operatorname{cn}(u+(n-1)\omega) \\ \qquad+\operatorname{cn}(u-2\omega)+\operatorname{cn}(u-4\omega)+\ldots \\ \qquad\ldots+\operatorname{cn}(u-(n-1)\omega). \end{cases}$$

Da $\partial\log\sqrt{\frac{1+\operatorname{dnc} u}{1-\operatorname{dnc} u}}=\partial\mathfrak{L}\left(\frac{1}{2}\pi-\operatorname{am}\left(k(K-u),\ \frac{1}{k}\right)\right)=k'\operatorname{tn} u.\partial u$ ist, so erhält man, wenn man die Formel (3.) §. 291. logarithmisch differentiirt,

$$5.\quad \begin{cases} \frac{\lambda'}{k'}\mu.\operatorname{tn} v=\operatorname{tn} u+\operatorname{tn}(u+2\omega)+\operatorname{tn}(u+4\omega)+\ldots.+\operatorname{tn}(u+(n-1)\omega) \\ \qquad+\operatorname{tn}(u-2\omega)+\operatorname{tn}(u-4\omega)+\ldots.+\operatorname{tn}(u-(n-1)\omega). \end{cases}$$

Setzt man in dieser Formel $u-iK'$ statt u, also $\frac{i}{\operatorname{dn} u}$ statt $\operatorname{tn} u$, so verwandelt sich $\operatorname{tn} v$ in $\frac{i^n}{\operatorname{dn} v}$. Wird aufserdem noch $K-u$ statt u gesetzt, so erhält man

$$6.\quad \begin{cases} (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}.\mu.\operatorname{dn} v = \operatorname{dn} u+\operatorname{dn}(u+2\omega)+\operatorname{dn}(u+4\omega)+\ldots \\ \qquad\ldots+\operatorname{dn}(u+(n-1)\omega) \\ \qquad+\operatorname{dn}(u-2\omega)+\operatorname{dn}(u-4\omega)+\ldots \\ \qquad\ldots+\operatorname{dn}(u-(n-1)\omega). \end{cases}$$

Uebrigens hätte man auch alle diese Formeln durch dasselbe Verfahren herleiten können, durch welches die erste von ihnen §. 288. hergeleitet worden ist.

Da $\operatorname{sn}^2(u+(n-\alpha)\omega)=\operatorname{sn}^2(u-\alpha\omega)$ ist, so kann die Formel (3.) §. 288. auch also dargestellt werden:

$$7.\quad \left(\frac{\lambda\mu}{k}\right)^2.\operatorname{sn}^2 v = \left.\begin{matrix} \operatorname{sn}^2 u+\operatorname{sn}^2(u+\omega)+\operatorname{sn}^2(u+2\omega)+\ldots+\operatorname{sn}^2(u+\frac{1}{2}(n-1)\omega) \\ +\operatorname{sn}^2(u-\omega)+\operatorname{sn}^2(u-2\omega)+\ldots+\operatorname{sn}^2(u-\frac{1}{2}(n-1)\omega) \end{matrix}\right\}-2s$$

für

$$s=\operatorname{sn}^2\omega+\operatorname{sn}^2 2\omega+\operatorname{sn}^2 3\omega+\ldots.+\operatorname{sn}^2\tfrac{1}{2}(n-1)\omega.$$

§. 293.

Nach Formel (1. §. 96.) hat man, wenn $a=1$, $b=0$, $a'=0$ und $b'=1$ gesetzt wird,

$$\partial\left(\frac{K'}{K}\right)=-\tfrac{1}{2}\pi.\frac{\partial k}{kk'^2}\cdot\frac{1}{K^2}.$$

Ganz ebenso ist in Beziehung auf den Modul λ auch

$$\partial\left(\frac{L'}{L}\right) = -\tfrac{1}{2}\pi \cdot \frac{\partial\lambda}{\lambda\lambda'^2} \cdot \frac{1}{L^2},$$

und da nach §. 290. $\frac{L}{L'} = n \cdot \frac{K}{K'}$ ist, so ist

$$\frac{1}{K^2} \cdot \frac{\partial k}{kk'^2} = \frac{n}{L^2} \cdot \frac{\partial\lambda}{\lambda\lambda'^2}.$$

Da $L = \mu . K$, also $\frac{1}{K^2} = \frac{\mu^2}{L^2}$ ist, so reducirt sich die vorige Gleichung auf

$$\mu^2 \cdot \frac{\partial k}{kk'^2} = n \cdot \frac{\partial\lambda}{\lambda\lambda'^2}, \text{ oder auch auf}$$

$$1. \quad \mu^2 = n \cdot \frac{kk'^2}{\lambda\lambda'^2} \cdot \frac{\partial\lambda}{\partial k}.$$

Differentiirt man also die Modulargleichung, d. h. die Gleichung zwischen dem alten Modul k und dem neuen λ, so kann man auf diesem Wege aus ihr die Gröſse des Multiplicators μ in der Gleichung $v = \mu . u$ als eine Function der Moduln λ und k, oder auch als eine Function eines dieser Moduln herleiten.

Die Gleichungen $\sqrt{\frac{\lambda}{k^n}} = p'$ und $\sqrt{\frac{k'^n}{\lambda'}} = r$ sind im Grunde nur zwei verschiedene Formen der vorhin erwähnten Modulargleichungen, wenn man sich an die §. 286. angegebenen Bedeutungen von p' und r erinnert.

Auſser der vorhin erwähnten Substitution $n$ten Grades giebt es noch eine Substitution desselben Grades, wodurch man von dem Modul λ zum Modul k zurückgelangt, und welche insofern als die umgekehrte der vorigen anzusehen ist. Wird der bei dieser Substitution anzuwendende Multiplicator mit μ' bezeichnet, so ist auch

$$\mu'^2 = n \cdot \frac{\lambda\lambda'^2}{k . k'^2} \cdot \frac{\partial k}{\partial\lambda}.$$

Wird diese Gleichung mit der vorigen multiplicirt, so erhält man $\mu^2 . \mu'^2 = n^2$, oder auch

$$2. \quad \mu . \mu' = n.$$

Wir fanden wirklich bei den Substitutionen dritten Grades $\mu . \mu = 3$, und bei den Substitutionen fünften Grades die Formel $\mu . \mu' = 5$.

Zusatz. Aus den Formeln §. 292. ziehen wir noch einige bemerkenswerthe Folgerungen, indem wir das Argument u entweder $= 0$ oder auch $u = K$ setzen.

Die Formel (1.) daselbst giebt, wenn $u = K$ gesetzt wird, also auch $v = L$:

$$1.\quad \frac{\lambda\mu}{k} = 1 + 2\,\mathrm{snc}\,2\omega + 2\,\mathrm{snc}\,4\omega + 2\,\mathrm{snc}\,6\omega \ldots + 2\,\mathrm{snc}\,(n-1)\omega.$$

Ferner ist

$$2.\quad \mu = 1 + \frac{2}{\mathrm{snc}\,2\omega} + \frac{2}{\mathrm{snc}\,4\mu} + \frac{2}{\mathrm{snc}\,6\omega} + \ldots + \frac{2}{\mathrm{snc}\,(n-1)\omega},$$

$$3.\quad (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} \cdot \frac{\lambda\mu}{k} = 1 + 2\,\mathrm{cn}\,2\omega + 2\,\mathrm{cn}\,4\omega + 2\,\mathrm{cn}\,6\omega + \ldots + 2\,\mathrm{cn}\,(n-1)\omega,$$

$$4.\quad (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} \cdot \mu = 1 + 2\,\mathrm{dn}\,2\omega + 2\,\mathrm{dn}\,4\omega + 2\,\mathrm{dn}\,6\omega + \ldots + 2\,\mathrm{dn}\,(n-1)\omega,$$

$$5.\quad (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} \cdot \frac{\lambda'\mu}{k'} = 1 + \frac{2}{\mathrm{dn}\,2\omega} + \frac{2}{\mathrm{dn}\,4\omega} + \frac{2}{\mathrm{dn}\,6\omega} + \ldots + \frac{2}{\mathrm{dn}\,(n-1)\omega},$$

$$6.\quad \frac{\lambda'\mu}{k'} = 1 + \frac{2}{\mathrm{cn}\,2\omega} + \frac{2}{\mathrm{cn}\,4\omega} + \frac{2}{\mathrm{cn}\,6\omega} + \ldots + \frac{2}{\mathrm{cn}\,(n-1)\omega}.$$

§. 294.

Die umgekehrte Substitution $n$ten Grades, wenn n eine ungerade ganze Zahl ist.

Nach §. 290. ist $\mathrm{sn}\,v = \sqrt{\left(\frac{k^n}{\lambda}\right)} \cdot \overset{n-1}{\underset{0}{\mathrm{P}}} \{\mathrm{sn}\,(u + 2\gamma\omega)\}$, wenn das Zeichen $\overset{n-1}{\underset{0}{\mathrm{P}}}$ ein Product aus den n Factoren bezeichnet, welche man aus dem allgemein Factor $\mathrm{sn}\,(u + 2\gamma\omega)$ dadurch bildet, dafs man der veränderlichen positiven ganzen Zahl γ die Werthe $0, 1, 2, 3 \ldots (n-1)$ beilegt.

Vermehren wir nun das Argument u noch um

$$4\delta \cdot \frac{a'K + b'iK'}{n},$$

so mufs, wenn die vorige Formel richtig bleiben soll, der Gleichung $v = \mu . u$ gemäfs, das Argument v vermehrt werden um

$$4\mu\delta \cdot \left(\frac{a'K + b'iK'}{n}\right) = 4\delta \cdot \left(\frac{a'L + nb'iL'}{n}\right) = 4\delta \cdot \left(\frac{a'}{n}L + b'iL'\right)$$
$$= \frac{4\delta a'}{n}L + 4\delta b'iL'.$$

Da aber δ und b' ganze Zahlen sind, so ist wegen der Beziehung auf den Modul λ,

$$\mathrm{sn}\left(v + \frac{4\delta a'}{n}L + 4\delta b'iL'\right) = \mathrm{sn}\left(v + \frac{4\delta a'}{n}L\right) \text{ und also}$$

$$\mathrm{sn}\left(v + \frac{4\delta a'}{n}L\right) = \sqrt{\left(\frac{k^n}{\lambda}\right)} \cdot \overset{n-1}{\underset{0}{\mathrm{P}}} \left\{\mathrm{sn}\left(u + \frac{4(a\gamma + a'\delta)K + 4(b\gamma + b'\delta)iK'}{n}\right)\right\},$$

wenn in dieser Formel nur γ als veränderliche positive ganze Zahl betrachtet wird.

Setzen wir nun $a\gamma + a'\delta = \alpha$ und $b\gamma + b'\delta = \beta$, woraus rückwärts folgt

$$\delta = \frac{\alpha\beta - b\alpha}{ab' - ba'} \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{b'\alpha - a'\beta}{ab' - ba'},$$

so sieht man, dafs alle vier Zahlen α, β, γ, δ als ganze Zahlen betrachtet werden können, wenn

$$1. \quad ab' - ba' = \pm 1$$

ist. Dann aber ist

$$2. \quad \begin{cases} \delta = \pm(a\beta - b\alpha), & \gamma = \pm(b'\alpha - a'\beta), \text{ und rückwärts} \\ \alpha = a\gamma + a'\delta, & \beta = b\gamma + b'\delta. \end{cases}$$

Die Gleichung (1.) läfst sich aber immer befriedigen, wenn a und b, wie wir jetzt voraussetzen, Primzahlen zu einander sind.

Sehen wir nun auch δ als veränderlich an, indem wir ihm der Reihe nach die Werthe $\delta = 0, 1, 2, 3, \ldots (n-1)$ beilegen, so bekommen α und β der Reihe nach dieselben, auf alle mögliche Arten mit einander zu verbindenden Werthe, und es ist also

$$\overset{n-1}{\underset{0}{\mathrm{P}}} \left\{\mathrm{sn}\left(v + \frac{4\delta a'}{n} L\right)\right\} = \sqrt{\left(\frac{k^{nn}}{\lambda^n}\right)} \cdot \overset{n-1}{\underset{0}{\mathrm{P}}} \left\{\mathrm{sn}\left(u + \frac{4\alpha K + 4\beta i K'}{n}\right)\right\}.$$

Statt in dem Ausdrucke auf der rechten Seite die eben genannten Werthe von α und β zu verbinden, kann man auch die Werthe $\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ $\ldots \pm \frac{1}{2}(n-1)$ mit $\beta = 0; \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \pm \frac{1}{2}(n-1)$ verbinden. Berücksichtigt man aufserdem die Formel (1.) §. 160., so hat man endlich

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} \cdot \mathrm{sn}(nu) = \sqrt{\left(\frac{\lambda^n}{k}\right)} \cdot \mathrm{sn}\, v\, \mathrm{sn}\left(v + \frac{4a'L}{n}\right) \mathrm{sn}\left(v + \frac{8a'L}{n}\right) \ldots$$
$$\ldots \mathrm{sn}\left(v + \frac{4(n-1)a'}{n} L\right).$$

Setzt man nun

$$\varpi = \frac{2a'L}{n}$$

und vergleicht die gefundene Formel mit der Formel für $\mathrm{sn}\, v$ §. 290., so sehen wir einen hohen Grad der Uebereinstimmung, welcher es möglich macht, aus den Formeln §. 290. überhaupt auf die umgekehrten Formeln zu schliefsen. Man mufs in den dortigen Formeln λ statt k, λ' statt k', k statt λ, k' statt λ', a' statt a, a statt b, also ϖ statt ω, v statt u und nu statt v setzen; dann verwandeln sie sich dadurch in die umgekehrten Formeln, wenn man aufserdem $(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}\mathrm{sn}(nu)$ statt $\mathrm{sn}\, v$, $\mathrm{cn}(nu)$ statt $\mathrm{cn}\, v$, $\mathrm{dn}(nu)$ statt $\mathrm{dn}\, v$ und $(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}\mathrm{tn}(nu)$ statt $\mathrm{tn}\, v$ setzt. Zu demselben Resultate führt auch die Betrachtung der übrigen Modularfunctionen; nur tritt in Beziehung auf

den Multiplicator μ' bei dieser neuen Substitution ein bemerkenswerther Umstand ein, nämlich, dafs, wenn man v als das gegebene und nu als das daraus hergeleitete Argument ansieht, und also $nu = \mu'.v$ setzt, nicht μ', sondern $(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}.\mu'$ aus dem Multiplicator μ durch die angegebene Uebertragung wird. Aus diesem Grunde verwandelt sich $\operatorname{sn} v$ in $(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}.\operatorname{sn}(nu)$, $\operatorname{tn} v$ in $(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}.\operatorname{tn}(nu)$, aber $\operatorname{cn} v$ in $\operatorname{cn}(nu)$ und $\operatorname{dn} v$ in $\operatorname{dn}(nu)$. Werden die Gleichungen

$$nu = \mu'.v \quad \text{und} \quad v = \mu.u$$

mit einander verbunden, so erhält man

$$\mu.\mu' = n;$$

wie schon in §. 293. auf einem andern Wege gefunden worden ist. Hiernach können nun nicht blofs aus den Formeln §. 290., sondern auch aus denen §. 291. und 292. ebensoviele neue Formeln auf die einfachste Weise hergeleitet werden, und es müssen diese neuen Formeln als die Umkehrungen der früheren angesehen werden.

Ein bemerkenswerther besonderer Fall ist der, wenn man in dem Ausdrucke

$$\omega = \frac{2aK + 2biK'}{n}$$

$a = 0$ und $b = 1$ setzt; dann reducirt sich die Gleichung (1.) auf $-ba' = -1$ oder $a' = 1$. Die beiden Substitutionen $n$ten Grades heifsen *einfache* Substitutionen dieses Grades, und es wird der Mühe werth sein, die sich darauf beziehenden Formeln in einiger Vollständigkeit aufzustellen.

§. 295.

Die erste einfache Substitution $n$tes Grades für ein ungerades n.

Es seien K, K', L, L' wieder die zu den Moduln k, k', λ, λ' gehörigen Modularquadranten. Ferner sei zur Abkürzung

$$1. \quad \alpha = \frac{K'}{n};$$

alsdann ist in den Formeln §. 290 — 293. $\omega = 2\alpha i$ zu setzen. Hiernach erhalten wir in imaginären Formen:

$$\mu = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} \left(\frac{\operatorname{sn} 2\alpha i . \operatorname{sn} 4\alpha i . \operatorname{sn} 6\alpha i \dots . \operatorname{sn}(n-1)\alpha i}{\operatorname{snc} 2\alpha i . \operatorname{snc} 4\alpha i . \operatorname{snc} 6\alpha i \dots . \operatorname{snc}(n-1)\alpha i}\right)^2,$$

$$\lambda = k^n (\operatorname{snc} 2\alpha i . \operatorname{snc} 4\alpha i . \operatorname{snc} 6\alpha i \dots . \operatorname{snc}(n-1)\alpha i)^4,$$

$$\lambda' = \frac{k'^n}{(\operatorname{dn} 2\alpha i . \operatorname{dn} 4\alpha i . \operatorname{dn} 6\alpha i \dots . \operatorname{dn}(n-1)\alpha i)^4},$$

$$\mu = 1 + \frac{2}{\operatorname{snc}4ai} + \frac{2}{\operatorname{snc}8ai} + \frac{2}{\operatorname{snc}12ai} \dots + \frac{2}{\operatorname{snc}2(n-1)ai},$$

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}\mu = 1 + 2\operatorname{dn}4ai + 2\operatorname{dn}8ai + 2\operatorname{dn}12ai \dots + 2\operatorname{dn}2(n-1)ai,$$

$$\frac{\lambda\mu}{k} = 1\operatorname{snc}4ai + 2\operatorname{snc}8ai + 2\operatorname{snc}12ai \dots + 2\operatorname{snc}2(n-1)ai,$$

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}.\frac{\lambda\mu}{k} = 1 + 2\operatorname{cn}4ai + 2\operatorname{cn}8ai + 2\operatorname{cn}12ai \dots + 2\operatorname{cn}2(n-1)ai,$$

$$\frac{\lambda'\mu}{k'} = 1 + \frac{2}{\operatorname{cn}4ai} + \frac{2}{\operatorname{cn}8ai} + \frac{2}{\operatorname{cn}12ai} \dots + \frac{2}{\operatorname{cn}2(n-1)ai},$$

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}.\frac{\lambda'\mu}{k'} = 1 + \frac{2}{\operatorname{dn}4ai} + \frac{2}{\operatorname{dn}8ai} + \frac{2}{\operatorname{dn}12ai} \dots + \frac{2}{\operatorname{dn}2(n-1)ai}.$$

Läſst man die imaginäre Form fallen, so erhält man in reeller Form die Formeln

$$\textbf{2.}\quad \mu = \left(\frac{\operatorname{sn}'2a.\ \operatorname{sn}'4a.\ \operatorname{sn}'6a \dots \operatorname{sn}'(n-1)a}{\operatorname{snc}'2a.\operatorname{snc}'4a.\operatorname{snc}'6a \dots \operatorname{snc}'(n-1)a}\right)^2 = \left(\frac{\operatorname{sn}'2a\operatorname{sn}'4a\operatorname{sn}'6a \dots \operatorname{sn}'(n-1)a}{\operatorname{sn}'a\operatorname{sn}'3a\operatorname{sn}'5a \dots \operatorname{sn}'(n-1)a}\right)^2,$$

$$\textbf{3.}\quad \lambda = \frac{k^n}{(\operatorname{dn}'2a.\operatorname{dn}'4a.\operatorname{dn}'6a \dots \operatorname{dn}'(n-1)a))^4},$$

$$\textbf{4.}\quad \lambda'^n = k'(\operatorname{snc}'2a\operatorname{snc}'4a\operatorname{snc}'6a \dots \operatorname{snc}'(n-1)a)^4$$
$$= k'^n(\operatorname{sn}'a\operatorname{sn}'3a\operatorname{sn}'5a \dots \operatorname{sn}'(n-2)a)^4;$$

$$\mu = 1 + 2\operatorname{dn}'4a + 2\operatorname{dn}'8a + 2\operatorname{dn}'12a \dots + 2\operatorname{dn}'2(n-1)a,$$

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}.\mu = 1 + \frac{2}{\operatorname{snc}'4a} + \frac{2}{\operatorname{snc}'8a} + \frac{2}{\operatorname{snc}'12a} \dots + \frac{2}{\operatorname{snc}'2(n-1)a},$$

$$\frac{\lambda\mu}{k} = 1 + \frac{2}{\operatorname{dn}'4a} + \frac{2}{\operatorname{dn}'8a} + \frac{2}{\operatorname{dn}'12a} \dots + \frac{2}{\operatorname{dn}'2(n-1)a},$$

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}.\frac{\lambda\mu}{k} = 1 + \frac{2}{\operatorname{cn}'4a} + \frac{2}{\operatorname{cn}'8a} + \frac{2}{\operatorname{cn}'12a} \dots + \frac{2}{\operatorname{cn}'2(n-1)a},$$

$$\frac{\lambda'\mu}{k'} = 1 + 2\operatorname{cn}'4a + 2\operatorname{cn}'8a + 2\operatorname{cn}'12a \dots + 2\operatorname{cn}'2(n-1)a,$$

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}.\frac{\lambda'\mu}{k'} = 1 + 2\operatorname{snc}'4a + 2\operatorname{snc}'8a + 2\operatorname{snc}'12a \dots + 2\operatorname{snc}'2(n-1)a.$$

Der Formel (2.) gemäſs ist $\mu > 1$, und der Formel (4.) gemäſs $\lambda' < k'^n$; um so mehr ist $\lambda' < k'$ und also $\lambda > k$.

Die sechs letzten Formeln lassen sich noch einfacher darstellen. Es ist $\operatorname{sn}'(2K'-u) = \operatorname{sn}'u$, $\operatorname{cn}'(2K'-u) = -\operatorname{cn}'u$, und $\operatorname{dn}'(2K'-u) = \operatorname{dn}'u$. Da nun $2na = 2K'$ ist, so haben wir

$$\operatorname{sn}'(2(n-\alpha)a) = +\operatorname{sn}'2\alpha a \quad\text{und}\quad \operatorname{snc}'(2(n-\alpha)a) = -\operatorname{snc}'2\alpha a = -\operatorname{sn}'(n-2\alpha)a,$$
$$\operatorname{cn}'(2(n-\alpha)a) = -\operatorname{cn}'2\alpha a \quad - \quad \operatorname{cnc}'(2(n-\alpha)a) = +\operatorname{cnc}'2\alpha a = +\operatorname{cn}'(n-2\alpha)a,$$
$$\operatorname{dn}'(2(n-\alpha)a) = +\operatorname{dn}'2\alpha a \quad - \quad \operatorname{dnc}'(2(n-\alpha)a) = +\operatorname{dnc}'2\alpha a = +\operatorname{dn}'(n-2\alpha)a.$$

Benutzen wir diese Formeln und setzen auſserdem zur Abkürzung

$$\nu = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)},$$

so verwandeln sich die erwähnten sechs Formeln in

$$5. \quad \mu = 1 + 2\,\mathrm{dn}'2a + 2\,\mathrm{dn}'4a + 2\,\mathrm{dn}'6a + \ldots + 2\,\mathrm{dn}'(n-1)a,$$

$$6. \quad \mu = \frac{2}{\mathrm{sn}'a} - \frac{2}{\mathrm{sn}'3a} + \frac{2}{\mathrm{sn}'5a} - \frac{2}{\mathrm{sn}'7a} \ldots + \frac{-2\nu}{\mathrm{sn}'(n-2)a} + \nu,$$

$$7. \quad \frac{\lambda\mu}{k} = 1 + \frac{2}{\mathrm{dn}'2a} + \frac{2}{\mathrm{dn}'4a} + \frac{2}{\mathrm{dn}'6a} \ldots + \frac{2}{\mathrm{dn}'(n-1)a},$$

$$8. \quad \frac{\lambda\mu}{k} = \frac{2}{\mathrm{snc}'a} - \frac{2}{\mathrm{snc}'3a} + \frac{2}{\mathrm{cnc}'5a} \ldots + \frac{-2\nu}{\mathrm{cnc}'(n-2)a} + \nu,$$

$$9. \quad \frac{\lambda'\mu}{k'} = 1 - 2\,\mathrm{cn}'2a + 2\,\mathrm{cn}'4a - 2\,\mathrm{cn}'6a \ldots + 2\nu\,\mathrm{cn}'(n-1)a,$$

$$10. \quad \frac{\lambda'\mu}{k} = 2\,\mathrm{sn}'a - 2\,\mathrm{sn}'3a + 2\,\mathrm{sn}'5a \ldots - 2\nu\,\mathrm{sn}'(n-2)a + \nu.$$

Die Ausdrücke der Modularquadranten sind, wie vorher,

$$L = \mu . K, \quad L' = \frac{\mu}{n} K', \text{ also}$$

$$11. \quad \frac{L}{L'} = n . \frac{K}{K'}.$$

Nehmen wir ferner ein Argument $v = \mu . u$ und beziehen alle Modularfunctionen dieses Arguments auf den Modul λ, alle übrigen Modularfunctionen hingegen auf den kleineren Modul k, und also auf den Modul k', wenn der conjugirte zu nehmen ist, so haben wir in imaginären Formen:

$$12. \begin{cases} \mathrm{sn}\, v = \sqrt{\left(\frac{k^n}{\lambda}\right)} . \mathrm{sn}\, u \left(\frac{\mathrm{sn}(u+2ai).\mathrm{sn}(u+4ai) \ldots \mathrm{sn}(u+(n-1)ai)}{\mathrm{sn}(u-2ai).\mathrm{sn}(u-4ai) \ldots \mathrm{sn}(u-(n-1)ai)}\right), \\ \mathrm{cn}\, v = \sqrt{\left(\frac{\lambda' k^n}{\lambda k'^n}\right)} . \mathrm{cn}\, u . \left(\frac{\mathrm{cn}(u+2ai).\mathrm{cn}(u+4ai) \ldots \mathrm{cn}(u+(n-1)ai)}{\mathrm{cn}(u-2ai).\mathrm{cn}(u-4ai) \ldots \mathrm{cn}(u-(n-1)ai)}\right), \\ \mathrm{dn}\, v = \sqrt{\left(\frac{\lambda'}{k'^n}\right)} . \mathrm{dn}\, u . \left(\frac{\mathrm{dn}(u+2ai).\mathrm{dn}(u+4ai) \ldots \mathrm{dn}(u+(n-1)ai)}{\mathrm{dn}(u-2ai).\mathrm{dn}(u-4ai) \ldots \mathrm{dn}(u-(n-1)ai)}\right), \\ \mathrm{tn}\, v = \sqrt{\left(\frac{k'^n}{\lambda'}\right)} . \mathrm{tn}\, u . \left(\frac{\mathrm{tn}(u+2ai).\mathrm{tn}(u+4ai) \ldots \mathrm{tn}(u+(n-1)ai)}{\mathrm{tn}(u-2ai).\mathrm{tn}(u-4ai) \ldots \mathrm{tn}(u-(n-1)ai)}\right). \end{cases}$$

Da

$$\mathrm{sn}(a+bi)\,\mathrm{sn}(a-bi) = \frac{\mathrm{sn}^2 a + \mathrm{tn}'^2 b}{1 + k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{tn}'^2 b},$$

$$\mathrm{cn}(a+bi)\,\mathrm{cn}(a-bi) = \frac{\mathrm{cn}^2 a + \frac{k'^2}{k^2}\,\mathrm{cnc}'^2 b}{1 - \mathrm{cn}^2 a\,\mathrm{cnc}'^2 b},$$

$$\mathrm{dn}(a+bi)\,\mathrm{dn}(a-bi) = \frac{\mathrm{dn}^2 a - k'^2\,\mathrm{sn}'^2 b}{1 - \mathrm{dn}^2 a\,\mathrm{sn}'^2 b} \text{ und}$$

$$\mathrm{tn}(a+bi)\,\mathrm{tn}(a-bi) = \frac{\mathrm{tn}^2 a + \mathrm{sn}'^2 b}{1 + k'^2\,\mathrm{tn}^2 a\,\mathrm{sn}'^2 b}$$

ist, so haben wir in reeller Form

$$13.\begin{cases} \operatorname{sn} v = \sqrt{\left(\frac{k^n}{\lambda}\right)} \operatorname{sn} u \cdot \frac{(\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{tn}'^2 2a)(\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{tn}'^2 4a) \ldots (\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{tn}'^2 (n-1)a)}{(1+k^2 \operatorname{tn}'^2 2a \operatorname{sn}^2 u)(1+k^2 \operatorname{tn}'^2 4a \operatorname{sn}^2 u) \ldots (1+k^2 \operatorname{tn}'^2 (n-1) a \operatorname{sn}^2 u)}, \\ \operatorname{cn} v = \sqrt{\left(\frac{\lambda' k^n}{\lambda k'^n}\right)} \operatorname{cn} u \cdot \frac{\left(\operatorname{cn}^2 u + \frac{k'^2}{k^2} \operatorname{cn}'^2 a\right)\left(\operatorname{cn}^2 u + \frac{k'^2}{k^2} \operatorname{cn}'^3 3a\right) \ldots \left(\operatorname{cn}^2 u + \frac{k'^2}{k^2} \operatorname{cn}'^2 (n-2) a\right)}{(1-\operatorname{cn}'^2 a \operatorname{cn}^2 u)(1-\operatorname{cn}'^2 3a \cdot \operatorname{cn}^2 u) \ldots (1-\operatorname{cn}'^2 (n-2) a \operatorname{cn} u)}, \\ \operatorname{dn} v = \sqrt{\left(\frac{\lambda'}{k'^n}\right)} \operatorname{dn} u \cdot \frac{(\operatorname{dn}^2 u - k'^2 \operatorname{sn}'^2 2a)(\operatorname{dn}^2 u - k'^2 \operatorname{sn}'^2 4a) \ldots (\operatorname{dn}^2 u - k'^2 \operatorname{sn}'^2 (n-1)a)}{(1-\operatorname{sn}'^2 2a \operatorname{dn}^2 u)(1-\operatorname{sn}'^2 4a \operatorname{dn}^2 u) \ldots (1-\operatorname{sn}'^2 (n-1) a \operatorname{dn}^2 u)}, \\ \operatorname{tn} v = \sqrt{\left(\frac{k'^n}{\lambda}\right)} \operatorname{tn} u, \frac{(\operatorname{tn}^2 u + \operatorname{sn}'^2 2a)(\operatorname{tn}^2 u + \operatorname{sn}'^2 4a) \ldots (\operatorname{tn}^2 u + \operatorname{sn}'^2 (n-1)a)}{(1+k'^2 \operatorname{sn}'^2 2a \operatorname{tn}^2 u)(1+k'^2 \operatorname{sn}'^2 4a \operatorname{tn}^2 u) \ldots (1+k'^2 \operatorname{sn}'^2 (n-1) a \operatorname{tn}^2 u)}. \end{cases}$$

Weiter haben wir in imaginärer Form die Formel

$$1 - \operatorname{sn} v = \sqrt{\left(\frac{\lambda' k^n}{\lambda k'^n}\right)}(1-\operatorname{sn} u) \cdot \left(\frac{(1-\operatorname{sn}(u+4ai))(1-\operatorname{sn}(u+8ai)) \ldots (1-\operatorname{sn}(u+2(n-1)ai))}{(1-\operatorname{sn}(u-4ai))(1-\operatorname{sn}(u-8ai)) \ldots (1-\operatorname{sn}(u-2(n-1)ai))}\right).$$

Da aber $\operatorname{sn}(u \pm 2iK') = \operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn}(u \pm 2iK') = -\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn}(u \pm 2iK') = -\operatorname{dn} u$, $\operatorname{tn}(u \pm 2iK') = -\operatorname{tn} u$, also auch

$$\operatorname{sn}(u+2(n-\alpha)ai) = \operatorname{sn}(u-2\alpha ai), \quad \operatorname{cn}(u+2(n-\alpha)ai) = -\operatorname{cn}(u-2\alpha ai),$$
$$\operatorname{dn}(u+2(n-\alpha)ai) = -\operatorname{dn}(u-2\alpha ai),$$
$$\operatorname{sn}(u-2(n-\alpha)ai) = \operatorname{sn}(u+2\alpha ai), \quad \operatorname{cn}(u-2(n-\alpha)ai) = -\operatorname{cn}(u+2\alpha ai),$$
$$\operatorname{dn}(u-2(n-\alpha)ai) = -\operatorname{dn}(u+2\alpha ai),$$

und endlich

$$\operatorname{tn}(u+2(n-\alpha)ai) = -\operatorname{tn}(u-2\alpha ai) \quad \text{und} \quad \operatorname{tn}(u-2(n-\alpha)ai) = -\operatorname{tn}(u+2\alpha ai)$$

ist, so läſst sich die vorige Formel also darstellen:

$$14. \quad 1 - \operatorname{sn} v =$$
$$\sqrt{\left(\frac{\lambda' k^n}{\lambda k'^n}\right)}(1-\operatorname{sn} u) \cdot \left(\frac{(1-\operatorname{sn}(u+2ai))(1-\operatorname{sn}(u+4ai)) \ldots (1-\operatorname{sn}(u+(n-1)ai))}{(1-\operatorname{sn}(u-2ai))(1-\operatorname{sn}(u-4ai)) \ldots (1-\operatorname{sn}(u-(n-1)ai))}\right).$$

Ebenso ist

$$15. \quad 1 + \operatorname{sn} v =$$
$$\sqrt{\left(\frac{\lambda' k^n}{\lambda k'^n}\right)}(1+\operatorname{sn} u) \cdot \left(\frac{(1+\operatorname{sn}(u+2ai))(1+\operatorname{sn}(u+4ai)) \ldots (1+\operatorname{sn}(u+(n-1)ai))}{(1+\operatorname{sn}(u-2ai))(1+\operatorname{sn}(u-4ai)) \ldots (1+\operatorname{sn}(u-(n-1)ai))}\right),$$

$$16. \quad 1 - \lambda \operatorname{sn} v =$$
$$\sqrt{\left(\frac{\lambda'}{k'^n}\right)}(1-k \operatorname{sn} u) \cdot \left(\frac{(1-k\operatorname{sn}(u+2ai))(1-k\operatorname{sn}(u+4ai)) \ldots (1-k\operatorname{sn}(u+(n-1)ai))}{(1-k\operatorname{sn}(u-2ai))(1-k\operatorname{sn}(u-4ai)) \ldots (1-k\operatorname{sn}(u-(n-1)ai))}\right),$$

$$17. \quad 1 + \lambda \operatorname{sn} v =$$
$$\sqrt{\left(\frac{\lambda'}{k'}\right)}(1+k \operatorname{sn} u) \cdot \left(\frac{(1+k\operatorname{sn}(u+2ai))(1+k\operatorname{sn}(u+4ai)) \ldots (1+k\operatorname{sn}(u+(n-1)ai))}{(1+k\operatorname{sn}(u-2ai))(1+k\operatorname{sn}(u-4ai)) \ldots (1+k\operatorname{sn}(u-(n-1)ai))}\right),$$

18. $1-\operatorname{cn} v =$

$$\sqrt{\left(\frac{k^n}{\lambda}\right)}(1-\operatorname{cn} u).\left(\frac{(1+\operatorname{cn}(u+2ai))(1-\operatorname{cn}(u+4ai))\dots(1-\nu\operatorname{cn}(u+(n-1)ai))}{(1+\operatorname{cn}(u-2ai))(1-\operatorname{cn}(u-4ai))\dots(1-\nu\operatorname{cn}(u-(n-1)ai))}\right),$$

19. $1+\operatorname{cn} v =$

$$\sqrt{\left(\frac{k^n}{\lambda}\right)}(1+\operatorname{cn} u).\left(\frac{(1-\operatorname{cn}(u+2ai))(1+\operatorname{cn}(u+4ai))\dots(1+\nu\operatorname{cn}(u+(n-1)ai))}{(1-\operatorname{cn}(u-2ai))(1+\operatorname{cn}(u-4ai))\dots(1+\nu\operatorname{cn}(u-(n-1)ai))}\right),$$

20. $1-\operatorname{dn} v =$

$$\sqrt{\left(\frac{\lambda}{k^n}\right)}(1-\operatorname{dn} u).\left(\frac{(1+\operatorname{dn}(u+2ai))(1-\operatorname{dn}(u+4ai))\dots(1-\nu\operatorname{dn}(u+(n-1)ai))}{(1+\operatorname{dn}(u-2ai))(1-\operatorname{dn}(u-4ai))\dots(1-\nu\operatorname{dn}(u-(n-1)ai))}\right),$$

21. $1+\operatorname{dn} v =$

$$\sqrt{\left(\frac{\lambda}{k^n}\right)}(1+\operatorname{dn} u).\left(\frac{(1-\operatorname{dn}(u+2ai))(1+\operatorname{dn}(u+4ai))\dots(1+\nu\operatorname{dn}(u+(n-1)ai))}{(1-\operatorname{dn}(u-2ai))(1+\operatorname{dn}(u-4ai))\dots(1+\nu\operatorname{dn}(u-(n-1)ai))}\right),$$

22. $$\frac{\lambda\mu}{k}\operatorname{sn} v = \operatorname{sn} u + \operatorname{sn}(u+2ai) + \operatorname{sn}(u+4ai)\dots + \operatorname{sn}(u+(n-1)ai) + \operatorname{sn}(u-2ai) + \operatorname{sn}(u-4ai)\dots + \operatorname{sn}(u-(n-1)ai),$$

23. $$\frac{\mu}{\operatorname{sn} v} = \frac{1}{\operatorname{sn} u} + \frac{1}{\operatorname{sn}(u+2ai)} + \frac{1}{\operatorname{sn}(u+4ai)}\dots + \frac{1}{\operatorname{sn}(u+(n-1)ai)} + \frac{1}{\operatorname{sn}(u-2ai)} + \frac{1}{\operatorname{sn}(u-4ai)}\dots + \frac{1}{\operatorname{sn}(u-(n-1)ai)},$$

24. $$\frac{\lambda'\mu}{k'}\cdot\frac{1}{\operatorname{cn} v} = \frac{1}{\operatorname{cn} u} - \frac{1}{\operatorname{cn}(u+2ai)} + \frac{1}{\operatorname{cn}(u+4ai)} - + \dots + \frac{\nu}{\operatorname{cn}(u+(n-1)ai)} - \frac{1}{\operatorname{cn}(u+2ai)} + \frac{1}{\operatorname{cn}(u-4ai)} - + \dots + \frac{\nu}{\operatorname{cn}(u-(n-1)ai)},$$

25. $$\nu.\frac{\lambda\mu}{k}\operatorname{cn} v = \operatorname{cn} u - \operatorname{cn}(u+2ai) + \operatorname{cn}(u+4ai) - + \dots + \nu\operatorname{cn}(u+(n-1)ai) - \operatorname{cn}(u-2ai) + \operatorname{cn}(u-4ai) - + \dots + \nu\operatorname{cn}(u-(n-1)ai),$$

26. $$\nu.\mu\operatorname{dn} v = \operatorname{dn} u - \operatorname{dn}(u+2ai) + \operatorname{dn}(u+4ai) - + \dots + \nu.\operatorname{dn}(u+(n-1)ai) - \operatorname{dn}(u-2ai) + \operatorname{dn}(u+4ai) - + \dots + \nu.\operatorname{dn}(u-(n-1)ai),$$

27. $$\frac{\lambda'\mu}{k'}\operatorname{tn} v = \operatorname{tn} u - \operatorname{tn}(u+2ai) + \operatorname{tn}(u+4ai) - + \dots + \nu\operatorname{tn}(u+(n-1)ai) - \operatorname{tn}(u-2ai) + \operatorname{tn}(u-4ai) - + \dots + \nu\operatorname{tn}(u-(n-1)ai),$$

28. $$\left(\frac{\lambda\mu}{k}\right)^2\operatorname{sn}^2 v = \begin{matrix}\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{sn}^2(u+2ai) + \operatorname{sn}^2(u+4ai)\dots + \operatorname{sn}^2(u+(n-1)ai)\\ + \operatorname{sn}^2(u-2ai) + \operatorname{sn}^2(u-4ai)\dots + \operatorname{sn}^2(u-(n-1)ai)\end{matrix} + 2t'$$

für $t' = \operatorname{tn}'^2 2a + \operatorname{tn}'^2 4a + \operatorname{tn}'^2 6a \dots + \operatorname{tn}'^2 (n-1)a.$

Dividirt man (15.) durch (14.) und nimmt auf beiden Seiten die natürlichen Logarithmen, so hat man

$$29.\quad \mathfrak{L}\operatorname{am} v =$$
$$\mathfrak{L}\operatorname{am} u + \mathfrak{L}\operatorname{am}(u+2ai) + \mathfrak{L}\operatorname{am}(u+4ai) + \ldots + \mathfrak{L}\operatorname{am}(u+(n-1)ai)$$
$$+ \mathfrak{L}\operatorname{am}(u-2ai) + \mathfrak{L}\operatorname{am}(u-4ai) + \ldots + \mathfrak{L}\operatorname{am}(u-(n-1)ai),$$

oder auch

$$\mathfrak{L}\operatorname{am} v = \mathfrak{L}\operatorname{am} u + 2\mathfrak{L}\arcsin(\operatorname{dn}' 2a\operatorname{sn} u) + 2\mathfrak{L}\arcsin(\operatorname{dn}' 4a\operatorname{sn} u)\ldots$$
$$\ldots + 2\mathfrak{L}\arcsin(\operatorname{dn}'(n-1)a.\operatorname{sn} u).$$

Multiplicirt man die Gleichung (24.) mit $\frac{\partial v}{\mu} = \partial u$ und integrirt dieselbe, so erhält man

$$30.\quad \nu.\operatorname{am} v =$$
$$\operatorname{am} u - \operatorname{am}(u+2ai) + \operatorname{am}(u+4ai) - \operatorname{am}(u+6ai)\ldots + \nu\operatorname{am}(u+(n-1)ai)$$
$$- \operatorname{am}(u-2ai) + \operatorname{am}(u-4ai) - \operatorname{am}(u-6ai)\ldots + \nu\operatorname{am}(u-(n-1)ai)$$

oder

$$\nu.\operatorname{am} v = \operatorname{am} u - 2\operatorname{arc\,tng}\left(\frac{\operatorname{tn} u}{\operatorname{snc}' 2a}\right) + 2\operatorname{arc\,tng}\left(\frac{\operatorname{tn} u}{\operatorname{snc}' 4a}\right) - 2\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{tn} u}{\operatorname{snc}' 6a}\right)\ldots$$
$$\ldots + 2\nu\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{tn} u}{\operatorname{snc}'(n-1)a}\right)$$

oder auch

$$\operatorname{am} v = 2\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{tn} u}{\operatorname{sn}' a}\right) - 2\operatorname{arc\,tng}\left(\frac{\operatorname{tn} u}{\operatorname{sn}' 3a}\right) + 2\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{tn} u}{\operatorname{sn}' 5a}\right) - + \ldots$$
$$\ldots - 2\nu\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{tn} u}{\operatorname{sn}'(n-2)a}\right) + \nu\operatorname{am} u.$$

Es bedarf der Erinnerung nicht, dafs auch die Formeln (14. bis 28.) leicht in reellen Formen dargestellt werden können.

§. 296.

Die zweite einfache und umgekehrte Substitution $n$ten Grades für ein ungerades n.

So wie durch die Formeln §. 295. die Modularfunctionen des Argumentes v mit dem Modul λ auf Modularfunctionen des Argumentes u mit dem kleineren Modul k zurückgeführt werden, so lassen sich umgekehrt, ohne das Verhältnifs $v = \mu.u$ zu ändern, die auf den Modul k bezogenen Modularfunctionen des Arguments nu durch Modularfunctionen von v mit dem Modul λ ausdrücken.

Setzen wir zur Abkürzung

$$1.\quad b = \frac{L}{n},$$

so haben wir, wenn wir auch alle Modularfunctionen der Vielfachen von b auf den Modul λ beziehen, nach §. 294. auf der Stelle die Formeln

$$2. \quad \mu' = \frac{n}{\mu} = \left(\frac{\operatorname{sn}2b\operatorname{sn}4b\operatorname{sn}6b\ldots\operatorname{sn}(n-1)b}{\operatorname{sn}b\operatorname{sn}3b\operatorname{sn}5b\ldots\operatorname{sn}(n-2)b}\right)^2,$$

$$3. \quad k = \lambda^n(\operatorname{sn}b\operatorname{sn}3b\operatorname{sn}5b\ldots\operatorname{sn}(n-2)b)^4,$$

$$4. \quad k' = \frac{\lambda'^n}{(\operatorname{dn}2b\operatorname{dn}4b\operatorname{dn}6b\ldots\operatorname{dn}(n-1)b)^4}.$$

Werden diese Formeln mit den Formeln (1. bis 4.) §. 295. verglichen, so sieht man, dafs noch eine andere Uebertragung möglich ist, wobei man λ mit k', λ' mit k, also a mit b und μ mit μ' vertauscht. Hiernach verwandeln sich die Formeln (5. bis 11.) §. 295., wenn wieder $\nu = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}$ gesetzt wird, in

$$5. \quad \mu' = 1 + 2\operatorname{dn}2b + 2\operatorname{dn}4b + 2\operatorname{dn}6b \ldots + 2\operatorname{dn}(n-1)b,$$

$$6. \quad \mu' = \frac{2}{\operatorname{sn}b} - \frac{2}{\operatorname{sn}3b} + \frac{2}{\operatorname{sn}5b} - + \ldots - \frac{2\nu}{\operatorname{sn}(n-2)b} + \nu,$$

$$7. \quad \frac{k'\mu'}{\lambda'} = 1 + \frac{2}{\operatorname{dn}2b} + \frac{2}{\operatorname{dn}4b} + \frac{2}{\operatorname{dn}6b} + \ldots + \frac{2}{\operatorname{dn}(n-1)b},$$

$$8. \quad \frac{k'\mu}{\lambda'} = \frac{2}{\operatorname{cnc}b} - \frac{2}{\operatorname{cnc}3b} + \frac{2}{\operatorname{cnc}5b} - + \ldots - \frac{2\nu}{\operatorname{cnc}(n-2)b} + \nu,$$

$$9. \quad \frac{k\mu'}{\lambda} = 1 - 2\operatorname{cn}2b + 2\operatorname{cn}4b - 2\operatorname{cn}6b + - \ldots + 2\nu\operatorname{cn}(n-1)b,$$

$$10. \quad \frac{k\mu'}{\lambda} = 2\operatorname{sn}b - 2\operatorname{sn}3b + 2\operatorname{sn}5b - + \ldots - 2\nu\operatorname{sn}(n-2)b + \nu,$$

$$11. \quad K' = \mu'.L', \qquad K = \frac{\mu'}{n}.L, \qquad \frac{K'}{K} = n.\frac{L'}{L}.$$

Aufserdem haben wir

$$12. \quad \operatorname{sn}(nu) = \sqrt{\left(\frac{\lambda^n}{k}\right)}.\operatorname{sn}v.\left(\frac{\operatorname{sn}(2b+v).(\operatorname{sn}(4b+v)\ldots\operatorname{sn}((n-1)b+v)}{\operatorname{sn}(2b-v).(\operatorname{sn}(4b-v)\ldots\operatorname{sn}((n-1)b-v)}\right),$$

$$13. \quad \operatorname{cn}(nu) = \sqrt{\left(\frac{k'\lambda^n}{k\lambda'^n}\right)}.\operatorname{cn}v.\left(\frac{\operatorname{cn}(2b+v).\operatorname{cn}(4b+v)\ldots\operatorname{cn}((n-1)b+v)}{\operatorname{cn}(2b-v).\operatorname{cn}(4b-v)\ldots\operatorname{cn}((n-1)b-v)}\right),$$

$$14. \quad \operatorname{dn}(nu) = \sqrt{\left(\frac{k}{\lambda'^n}\right)}.\operatorname{dn}v.\left(\frac{\operatorname{dn}(2b+v).\operatorname{dn}(4b+v)\ldots\operatorname{dn}((n-1)b+v)}{\operatorname{dn}(2b-v).\operatorname{dn}(4b-v)\ldots\operatorname{dn}((n-1)b-v)}\right),$$

$$15. \quad \operatorname{tn}(nu) = \sqrt{\left(\frac{\lambda'^n}{k'}\right)}.\operatorname{tn}v.\left(\frac{\operatorname{tn}(2b+v).\operatorname{tn}(4b+v)\ldots\operatorname{tn}((n-1)b+v)}{\operatorname{tn}(2b-v).\operatorname{tn}(4b-v)\ldots\operatorname{tn}((n-1)b+v)}\right).$$

Statt der Formeln (14. bis 19.) §. 295. haben wir nun

$$16. \quad 1-\nu.\operatorname{sn}(nu) =$$

$$\sqrt{\left(\frac{k'\lambda^n}{k\lambda'^n}\right)}.(1-\operatorname{sn}v).\left(\frac{(1+\operatorname{sn}(v+2b))(1-\operatorname{sn}(v+4b))\ldots(1-\nu\operatorname{sn}(v+(n-1)b))}{(1+\operatorname{sn}(v-2b))(1-\operatorname{sn}(v-4b))\ldots(1-\nu\operatorname{sn}(v-(n-1)b))}\right),$$

$$17. \quad 1+\nu.\operatorname{sn}(nu) =$$

$$\sqrt{\left(\frac{k'\lambda^n}{k\lambda'^n}\right)}.(1+\operatorname{sn}v).\left(\frac{(1-\operatorname{sn}(v+2b))(1+\operatorname{sn}(v+4b))\ldots(1+\nu\operatorname{sn}(v+(n-1)b))}{(1-\operatorname{sn}(v-2b))(1+\operatorname{sn}(v-4b))\ldots(1+\nu\operatorname{sn}(v-(n-1)b))}\right),$$

18. $1-\text{cn}(nu) =$

$$\sqrt{\left(\frac{\lambda^n}{k}\right)}.(1-\text{cn}\,v).\left(\frac{(1+\text{cn}(v+2b))(1-\text{cn}(v+4b))\ldots.(1-\nu\,\text{cn}(v+(n-1)b))}{(1+\text{cn}(v-2b))(1-\text{cn}(v-4b))\ldots.(1-\nu\,\text{cn}(v-(n-1)b))}\right),$$

19. $1+\text{cn}(nu) =$

$$\sqrt{\left(\frac{\lambda^n}{k}\right)}.(1+\text{cn}\,v).\left(\frac{(1-\text{cn}(v+2b))(1+\text{cn}(v+4b))\ldots.(1+\nu\,\text{cn}(v+(n-1)b))}{(1-\text{cn}(v-2b))(1+\text{cn}(v-4b))\ldots.(1+\nu\,\text{cn}(v-(n-1)b))}\right),$$

20. $1-\text{dn}(nu) =$

$$\sqrt{\left(\frac{k}{\lambda^n}\right)}.(1-\text{dn}\,v).\left(\frac{(1-\text{dn}(v+2b))(1-\text{dn}(v+4b))\ldots.(1-\text{dn}(v+(n-1)b))}{(1-\text{dn}(v-2b))(1-\text{dn}(v-4b))\ldots.(1-\text{dn}(v-(n-1)b))}\right),$$

21. $1+\text{dn}(nu) =$

$$\sqrt{\left(\frac{k}{\lambda^n}\right)}.(1+\text{dn}\,v).\left(\frac{(1+\text{dn}(v+2b))(1+\text{dn}(v+4b))\ldots.(1+\text{dn}(v+(n-1)b))}{(1+\text{dn}(v-2b))(1+\text{dn}(v-4b))\ldots.(1+\text{dn}(v-(n-1)b))}\right),$$

22. $1-\nu k\,\text{sn}(nu) =$

$$\sqrt{\left(\frac{k'}{\lambda'^n}\right)}.(1-\lambda\,\text{sn}\,v).\left(\frac{(1+\lambda\,\text{sn}(v+2b))(1-\lambda\,\text{sn}(v+4b))\ldots.(1-\nu\lambda\,\text{sn}(v+(n-1)b))}{(1+\lambda\,\text{sn}(v-2b))(1-\lambda\,\text{sn}(v-4b))\ldots.(1-\nu\lambda\,\text{sn}(v-(n-1)b))}\right),$$

23. $1+\nu k\,\text{sn}(nu) =$

$$\sqrt{\left(\frac{k'}{\lambda'^n}\right)}.(1+\lambda\,\text{sn}\,v).\left(\frac{(1-\lambda\,\text{sn}(v+2b))(1+\lambda\,\text{sn}(v+4b))\ldots.(1+\nu\lambda\,\text{sn}(v+(n-1)b))}{(1-\lambda\,\text{sn}(v-2b))(1+\lambda\,\text{sn}(v-4b))\ldots.(1+\nu\lambda\,\text{sn}(v-(n-1)b))}\right).$$

Ferner erhalten wir noch

$$24.\quad \frac{k\mu'}{\lambda}.\text{sn}(nu) = \text{sn}\,v-\text{sn}(v+2b)+\text{sn}(v+4b)-+\ldots.+\nu\,\text{sn}(v+(n-1)b)$$
$$-\text{sn}(v-2b)+\text{sn}(v-4b)-+\ldots.+\nu\,\text{sn}(v-(n-1)b),$$

$$25.\quad \frac{\mu'}{\text{sn}(nu)} = \frac{1}{\text{sn}\,v}-\frac{1}{\text{sn}(v+2b)}+\frac{1}{\text{sn}(v+4b)}-+\ldots.+\frac{\nu}{\text{sn}(v+(n-1)b)}$$
$$-\frac{1}{\text{sn}(v-2b)}+\frac{1}{\text{sn}(v-4b)}-+\ldots.+\frac{\nu}{\text{sn}(v-(n-1)b)},$$

$$26.\quad \frac{k'}{\lambda'}\mu'.\frac{\nu}{\text{cn}(nu)} = \frac{1}{\text{cn}\,v}-\frac{1}{\text{cn}(v+2b)}+\frac{1}{\text{cn}(v+4b)}-+\ldots.+\frac{\nu}{\text{cn}(v+(n-1)b)}$$
$$-\frac{1}{\text{cn}(v-2b)}+\frac{1}{\text{cn}(v-4b)}-+\ldots.+\frac{\nu}{\text{cn}(v-(n-1)b)},$$

$$27.\quad \frac{k}{\lambda}\mu'.\text{cn}(nu) = \text{cn}\,v-\text{cn}(v+2b)+\text{cn}(v+4b)-+\ldots.+\nu\,\text{cn}(v+(n-1)b)$$
$$-\text{cn}(v-2b)+\text{cn}(v-4b)-+\ldots.+\nu\,\text{cn}(v-(n-1)b),$$

$$28.\quad \frac{k'}{\lambda'}\mu'.\text{tn}(nu) = \text{tn}\,v+\text{tn}(v+2b)+\text{tn}(v+4b)+\ldots.+\text{tn}(v+(n-1)b)$$
$$+\text{tn}(v-2b)+\text{tn}(v-4b)+\ldots.+\text{tn}(v-(n-1)b),$$

$$29.\quad \mu'.\text{dn}(nu) = \text{dn}\,v+\text{dn}(v+2b)+\text{dn}(v+4b)+\ldots.+\text{dn}(v+(n-1)b)$$
$$+\text{dn}(v-2b)+\text{dn}(v-4b)+\ldots.+\text{dn}(v-(n-1)b),$$

$$30. \quad \left(\frac{k\mu'}{\lambda}\right)^2 \mathrm{sn}^2(nu)$$
$$= \begin{array}{l} \mathrm{sn}^2 v + \mathrm{sn}^2(v+2b) + \mathrm{sn}^2(v+4b) + \ldots + \mathrm{sn}^2(v+(n-1)b) \\ + \mathrm{sn}^2(v-2b) + \mathrm{sn}^2(v-4b) + \ldots + \mathrm{sn}^2(v-(n-1)b) \end{array} - 2s$$
$$\text{für} \quad s = \mathrm{sn}^2 2b + \mathrm{sn}^2 4b + \mathrm{sn}^2 6b + \ldots + \mathrm{sn}^2(n-1)b.$$

Dividirt man die Gleichung (17.) durch (16.), zieht auf beiden Seiten die Quadratwurzel aus, und nimmt die natürlichen Logarithmen auf beiden Seiten, so erhält man

$$31. \quad \nu.\mathfrak{L}\,\mathrm{am}(nu)$$
$$= \mathfrak{L}\,\mathrm{am}\,v - \mathfrak{L}\,\mathrm{am}(v+2b) + \mathfrak{L}\,\mathrm{am}(v+4b) -+ \ldots + \nu.\mathfrak{L}\,\mathrm{am}(v+(n-1)b)$$
$$- \mathfrak{L}\,\mathrm{am}(v-2b) + \mathfrak{L}\,\mathrm{am}(v-4b) -+ \ldots + \nu.\mathfrak{L}\,\mathrm{am}(v-(n-1)b),$$

oder

$$\mathfrak{L}\,\mathrm{am}(nu) = 2\mathfrak{L}\,\mathrm{arc\,sin}\left(\frac{\mathrm{sn}\,v}{\mathrm{sn}\,b}\right) - 2\mathfrak{L}\,\mathrm{arc\,sin}\left(\frac{\mathrm{sn}\,v}{\mathrm{sn}\,3b}\right) + - \ldots$$
$$\ldots - \nu.\mathfrak{L}\,\mathrm{arc\,sin}\left(\frac{\mathrm{sn}\,v}{\mathrm{sn}(n-2)b}\right) + \nu.\mathfrak{L}\,\mathrm{am}\,v.$$

Multiplicirt man die Gleichung (29.) mit $\frac{\partial(nu)}{\mu'} = \partial v$ und integrirt sie, so erhält man

$$32. \quad \mathrm{am}(nu) = \mathrm{am}\,v + \mathrm{am}(v+2b) + \mathrm{am}(v+4b) + \ldots + \mathrm{am}(v+(n-1)b)$$
$$+ \mathrm{am}(v-2b) + \mathrm{am}(v-4b) + \ldots + \mathrm{am}(v-(n-1)b),$$

oder

$$\mathrm{am}(nu) = \mathrm{am}\,v + 2\,\mathrm{arc\,tang}(\mathrm{dn}\,2b.\mathrm{tn}\,u) + 2\,\mathrm{arc\,tang}(\mathrm{dn}\,4b.\mathrm{tn}\,u) + \ldots$$
$$\ldots + 2\,\mathrm{arc\,tang}(\mathrm{dn}(n-1)b.\mathrm{tn}\,u).$$

§. 297.

Die Formeln §. 296. stehen im engsten Zusammenhange mit den Formeln §. 295. Jene drücken Functionen des Arguments nu mit dem Modul k aus durch Functionen des Arguments v mit dem gröſseren Modul λ; diese hingegen drücken die Functionen des Arguments v mit demselben Modul λ aus durch Functionen des Arguments u. *Insofern erscheinen die einen als die umgekehrten der anderen.*

Eliminirt man die Functionen des Arguments v, so erhält man Formeln, welche die Functionen des Arguments nu mit dem Modul k ausdrücken durch Functionen des Arguments u mit demselben Modul k; daher erscheint auch die eine Substitution als eine Ergänzung der andern zur Vervielfältigung des Arguments. Insofern sind die Formeln §. 295. und §. 296. als zu einem Systeme gehörig anzusehen.

Man erhält aber noch leicht ein zweites solches System von eben so vielen Formeln, wenn man statt der Grundgröfsen

$a = \frac{K'}{n}$ und $b = \frac{L}{n}$ die Grundgröfsen $a = \frac{L'}{n}$ und $b = \frac{K}{n}$ nimmt,

welches darauf hinausläuft, dafs man die Moduln k und λ nun mit λ und k bezeichnet, zugleich aber die Zeichen u und v mit einander vertauscht. Es versteht sich von selbst, dafs gleichzeitig K mit L und K' mit L' vertauscht werden müssen; die Zeichen der Multiplicatoren μ und $\mu' = \frac{n}{\mu}$ können beibehalten werden. Nehmen wir aber an, dafs u, k, k', K und K' dieselben Bedeutungen haben, wie vorhin, so haben $\lambda, \lambda', L, L', \mu, \mu'$ und v andere Bedeutungen als in den Formeln des vorigen Systems. Es ist nun

1. $u = \mu . v = \frac{n}{\mu'} . v$, wenn wieder $\mu . \mu' = n$ gesetzt wird;

2. $$\mu = \left(\frac{\operatorname{sn}\frac{2L'}{n} . \operatorname{sn}\frac{4L'}{n} . \operatorname{sn}\frac{6L'}{n} \dots \operatorname{sn}\frac{n-1}{n}L'}{\operatorname{sn}\frac{L'}{n} . \operatorname{sn}\frac{3L'}{n} . \operatorname{sn}\frac{5L'}{n} \dots \operatorname{sn}\frac{n-2}{n}L'}\right)^2 \text{ mit dem Modul } \lambda';$$

3. $$\mu' = \left(\frac{\operatorname{sn}\frac{2K}{n} . \operatorname{sn}\frac{4K}{n} . \operatorname{sn}\frac{6K}{n} \dots \operatorname{sn}\frac{n-1}{n}K}{\operatorname{sn}\frac{K}{n} . \operatorname{sn}\frac{3K}{n} . \operatorname{sn}\frac{5K}{n} \dots \operatorname{sn}\frac{n-2}{n}K}\right)^2 \text{ mit dem Modul } k;$$

4. $$k' = \lambda'^n \left(\operatorname{sn}\frac{L'}{n} . \operatorname{sn}\frac{3L'}{n} . \operatorname{sn}\frac{5L'}{n} \dots \operatorname{sn}\frac{n-2}{n}L'\right)^4 \text{ mit dem Modul } \lambda';$$

5. $$k = \frac{\lambda^n}{\left(\operatorname{dn}\frac{2L'}{n} \operatorname{dn}\frac{4L'}{n} \operatorname{dn}\frac{6L'}{n} \dots \operatorname{dn}\frac{n-1}{n}L'\right)^4} \text{ mit dem Modul } \lambda';$$

6. $$\lambda' = \frac{k'^n}{\left(\operatorname{dn}\frac{2K}{n} \operatorname{dn}\frac{4K}{n} \operatorname{dn}\frac{6K}{n} \dots \operatorname{dn}\frac{n-1}{n}K\right)^4} \text{ mit dem Modul } k;$$

7. $$\lambda = k^n \left(\operatorname{sn}\frac{K}{2} \operatorname{sn}\frac{3K}{2} \operatorname{sn}\frac{5K}{n} \dots \operatorname{sn}\frac{n-2}{n}K\right)^4 \text{ mit dem Modul } k.$$

Dieser letzten Gleichung gemäfs ist $\lambda < k^n$, und es nähert sich also λ desto mehr der Grenze Null, je gröfser die ganze Zahl genommen wird.

Nehmen wir die angezeigte Veränderung mit den Formeln (12.) §. 295. vor und beachten, dafs nun $K = \mu . L$ und $K' = \frac{\mu L'}{n}$, also $\frac{L'}{n} = \frac{K'}{\mu}$ ist, so erhalten wir Formeln, welche sich leicht also darstellen lassen:

$$\operatorname{sn} u = \frac{1}{N} \cdot \mu \operatorname{sn}\frac{u}{\mu} \cdot \left(1 - \frac{\operatorname{sn}^2 \frac{u}{\mu}}{\operatorname{sn}^2 \frac{2iK'}{\mu}}\right)\left(1 - \frac{\operatorname{sn}^2 \frac{u}{\mu}}{\operatorname{sn}^2 \frac{4iK'}{\mu}}\right) \cdots \left(1 - \frac{\operatorname{sn}^2 \frac{u}{\mu}}{\operatorname{sn}^2 \frac{(n-1)iK'}{\mu}}\right) \pmod{\lambda},$$

$$\operatorname{cn} u = \frac{1}{N} \cdot \operatorname{cn}\frac{u}{\mu} \cdot \left(1 - \frac{\operatorname{sn}^2 \frac{u}{\mu}}{\operatorname{snc}^2 \frac{2iK'}{\mu}}\right)\left(1 - \frac{\operatorname{sn}^2 \frac{u}{\mu}}{\operatorname{sn}^2 \frac{4iK'}{\mu}}\right) \cdots \left(1 - \frac{\operatorname{sn}^2 \frac{u}{\mu}}{\operatorname{sn}^2 \frac{(n-1)iK'}{\mu}}\right) \pmod{\lambda},$$

$$\operatorname{dn} u = \frac{1}{N} \cdot \operatorname{dn}\frac{u}{\mu} \cdot \left(1 - \frac{\operatorname{sn}^2 \frac{u}{\mu}}{\operatorname{snc}^2 \frac{iK'}{\mu}}\right)\left(1 - \frac{\operatorname{sn}^2 \frac{u}{\mu}}{\operatorname{snc}^2 \frac{3iK'}{\mu}}\right) \cdots \left(1 - \frac{\operatorname{sn}^2 \frac{u}{\mu}}{\operatorname{snc}^2 \frac{(n-1)iK'}{\mu}}\right) \pmod{\lambda},$$

wenn man zur Abkürzung setzt:

$$N = \left(1 - \lambda^2 \operatorname{sn}^2 \frac{2iL'}{u} \operatorname{sn}^2 v\right)\left(1 - \lambda^2 \operatorname{sn}^2 \frac{4iL'}{n} \operatorname{sn}^2 v\right) \ldots$$
$$\ldots \left(1 - \lambda^2 \operatorname{sn}^2 \frac{n-1}{n} iL' . \operatorname{sn}^2 v\right) \pmod{\lambda}$$

oder

$$N = \left(1 - \frac{\operatorname{sn}^2 v}{\operatorname{sn}^2 \frac{iL'}{n}}\right)\left(1 - \frac{\operatorname{sn}^2 v}{\operatorname{sn}^2 \frac{3iL'}{n}}\right) \cdots \left(1 - \frac{\operatorname{sn}^2 v}{\operatorname{sn}^2 \frac{(n-2)iL'}{n}}\right) \pmod{\lambda}$$

oder auch

$$N = \left(1 - \frac{\operatorname{sn}^2 \frac{u}{\mu}}{\operatorname{sn}^2 \frac{iK'}{\mu}}\right)\left(1 - \frac{\operatorname{sn}^2 \frac{u}{\mu}}{\operatorname{sn}^2 \frac{3iK'}{\mu}}\right) \cdots \left(1 - \frac{\operatorname{sn}^2 \frac{u}{\mu}}{\operatorname{sn}^2 \frac{(n-2)iK'}{\mu}}\right) \pmod{\lambda}.$$

Wird nun n unendlich grofs genommen, wodurch der Modul $\lambda = 0$, also $L = \frac{1}{2}\pi$ wird, so wird der Gleichung $K = \mu L$ gemäfs $\frac{1}{\mu} = \frac{\pi}{2K} = \eta$, $\operatorname{sn}\frac{u}{\mu} = \sin \eta u$, $\operatorname{cn}\frac{u}{\mu} = \cos \eta u$, $\operatorname{dn}\frac{u}{\mu} = 1$, $\operatorname{sn}\frac{\alpha i K'}{\mu} = \sin(\alpha \eta i K') = i \mathfrak{Sin}(\alpha \eta K')$, $\operatorname{snc}\frac{\alpha i K'}{\mu} = \operatorname{cn}\frac{\alpha i K'}{\mu} = \cos(\alpha \eta i K') = \mathfrak{Cos}(\alpha \eta K')$; daher haben wir

$$\operatorname{sn} u = \frac{\frac{1}{\eta} . \sin \eta u \left(1 + \frac{\sin^2 \eta u}{\mathfrak{Sin}^2 2\eta K'}\right)\left(1 + \frac{\sin^2 \eta u}{\mathfrak{Sin}^2 4\eta K'}\right)\left(1 + \frac{\sin^2 \eta u}{\mathfrak{Sin}^2 6\eta K'}\right) \cdots}{\left(1 + \frac{\sin^2 \eta u}{\mathfrak{Sin}^2 \eta K'}\right)\left(1 + \frac{\sin^2 \eta u}{\mathfrak{Sin}^2 3\eta K'}\right)\left(1 + \frac{\sin^2 \eta u}{\mathfrak{Sin}^2 5\eta K'}\right) \cdots},$$

$$\operatorname{cn} u = \frac{\cos \eta u \left(1 - \frac{\sin^2 \eta u}{\mathfrak{Cos}^2 2\eta K'}\right)\left(1 - \frac{\sin^2 \eta u}{\mathfrak{Cos}^2 4\eta K'}\right)\left(1 - \frac{\sin^2 \eta u}{\mathfrak{Cos}^2 6\eta K'}\right) \cdots}{\left(1 + \frac{\sin^2 \eta u}{\mathfrak{Sin}^2 \eta K'}\right)\left(1 + \frac{\sin^2 \eta u}{\mathfrak{Sin}^2 3\eta K'}\right)\left(1 + \frac{\sin^2 \eta u}{\mathfrak{Sin}^2 5\eta K'}\right) \cdots},$$

$$\mathrm{dn}\,u = \frac{\left(1-\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Cos}^2\eta K'}\right)\left(1-\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Cos}^2 3\eta K'}\right)\left(1-\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Cos}^2 5\eta K'}\right)\cdots}{\left(1+\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Sin}^2\eta K'}\right)\left(1+\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Sin}^2 3\eta K'}\right)\left(1+\frac{\sin^2\eta u}{\mathfrak{Sin}^2 5\eta K'}\right)\cdots}.$$

Diese unendlichen Producte stimmen aber mit den Formeln (6, 7, 8.) §. 166. völlig überein.

Auf ähnliche Weise lassen sich die Modularfunctionen als unendliche Reihen darstellen, indem man sie auf Modularfunctionen mit dem Modul Null, d. h. auf Potenzialfunctionen zurückführt.

§. 298.

Umformung der Modular-Integrale von der ersten Art durch Substitution $n$ten Grades, wenn n eine ungerade ganze Zahl ist.

Multiplicirt man die Gleichung (28.) §. 295. mit k^2 und subtrahirt dann jede Seite von n, so erhält man

$$n-\lambda^2\mu^2\,\mathrm{sn}^2 v = n-\mu^2+\mu^2\,\mathrm{dn}^2 v =$$

$$\mathrm{dn}^2 u+\mathrm{dn}^2\left(u+\frac{2iK'}{n}\right)+\mathrm{dn}^2\left(u+\frac{4iK'}{n}\right)\cdots+\mathrm{dn}^2\left(u+\frac{(n-1)iK'}{n}\right)-2k^2t'$$
$$+\mathrm{dn}^2\left(u-\frac{2iK'}{n}\right)+\mathrm{dn}^2\left(u-\frac{4iK'}{n}\right)\cdots+\mathrm{dn}^2\left(u-\frac{(n-1)iK'}{n}\right),$$

und hierin ist $t' = \mathrm{tn}'^2\frac{2K'}{n}+\mathrm{tn}'^2\frac{4K'}{n}+\mathrm{tn}'^2\frac{6K'}{n}+\cdots+\mathrm{tn}'^2\frac{n-1}{n}K'$.

Diese Gleichung kann noch einfacher dargestellt werden. Den Formeln (12.) §. 295. gemäfs ist $\mathrm{dn}\,v=0$ für $\mathrm{dn}\,u=0$. Da nun $\mathrm{dn}(K+iK')=0$ und $\mathrm{dn}(u+K+iK')=ik'\,\mathrm{tn}\,u$ ist, so erhalten wir, wenn wir $u=K+iK'$ setzen, die Gleichung

$$n-\mu^2 = +2k'^2s'-2k^2t',$$

wenn wir zur Abkürzung

$$1.\quad s' = \mathrm{sn}'^2\frac{2K'}{n}+\mathrm{sn}'^2\frac{4K'}{n}+\mathrm{sn}'^2\frac{6K'}{n}\cdots+\mathrm{sn}'^2\frac{n-1}{n}K'\ \ (\mathrm{mod.}\ k')$$

setzen; folglich reducirt sich die vorige Gleichung auf

$$\mu^2\,\mathrm{dn}^2 v =$$

$$-2k'^2s'+\mathrm{dn}^2 u+\mathrm{dn}^2\left(u+\frac{2iK'}{n}\right)+\mathrm{dn}^2\left(u+\frac{4iK'}{n}\right)\cdots+\mathrm{dn}^2\left(u+\frac{(n-1)iK'}{n}\right)$$
$$+\mathrm{dn}^2\left(u-\frac{2iK'}{n}\right)+\mathrm{dn}^2\left(u-\frac{4iK'}{n}\right)\cdots+\mathrm{dn}^2\left(u-\frac{(n-1)iK'}{n}\right).$$

Wird diese Gleichung mit $\frac{\partial v}{\mu}=\partial u$ multiplicirt und integrirt, so ergiebt sich

$$2.\quad \mu.\mathrm{el}\, v =$$

$$-2k'^2 s'.u + \mathrm{el}\, u + \mathrm{el}\left(u + \frac{2iK'}{n}\right) + \mathrm{el}\left(u + \frac{4iK'}{n}\right) + \dots + \mathrm{el}\left(u + \frac{(n-1)iK'}{n}\right)$$
$$+ \mathrm{el}\left(u - \frac{2iK'}{n}\right) + \mathrm{el}\left(u - \frac{4iK'}{n}\right) + \dots + \mathrm{el}\left(u - \frac{(n-1)iK'}{n}\right).$$

Hierdurch ist bereits die Function $\mathrm{el}\, v$ mit dem Modul λ auf Functionen mit dem kleineren Modul k zurückgeführt. Es sei $\mathrm{el}\, v = F$, wenn $v = L$ genommen wird, so wie $\mathrm{el}\, u = E$ für $u = K$. Werden die Moduln mit den conjugirten vertauscht, so verwandeln sich F in F' und E in E'. Setzen wir nun $u = K$, also $v = L$, und beachten die Formel

$$\mathrm{el}(K+u) + \mathrm{el}(K-u) = 2E,$$

so verwandelt sich die Gleichung (2.) in

$$3.\quad \mu.F = -2k'^2.s'.K + n.E.$$

Da aufserdem $v = \mu.u$ und $L = \mu.K$, also $\frac{v}{L} = \frac{u}{K}$ ist, so verwandelt sich die vorige Gleichung, wenn sie hiermit multiplicirt wird, in

$$\mu.\frac{F}{L}v = -2k'^2 s'.u + n.\frac{E}{K}.u,$$

und wird diese Gleichung von der Gleichung (2.) subtrahirt, so entsteht

$$4.\quad \mu\left(\mathrm{el}\, v - \frac{F}{L}v\right) =$$

$$-n.\frac{E}{K}u + \mathrm{el}\, u + \mathrm{el}\left(u + \frac{2iK'}{n}\right) + \mathrm{el}\left(u + \frac{4iK'}{n}\right) \dots + \mathrm{el}\left(u + \frac{(n-1)iK'}{n}\right)$$
$$+ \mathrm{el}\left(u - \frac{2iK'}{n}\right) + \mathrm{el}\left(u - \frac{4iK'}{n}\right) \dots + \mathrm{el}\left(u - \frac{(n-1)iK'}{n}\right).$$

Da $\mathrm{el}(a+b) + \mathrm{el}(a-b) = 2\,\mathrm{el}\, a - k^2 \mathrm{sn}\, a\, \mathrm{sn}\, b(\mathrm{sn}(a+b) - \mathrm{sn}(a-b))$ ist, so kann die vorige Gleichung auch also dargestellt werden:

$$5.\quad \mu\left(\mathrm{el}\, v - \frac{F}{L}v\right) =$$

$$n\left(\mathrm{el}\, u - \frac{E}{K}u\right) + 2k^2 \mathrm{sn}\, u\, \mathrm{cn}\, u\, \mathrm{dn}\, u \left(\frac{\mathrm{sn}'^2 \frac{2K}{n}}{1 - \mathrm{sn}'^2 \frac{2K'}{n} \mathrm{dn}^2 u} + \frac{\mathrm{sn}'^2 \frac{4K'}{n}}{1 - \mathrm{sn}'^2 \frac{4K'}{n} \mathrm{dn}^2 u} \dots \right.$$
$$\left. \dots + \frac{\mathrm{sn}'^2 \frac{n-1}{n} K'}{1 - \mathrm{sn}'^2 \frac{n-1}{n} K'.\mathrm{dn}^2 u} \right).$$

Wir stellen denselben Ausdruck noch auf eine andere Art dar. Es ist zunächst

$$\mu.\left(\mathrm{el}\,v-\frac{F}{L}v\right)=$$

$$n\left(\mathrm{el}\,u-\frac{E}{K}u\right)-2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u\left(\frac{k^2\,\mathrm{sn}^2\frac{2iK'}{n}}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\frac{2iK'}{n}\,\mathrm{sn}^2 u}+\frac{k^2\,\mathrm{sn}^2\frac{4iK'}{n}}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\frac{4iK'}{n}\,\mathrm{sn}^2 u}\cdots\right.$$

$$\left.\cdots+\frac{k^2\,\mathrm{sn}^2\frac{n-1}{n}iK'}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\frac{n-1}{n}iK'\,\mathrm{sn}^2 u}\right).$$

Es ist aber $k\,\mathrm{sn}\frac{n-1}{n}iK'=\frac{1}{\mathrm{sn}\left(iK'-\frac{n-1}{n}iK'\right)}=\frac{1}{\mathrm{sn}\left(\frac{iK'}{n}\right)}$, u. s. w.

Hiernach haben wir

$$6.\quad \mu.\left(\mathrm{el}\,v-\frac{F}{L}v\right)=n.\left(\mathrm{el}\,u-\frac{E}{K}u\right)+\frac{2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{sn}^2u-\mathrm{sn}^2\frac{iK'}{n}}+\frac{2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{sn}^2u-\mathrm{sn}^2\frac{3iK'}{n}}$$

$$+\frac{2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{sn}^2u-\mathrm{sn}^2\frac{5iK'}{n}}\cdots+\frac{2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{sn}^2u-\mathrm{sn}^2\frac{n-2}{n}iK'}.$$

Aus der Gleichung (3.) leiten wir eine Gleichung her, welche die conjugirten Quadranten betrifft. Multipliciren wir dieselbe mit $n\frac{L'}{\mu}=K'$, so erhalten wir zunächst

$$nL'F=-2k'^2s'.KK'+n.EK'.$$

Da aber nach *Legendre's* Satze $EK'+E'K'-KK'=FL'+F'L-LL'=\frac{1}{2}\pi$, also auch

$$nFL'+nF'L-nLL'=nEK'+nE'K-nKK'$$

ist, so erhalten wir durch Subtraction

$$nL(L'-F')=(-2k'^2s'+n)KK'-nE'K,$$

und wird diese Gleichung durch $L=\mu.K$ dividirt, so entsteht

$$7.\quad \mu(L'-F')=-\frac{2k'^2s'}{n}K'+K'-E'.$$

Nach §. 290. ist für $u=iK'$ das Argument $v=niL'$, also ist auch für $u=2iK'$, $v=2niL'$.

Setzen wir nun in der Formel (2.) wirklich $u=2iK'$, also $v=2niL'$, und beachten, dafs $\mathrm{el}(2iK')=2i(K'-E')$, $\mathrm{el}(2niL')=2ni(L'-F')$, ferner $\mathrm{el}(2iK'+u)+\mathrm{el}(2iK'-u)=4i(K'-E')$ ist, so ist

$$\mu.2ni(L'-F')=-2k'^2s'.2iK'+2ni(K'-E'),$$

und wird diese Gleichung durch $2ni$ dividirt, so erhalten wir wie vorhin

$$\mu(L'-F')=-\frac{2k'^2s'}{n}.K'+K'-E'.$$

§. 299.

Wollen wir nun Formeln herleiten, welche die umgekehrten sind im Vergleiche mit denen §. 298., so müssen wir von der Formel (30.) §. 296. ausgehen. Multipliciren wir dieselbe mit λ^2 und subtrahiren sie dann von n, so erhalten wir

$$n-\mu'^2+\mu'^2\,\mathrm{dn}^2(nu)=$$
$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{dn}^2 v+\mathrm{dn}^2\left(v+\frac{2L}{n}\right)+\mathrm{dn}^2\left(v+\frac{4L}{n}\right)\ldots\ldots+\mathrm{dn}^2\left(v+\frac{n-1}{n}L\right)\\ +\mathrm{dn}^2\left(v-\frac{2L}{n}\right)+\mathrm{dn}^2\left(v-\frac{4L}{n}\right)\ldots\ldots+\mathrm{dn}^2\left(v+\frac{n-1}{n}L\right)\end{array}\right\}+2\lambda^2 s,$$

wenn wieder gesetzt wird $s=\mathrm{sn}^2\frac{2L}{n}+\mathrm{sn}^2\frac{4L}{n}+\mathrm{sn}^2\frac{6L}{n}\ldots\ldots+\mathrm{sn}^2\frac{n-1}{n}L$. Da nach Formel (14.) §. 296. $\mathrm{dn}(nu)=0$ für $\mathrm{dn}\,v=0$ ist, so setzen wir $v=L+iL'$, wodurch wir, da $\mathrm{dn}(u+K+iK')=ik'\,\mathrm{tn}\,u=\frac{i}{\mathrm{tnc}\,u}$ ist, erhalten:

$$n-\mu'^2=-2t+2\lambda^2 s,$$

wenn wir setzen:

$$1.\quad t=\frac{1}{\mathrm{tn}^2\frac{L}{n}}+\frac{1}{\mathrm{tn}^2\frac{3L}{n}}+\frac{1}{\mathrm{tn}^2\frac{5L}{n}}+\ldots\ldots+\frac{1}{\mathrm{tn}^2\frac{n-2}{n}L}\ (\mathrm{mod.}\ \lambda)$$

und der vorige Ausdruck reducirt sich also auf

$$\mu'^2\,\mathrm{dn}^2(nu)=2t+\mathrm{dn}^2 v+\mathrm{dn}^2\left(v+\frac{2L}{n}\right)+\mathrm{dn}^2\left(v+\frac{4L}{n}\right)\ldots+\mathrm{dn}^2\left(v+\frac{n-1}{n}L\right)$$
$$+\mathrm{dn}^2\left(v-\frac{2L}{n}\right)+\mathrm{dn}^2\left(v-\frac{4L}{n}\right)\ldots+\mathrm{dn}^2\left(v-\frac{n-1}{n}L\right).$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $\frac{\partial(nu)}{\mu}=\partial v$, und integrirt, so entsteht

$$2.\quad \mu'.\mathrm{el}(nu)=$$
$$2t.v+\mathrm{el}\,v+\mathrm{el}\left(v+\frac{2L}{n}\right)+\mathrm{el}\left(v+\frac{4L}{n}\right)\ldots\ldots+\mathrm{el}\left(v+\frac{n-1}{n}L\right)$$
$$+\mathrm{el}\left(v-\frac{2L}{n}\right)+\mathrm{el}\left(v-\frac{4L}{n}\right)\ldots\ldots+\mathrm{el}\left(v-\frac{n-1}{n}L\right),$$

und hierdurch ist die Function $\mathrm{el}(nu)$ mit dem Modul k auf ähnliche Functionen mit dem gröſseren Modul λ zurückgeführt, welche sämmtlich reell sind. Da für $v=L$, $u=K$ ist, also $\mathrm{el}(nu)=nE$, so erhalten wir

$$\mu'.n.E=2t.L+n.F,\ \text{oder auch}$$

$$3.\quad \mu'.E=\frac{2t}{n}.L+F.$$

Da $nu = \mu'.v$ und $nK = \mu'.L$, also $\frac{u}{K} = \frac{v}{L}$ ist, so erhält man, wenn diese Gleichung mit der vorigen multiplicirt wird,

$$\mu'.\frac{E}{K}.nu = 2t.v + n\frac{F}{L}.v,$$

und wird diese Gleichung von (2.) subtrahirt, so entsteht

$$4.\quad \mu'\left(\text{el}(nu) - \frac{E}{K}nu\right) =$$

$$-n.\frac{F}{L}.v + \text{el}\,v + \text{el}\left(v + \frac{2L}{n}\right) + \text{el}\left(v + \frac{4L}{n}\right) \dots + \text{el}\left(v + \frac{n-1}{n}L\right)$$
$$+ \text{el}\left(v - \frac{2L}{n}\right) + \text{el}\left(v - \frac{4L}{n}\right) \dots + \text{el}\left(v - \frac{n-1}{n}L\right).$$

Da $\frac{E}{K}.nu = \frac{2tv}{\mu'} + \mu.\frac{F}{L}$ und nach §. 298. $\mu.\frac{F}{L}.v = -2k'^2 s'u + \frac{E}{K}.nu$ ist, so ist $\frac{2t.v}{\mu'} = 2k'^2 s'u$, und da $v = \mu.u$ ist, so ist endlich

$$5.\quad \mu.t = \mu'.k'^2 s'.$$

Zusatz. Nach §. 294. können aus den Formeln §. 298. und 299. noch ebensoviele neue Formeln hergeleitet werden, wenn man k mit λ, k' mit λ', K mit L und K' mit L' vertauscht, wobei übrigens nicht die Gröſsen selbst, sondern im Grunde nur ihre Zeichen vertauscht werden. Hierdurch verwandelt sich die Formel (6.) §. 298. in

$$\mu.\left(\text{el}\,u - \frac{E}{K}u\right) =$$

$$n\left(\text{el}\frac{u}{\mu} - \frac{F}{L}.\frac{u}{\mu}\right) + 2\,\text{sn}\frac{u}{\mu}\,\text{cn}\frac{u}{\mu}\,\text{dn}\frac{u}{\mu}\left(\frac{1}{\text{sn}^2\frac{u}{\mu} - \text{sn}^2\frac{iK'}{\mu}} + \frac{1}{\text{sn}^2\frac{u}{\mu} - \text{sn}^2\frac{3iK'}{\mu}}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{\text{sn}^2\frac{u}{\mu} - \text{sn}^2\frac{5iK'}{\mu}} \dots + \frac{1}{\text{sn}^2\frac{u}{\mu} - \text{sn}^2\frac{(n-2)}{\mu}iK'}\right) \text{(mod. } \lambda).$$

Wird nun die Zahl n vergröſsert, also der Modul λ der Grenze Null nahe gebracht, so nähert sich $\frac{1}{\mu}$ der Grenze η; ferner wird $F = L = \frac{1}{2}\pi$, $\text{el}\left(\frac{u}{\mu}\right) = \frac{u}{\mu} = \eta u$, $\text{sn}\frac{u}{\mu} = \sin\eta u$, $\text{cn}\frac{u}{\mu} = \cos\eta u$, $\text{dn}\frac{u}{\mu} = 1$, $\text{sn}\left(\frac{\alpha iK'}{\mu}\right) = i\,\mathfrak{Sin}(\eta\alpha K')$, $n\left(\text{el}\frac{u}{\mu} - \frac{F}{L}.\frac{u}{\mu}\right) = 0$; daher haben wir

$$\text{el}\,u = \frac{E}{K}.u + \frac{2\eta\sin\eta u\cos\eta u}{\sin^2\eta u + \mathfrak{Sin}^2\eta K'} + \frac{2\eta\sin\eta u\cos\eta u}{\sin^2\eta u + \mathfrak{Sin}^2 3\eta K'} + \frac{2\eta\sin\eta u\cos\eta u}{\sin^2\eta u + \mathfrak{Sin}^2 5\eta K'} + \dots$$

was mit dem Ausdrucke $\text{el}\,u = \frac{E}{K}u + H(u)$ übereinstimmt, wenn man für $H(u)$ den unter (4.) §. 200. angegebenen Werth nimmt und be-

achtet, dafs

$$\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\mathfrak{Sin}^2\beta}=\frac{\sin 2\alpha}{\mathfrak{Cos}\,2\beta-\cos 2\alpha}\text{ ist.}$$

§. 300.

Umformung der Modularlogarithmen und der damit im Zusammenhange stehenden Hülfsfunctionen durch die obigen Substitutionen $n$ten Grades.

Wird die Gleichung (4.) §. 298. noch mit $\frac{\partial v}{\mu}=\partial u$ multiplicirt und integrirt, so erhält man sofort

$$\begin{aligned}\mathrm{lm}\,v-\frac{F}{L}\cdot\tfrac{1}{2}v^2 &=\\ -n.\frac{E}{K}\cdot\tfrac{1}{2}u^2+\mathrm{lm}\,u+\mathrm{lm}\left(u+\frac{2iK'}{n}\right)&+\mathrm{lm}\left(u+\frac{4iK'}{n}\right)\dots+\mathrm{lm}\left(u+\frac{n-1}{n}iK'\right)\\ &+\mathrm{lm}\left(u-\frac{2iK'}{n}\right)+\mathrm{lm}\left(u-\frac{4iK'}{n}\right)\dots+\mathrm{lm}\left(u-\frac{n-1}{n}iK'\right)\\ &-2\left(\mathrm{lm}\left(\frac{2iK'}{n}\right)+\mathrm{lm}\left(\frac{4iK'}{n}\right)+\mathrm{lm}\left(\frac{6iK'}{n}\right)\dots+\mathrm{lm}\left(\frac{n-1}{n}iK'\right)\right).\end{aligned}$$

Da ferner $\mathrm{lm}\,u=\frac{E}{K}\cdot\frac{1}{2}u^2+\log\left(\frac{\mathrm{Hl}\,u}{\sqrt{k'}}\right)$ und ebenso $\mathrm{lm}\,v=\frac{F}{L}\cdot\frac{1}{2}v^2+\log\left(\frac{\mathrm{Hl}\,v}{\sqrt{\lambda'}}\right)$ ist, so ist

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{\mathrm{Hl}\,v}{\sqrt{\lambda'}}\right)&=\\ -n.\frac{E}{K}\cdot\tfrac{1}{2}u^2&+\log\left(\frac{\mathrm{Hl}\,u.\mathrm{Hl}\left(u+\frac{2iK'}{n}\right)\mathrm{Hl}\left(u-\frac{2iK'}{n}\right)\dots\mathrm{Hl}\left(u+\frac{n-1}{n}iK'\right).\mathrm{Hl}\left(u-\frac{n-1}{n}iK'\right)}{\sqrt{k'^n}}\right)\\ &-\log\left(\frac{\mathrm{Hl}^2\left(\frac{2iK'}{n}\right)\mathrm{Hl}^2\left(\frac{4iK'}{n}\right)\dots\mathrm{Hl}^2\left(\frac{n-1}{n}iK'\right)}{k'^{\frac{1}{2}(n-1)}}\right)\\ +\frac{E}{2K}\Bigg(u^2+\left(u+\frac{2iK'}{n}\right)^2&+\left(u-\frac{2iK'}{n}\right)^2+\dots+\left(u+\frac{n-1}{n}iK'\right)^2+\left(u-\frac{n-1}{n}iK'\right)^2\\ &-2\left(\frac{2iK'}{n}\right)^2-2\left(\frac{4iK'}{n}\right)^2\dots-2\left(\frac{n-1}{n}iK'\right)^2\Bigg).\end{aligned}$$

Diese Formel reducirt sich aber auf

$$\mathrm{Hl}(v)=\sqrt{\left(\frac{\lambda'}{k'}\right)}\cdot\frac{\left\{\begin{matrix}\mathrm{Hl}(u)\,\mathrm{Hl}\left(u+\frac{2iK'}{n}\right)\mathrm{Hl}\left(u-\frac{2iK'}{n}\right)\mathrm{Hl}\left(u+\frac{4iK'}{n}\right)\mathrm{Hl}\left(u-\frac{4iK'}{n}\right)\dots\\ \dots\mathrm{Hl}\left(n+\frac{n-1}{n}iK'\right)\mathrm{Hl}\left(u-\frac{n-1}{n}iK'\right)\end{matrix}\right\}}{\left(\mathrm{Hl}\left(\frac{2iK'}{n}\right)\mathrm{Hl}\left(\frac{4iK'}{n}\right)\mathrm{Hl}\left(\frac{6iK'}{n}\right)\dots\mathrm{Hl}\left(\frac{n-1}{n}iK'\right)\right)^2}.$$

Setzen wir also zur Abkürzung

$$1.\quad \left\{\begin{array}{l} h = \mathrm{Hl}\left(\frac{2iK'}{n}\right)\mathrm{Hl}\left(\frac{4iK'}{n}\right)\mathrm{Hl}\left(\frac{6iK'}{n}\right)\ldots\mathrm{Hl}\left(\frac{n-1}{n}iK'\right) \text{ oder} \\ h = \mathfrak{Hl}\left(\frac{2K'}{n}\right)\mathfrak{Hl}\left(\frac{4K'}{n}\right)\mathfrak{Hl}\left(\frac{6K'}{n}\right)\ldots\mathfrak{Hl}\left(\frac{n-1}{n}K'\right) \end{array}\right\} \text{(mod. } k\text{)},$$

so haben wir den einfacheren Ausdruck

$$2.\quad \mathrm{Hl}(v) = \sqrt{\left(\frac{\lambda'}{k'}\right)}\cdot\frac{1}{h^2}\cdot \mathrm{P}\left\{\mathrm{Hl}\left(u+\frac{2\alpha iK'}{n}\right)\right\},$$

wenn man der Zahl α die Werthe $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \pm\frac{1}{2}(n-1)$ giebt, und P das Zeichen des aus dem allgemeinen Factor $\mathrm{Hl}\left(u+\frac{2\alpha iK'}{n}\right)$ hiernach zu bildenden Productes ist.

Da $\mathrm{Hl}\left(u+\frac{2\alpha iK'}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{\mathrm{Al}\left(u+\frac{2\alpha iK'}{n}\right)}{\mathrm{sn}\left(u+\frac{2\alpha iK'}{n}\right)}$ und ebenso auch $\mathrm{Hl}(v) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\cdot\frac{\mathrm{Al}(v)}{\mathrm{sn}\, v}$ ist, so erhalten wir zunächst

$$\frac{\mathrm{Al}(v)}{\mathrm{sn}\, v} = \sqrt{\frac{\lambda}{k^n}}\cdot\sqrt{\left(\frac{\lambda'}{k'}\right)}\cdot\frac{1}{h^2}\,\mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{Al}\left(u+\frac{2\alpha iK'}{n}\right)}{\mathrm{sn}\left(u+\frac{2\alpha iK'}{n}\right)}\right).$$

Aufserdem ist $\mathrm{sn}\, v = \sqrt{\left(\frac{k^n}{\lambda}\right)}\cdot\mathrm{P}\left\{\mathrm{sn}\left(u+\frac{2\alpha iK'}{n}\right)\right\}$, und wird die vorige Gleichung hiermit multiplicirt, so erhalten wir

$$3.\quad \mathrm{Al}(v) = \frac{1}{h^2}\sqrt{\left(\frac{\lambda'}{k'}\right)}\cdot\mathrm{P}\left\{\mathrm{Al}\left(u+\frac{2\alpha iK'}{n}\right)\right\}.$$

Benutzt man auf ähnliche Art, wie vorhin die Sinus, noch die Cosinus und Differenten, so entstehen

$$4.\quad \mathrm{Bl}(v) = \frac{1}{h^2}\sqrt{\left(\frac{\lambda'}{k'}\right)}\cdot\mathrm{P}\left\{\mathrm{Bl}\left(u+\frac{2\alpha iK'}{n}\right)\right\},$$

$$5.\quad \mathrm{Gl}(v) = \frac{1}{h^2}\sqrt{\left(\frac{\lambda'}{k'}\right)}\cdot\mathrm{P}\left\{\mathrm{Gl}\left(u+\frac{2\alpha iK'}{n}\right)\right\}.$$

Nach §. 185. ist $\mathrm{Hl}\, u = e^{-\frac{\pi u^2}{4KK'}}\cdot\mathfrak{Bl}'u$, und ebenso ist

$$\mathrm{Hl}\, v = e^{-\frac{\pi v^2}{4LL'}}\cdot\mathfrak{Bl}'v.$$

Da aber $LL' = \frac{\mu^2}{n}\cdot KK'$ und $v^2 = \mu^2\cdot u^2$, also $\frac{v^2}{LL'} = \frac{nu^2}{KK'}$ ist, so ist

$$\mathrm{Hl}\, v = e^{-\frac{\pi nu^2}{4KK'}}\cdot\mathfrak{Bl}'v.$$

Werden diese Werthe benutzt, und hiernach alle in der Formel (2.) enthaltenen cyklischen Hülfsfunctionen in hyperbolische mit dem conjugirten

Modul umgesetzt, so erhält man nach einigen leichten Reductionen, wenn man zur Abkürzung

$$6.\quad \begin{cases} b = \mathfrak{Bl}'\left(\frac{2iK'}{n}\right).\mathfrak{Bl}'\left(\frac{4iK'}{n}\right).\mathfrak{Bl}'\left(\frac{6iK'}{n}\right)\ldots\mathfrak{Bl}'\left(\frac{n-1}{n}iK'\right) \text{ oder} \\ b = \mathrm{Bl}'\left(\frac{2K'}{n}\right).\mathrm{Bl}'\left(\frac{4K'}{n}\right).\mathrm{Bl}'\left(\frac{6K'}{n}\right)\ldots\mathrm{Bl}'\left(\frac{n-1}{n}K'\right) \end{cases}$$

setzt, die Formel

$$7.\quad \mathfrak{Bl}'(v) = \frac{1}{b^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{\lambda'}{k'}\right)}.\mathrm{P}\left\{\mathfrak{Bl}'\left(u+\frac{2\alpha iK}{n}\right)\right\}.$$

Beachtet man nun, dafs nach §. 192. $\mathfrak{Bl}'u = \frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{\mathfrak{Al}'u}{\mathrm{sn}\,u} = \sqrt{\left(\frac{k'}{k}\right)}\cdot\frac{\mathfrak{Hl}'u}{\mathrm{cn}\,u} = \sqrt{k'}\cdot\frac{\mathfrak{Gl}'u}{\mathrm{dn}\,u}$ ist, so erhält man noch

$$8.\quad \mathfrak{Al}'(v) = \frac{1}{b^2}\sqrt{\left(\frac{\lambda'}{k'}\right)}.\mathrm{P}\left\{\mathfrak{Al}'\left(u+\frac{2\alpha iK'}{n}\right)\right\},$$

$$9.\quad \mathfrak{Hl}'(v) = \frac{1}{b^2}\sqrt{\left(\frac{\lambda'}{k'}\right)}.\mathrm{P}\left\{\mathfrak{Hl}'\left(u+\frac{2\alpha iK'}{n}\right)\right\},$$

$$10.\quad \mathfrak{Gl}'(v) = \frac{1}{b^2}\sqrt{\left(\frac{\lambda'}{k'}\right)}.\mathrm{P}\left\{\mathfrak{Gl}'\left(u+\frac{2\alpha iK'}{n}\right)\right\}.$$

Nach §. 191. ist

$$\frac{\mathrm{Hl}(a+b).\mathrm{Hl}(a-b)}{\mathrm{Hl}^2 b} = \left(\frac{\mathrm{Hl}\,a}{\sqrt{k'}}\right)^2.(1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b).$$

Ferner ist $\mathrm{Hl}(a\pm b) = \frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{\mathrm{Al}(a\pm b)}{\mathrm{sn}(a\pm b)}$, also ist

$$\frac{\mathrm{Al}(a+b).\mathrm{Al}(a-b)}{\mathrm{sn}(a+b).\mathrm{sn}(a-b).\mathrm{Hl}^2 b} = \left(\frac{\mathrm{Al}\,a}{\mathrm{sn}\,a\sqrt{k'}}\right)^2(1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b),$$

und da $\frac{\mathrm{sn}(a+b).\mathrm{sn}(a-b)}{\mathrm{sn}^2 a} = \frac{1-\frac{\mathrm{sn}^2 b}{\mathrm{sn}^2 a}}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b}$ ist, so ist

$$\frac{\mathrm{Al}(a+b).\mathrm{Al}(a-b)}{\mathrm{Hl}^2 b} = \left(\frac{\mathrm{Al}\,a}{\sqrt{k'}}\right)^2\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 b}{\mathrm{sn}^2 a}\right).$$

Setzt man in diesen Formeln noch $K-a$ statt a, so verwandeln sie sich in

$$\frac{\mathrm{Gl}(a+b).\mathrm{Gl}(a-b)}{\mathrm{Hl}^2 b} = \left(\frac{\mathrm{Gl}\,a}{\sqrt{k'}}\right)^2.(1-k^2\,\mathrm{sn}^2 b\,\mathrm{snc}^2 a) \text{ und}$$

$$\frac{\mathrm{Bl}(a+b).\mathrm{Bl}(a-b)}{\mathrm{Hl}^2 b} = \left(\frac{\mathrm{Bl}\,a}{\sqrt{k'}}\right)^2.\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 b}{\mathrm{snc}^2 a}\right).$$

Hiernach können die Formeln (2. bis 5.) auch also dargestellt werden:

$$11.\left\{\begin{aligned}
\mathrm{Hl}(v) &= \sqrt{\left(\frac{\lambda'}{k'^n}\right)}.(\mathrm{Hl}\,u)^n.\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2\frac{iK'}{n}}\right)\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2\frac{3iK'}{n}}\right)\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2\frac{5iK'}{n}}\right)\cdots\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2\frac{n-2}{n}iK'}\right),\\
\mathrm{Al}(v) &= \sqrt{\left(\frac{\lambda'}{k'^n}\right)}.(\mathrm{Al}\,u)^n.\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2\frac{2iK'}{n}}{\mathrm{sn}^2 u}\right)\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2\frac{4iK'}{n}}{\mathrm{sn}^2 u}\right)\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2\frac{6iK'}{n}}{\mathrm{sn}^2 u}\right)\cdots\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2\frac{n-1}{n}iK'}{\mathrm{sn}^2 u}\right),\\
\mathrm{Gl}(v) &= \sqrt{\left(\frac{\lambda'}{k'^n}\right)}.(\mathrm{Gl}\,u)^n.\left(1-\frac{\mathrm{snc}^2 u}{\mathrm{sn}^2\frac{iK'}{n}}\right)\left(1-\frac{\mathrm{snc}^2 u}{\mathrm{sn}^2\frac{3iK'}{n}}\right)\left(1-\frac{\mathrm{snc}^2 u}{\mathrm{sn}^2\frac{5iK'}{n}}\right)\cdots\left(1-\frac{\mathrm{snc}^2 u}{\mathrm{sn}^2\frac{n-2}{n}iK'}\right),\\
\mathrm{Bl}(v) &= \sqrt{\left(\frac{\lambda'}{k'^n}\right)}.(\mathrm{Bl}\,u)^n.\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2\frac{2iK'}{n}}{\mathrm{snc}^2 u}\right)\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2\frac{4iK'}{n}}{\mathrm{snc}^2 u}\right)\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2\frac{6iK'}{n}}{\mathrm{snc}^2 u}\right)\cdots\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2\frac{n-1}{n}iK'}{\mathrm{snc}^2 u}\right),
\end{aligned}\right.$$

Nach §. 213. ist $\frac{\mathfrak{B}l'(a+b).\mathfrak{B}l'(a-b)}{\mathfrak{B}l'^2 b} = \left(\frac{\mathfrak{B}l'a}{\sqrt{k'}}\right).(1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b)$, und da ferner $\mathfrak{B}l'u = \frac{1}{\sqrt{k}}.\frac{\mathfrak{A}l'u}{\mathrm{sn}\,u} = \sqrt{\frac{k'}{k}}.\frac{\mathfrak{H}l'u}{\mathrm{cn}\,u} = \sqrt{k'}.\frac{\mathfrak{G}l'u}{\mathrm{dn}\,u}$ ist, so ist auch

$$\frac{\mathfrak{A}l(a+b).\mathfrak{A}l'(a-b)}{\mathfrak{B}l'^2 b} = \left(\frac{\mathfrak{A}l'a}{\sqrt{k'}}\right)^2.\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 b}{\mathrm{sn}^2 a}\right),$$

$$\frac{\mathfrak{H}l'(a+b).\mathfrak{H}l'(a-b)}{\mathfrak{B}l'^2 b} = \left(\frac{\mathfrak{H}l'a}{\sqrt{k'}}\right)^2.\left(1-\frac{\mathrm{sn}\,b}{\mathrm{snc}^2 a}\right),$$

$$\frac{\mathfrak{G}l'(a+b).\mathfrak{G}l'(a-b)}{\mathfrak{B}l'^2 b} = \left(\frac{\mathfrak{G}l'a}{\sqrt{k'}}\right)^2.(1-k^2\,\mathrm{snc}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b).$$

Hiernach können die Formeln (7. bis 10.) auf ähnliche Art umgeformt werden, wie die Formeln (1. bis 5.) umgeformt worden sind. Man gelangt aber zu denselben Resultaten noch einfacher. Es ist, wie schon gezeigt wurde,

$$\mathrm{Hl}\,v = e^{-\frac{\pi n u^2}{4KK'}}.\mathfrak{B}l'v \quad\text{und auch}\quad (\mathrm{Hl}\,u) = e^{-\frac{\pi n u^2}{4KK'}}.(\mathfrak{B}l'u)^n;$$

daher haben wir die Gleichung:

$$\frac{\mathrm{Hl}\,v}{(\mathrm{Hl}\,u)^n} = \frac{\mathfrak{B}l'v}{(\mathfrak{B}l'u)^n}.$$

Ebenso findet man die drei Formeln

$$\frac{\mathrm{Al}\,v}{(\mathrm{Al}\,u)^n} = \frac{\mathfrak{A}l'v}{(\mathfrak{A}l'u)^n},\quad \frac{\mathrm{Bl}\,v}{(\mathrm{Bl}\,v)^n} = \frac{\mathfrak{H}l'v}{(\mathfrak{H}l'u)^n}\quad\text{und}\quad \frac{\mathrm{Gl}\,v}{(\mathrm{Gl}\,u)^n} = \frac{\mathfrak{G}l'v}{(\mathfrak{G}l'u)^n},$$

und ihnen gemäfs darf man in den Formeln (11.) statt $\mathrm{Hl}\,v$, $\mathrm{Al}\,v$, $\mathrm{Gl}\,v$, $\mathrm{Bl}\,v$ der Reihe nach setzen $\mathfrak{B}l'v$, $\mathfrak{A}l'v$, $\mathfrak{G}l'v$ und $\mathfrak{H}l'v$, wenn man gleichzeitig statt $\mathrm{Hl}\,u$, $\mathrm{Al}\,u$, $\mathrm{Gl}\,u$ und $\mathrm{Bl}\,u$ der Reihe nach die Functionen $\mathfrak{B}l'u$, $\mathfrak{A}l'u$, $\mathfrak{G}l'u$ und $\mathfrak{H}l'u$ setzt.

§. 301.

Durch die vorhergehenden Formeln werden die Modular-Logarithmen und cyklischen Hülfs-Functionen mit dem Modul λ zurückgeführt auf

gleiche Functionen mit dem Modul k, (die hyperbolischen Hülfs-Functionen mit dem Modul λ' auf gleiche Functionen mit dem Modul k'). Wollen wir Formeln herleiten, welche in Bezug auf die vorstehenden die umgekehrten scheinen, so müssen wir von den Formeln §. 299. ausgehen. Multipliciren wir zu dem Ende die Formel (4. §. 299.) mit $\frac{\partial(nu)}{\mu'} = \partial v$, so erhalten wir

$$1.\quad \operatorname{lm}(nu) - \frac{E}{K}\cdot\frac{(nu)^2}{2}$$

$$= -n.\frac{F}{L}\cdot\tfrac{1}{2}v^2 + \operatorname{lm} v + \operatorname{lm}\left(v+\frac{2L}{n}\right) + \operatorname{lm}\left(v+\frac{4L}{n}\right)\ldots + \operatorname{lm}\left(v+\frac{n-1}{n}L\right)$$
$$+ \operatorname{lm}\left(v-\frac{2L}{n}\right) + \operatorname{lm}\left(v-\frac{4L}{n}\right)\ldots + \operatorname{lm}\left(v-\frac{n-1}{n}L\right)$$
$$-\left(2\operatorname{lm}\frac{2L}{n} + 2\operatorname{lm}\frac{4L}{n}\ldots + 2\operatorname{lm}\frac{n-1}{n}L\right).$$

Da nun $\operatorname{lm}(nu) - \frac{E}{K}\cdot\frac{(nu)^2}{2} = \log\frac{\operatorname{Hl}(nu)}{\sqrt{k'}}$, ferner $\operatorname{lm} v = \frac{F}{L}\cdot\frac{1}{2}v^2 + \log\frac{\operatorname{Hl} v}{\sqrt{\lambda}}$ ist, so reducirt sich die Formel, wenn man zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} g &= \operatorname{Hl}\left(\frac{2L}{2}\right).\operatorname{Hl}\left(\frac{4L}{n}\right).\operatorname{Hl}\left(\frac{6L}{n}\right)\ldots\operatorname{Hl}\left(\frac{n-1}{n}L\right) \text{ oder} \\ 2.\quad g &= \operatorname{Gl}\left(\frac{L}{n}\right).\operatorname{Gl}\left(\frac{3L}{n}\right).\operatorname{Gl}\left(\frac{5L}{n}\right)\ldots\operatorname{Gl}\left(\frac{n-2}{n}L\right)\end{aligned}\right\}(\text{mod. }\lambda)$$

setzt, auf die einfachere:

$$3.\quad \operatorname{Hl}(nu) = \frac{1}{g^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{k'}{\lambda'}\right)}.\operatorname{Hl} v.\operatorname{Hl}\left(\frac{2L}{n}+v\right).\operatorname{Hl}\left(\frac{4L}{n}+v\right)\ldots\operatorname{Hl}\left(\frac{n-1}{n}L+v\right)$$
$$.\operatorname{Hl}\left(\frac{2L}{n}-v\right).\operatorname{Hl}\left(\frac{4L}{n}-v\right)\ldots\operatorname{Hl}\left(\frac{n-1}{n}L-v\right).$$

Hieraus folgt nun aber auf ähnliche Art, wie in §. 300. gezeigt worden ist,

$$4.\quad \operatorname{Al}(nu) = \frac{1}{g^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{k'}{\lambda'}\right)}.\operatorname{Al} v.\operatorname{Al}\left(\frac{2L}{n}+v\right).\operatorname{Al}\frac{4L}{n}+v\Big)\ldots\operatorname{Al}\left(\frac{n-1}{n}L+v\right)$$
$$.\operatorname{Al}\left(\frac{2L}{n}-v\right).\operatorname{Al}\left(\frac{4L}{n}-v\right)\ldots\operatorname{Al}\left(\frac{n-1}{n}L-v\right),$$

$$5.\quad \operatorname{Bl}(nu) = \frac{1}{g^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{k'}{\lambda'}\right)}.\operatorname{Bl} v.\operatorname{Bl}\left(\frac{2L}{n}+v\right).\operatorname{Bl}\left(\frac{4L}{n}+v\right)\ldots\operatorname{Bl}\left(\frac{n-1}{n}L+v\right)$$
$$.\operatorname{Bl}\left(\frac{2L}{n}-v\right).\operatorname{Bl}\left(\frac{4L}{n}-v\right)\ldots\operatorname{Bl}\left(\frac{n-1}{n}L-v\right),$$

$$6.\quad \operatorname{Gl}(nu) = \frac{1}{g^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{k'}{\lambda'}\right)}.\operatorname{Gl} v.\operatorname{Gl}\left(\frac{2L}{n}+v\right).\operatorname{Gl}\left(\frac{4L}{n}+v\right)\ldots\operatorname{Gl}\left(\frac{n-1}{n}L+v\right)$$
$$.\operatorname{Gl}\left(\frac{2L}{n}-v\right).\operatorname{Gl}\left(\frac{4L}{n}-v\right)\ldots\operatorname{Gl}\left(\frac{n-1}{n}L-v\right).$$

Hierdurch sind nun schon die Modular-Logarithmen und die cyklischen Hülfs-Functionen des Arguments nu mit dem Modul k auf ähnliche Functionen mit dem gröſseren Modul λ zurückgeführt worden.

Es können die vorigen Formeln auch also dargestellt werden:

$$7.\quad\begin{cases}\dfrac{\mathrm{Hl}(nu)}{\sqrt{k'}}=\left(\dfrac{\mathrm{Hl}\,v}{\sqrt{\lambda'}}\right)^n\left(1-k^2\mathrm{sn}^2\dfrac{2L}{n}\mathrm{sn}^2v\right)\left(1-k^2\mathrm{sn}^2\dfrac{4L}{n}\mathrm{sn}^2v\right)\ldots\left(1-k^2\mathrm{sn}^2\dfrac{n-1}{n}L.\mathrm{sn}^2v\right),\\[2ex] \dfrac{\mathrm{Al}(nu)}{\sqrt{k'}}=\left(\dfrac{\mathrm{Al}\,v}{\sqrt{\lambda'}}\right)^n\left(\dfrac{\mathrm{sn}^2\dfrac{2L}{n}}{\mathrm{sn}^2v}-1\right)\left(\dfrac{\mathrm{sn}^2\dfrac{4L}{n}}{\mathrm{sn}^2v}-1\right)\ldots\left(\dfrac{\mathrm{sn}^2\dfrac{n-1}{n}L}{\mathrm{sn}^2v}-1\right),\\[2ex] \dfrac{\mathrm{Bl}(nu)}{\sqrt{k'}}=\left(\dfrac{\mathrm{Bl}\,v}{\sqrt{\lambda'}}\right)^n\left(1-\dfrac{\mathrm{sn}^2\dfrac{2L}{n}}{\mathrm{snc}^2v}\right)\left(1-\dfrac{\mathrm{sn}^2\dfrac{4L}{n}}{\mathrm{snc}^2v}\right)\ldots\left(1-\dfrac{\mathrm{sn}^2\dfrac{n-1}{n}L}{\mathrm{snc}^2v}\right),\\[2ex] \dfrac{\mathrm{Gl}(nu)}{\sqrt{k'}}=\left(\dfrac{\mathrm{Gl}\,v}{\sqrt{\lambda'}}\right)^n\left(1-k^2\mathrm{sn}^2\dfrac{2L}{n}\mathrm{snc}^2v\right)\left(1-k^2\mathrm{sn}^2\dfrac{4L}{n}\mathrm{snc}^2v\right)\ldots\left(1-k^2\mathrm{sn}^2\dfrac{n-1}{n}L.\mathrm{snc}^2v\right).\end{cases}$$

Es ist $K'=\mu'.L'$ und $K=\dfrac{\mu'}{n}.L$, also $KK'=\dfrac{\mu'^2}{n}.LL'$, und da $(nu)^2=\mu'^2.v^2$ ist, so ist

$$\frac{(nu)^2}{KK'}=\frac{nv^2}{LL}.$$

Da nun $\mathrm{Hl}(nu)=e^{-\frac{\pi(nu)^2}{4KK'}}.\mathfrak{Bl}'(nu)$ und $\mathrm{Hl}\,v=e^{-\frac{\pi v^2}{4LL'}}.\mathfrak{Bl}'(v)$ ist, so findet man

$$\frac{\mathrm{Hl}(nu)}{(\mathrm{Hl}(v))^n}=\frac{\mathfrak{Bl}'(nu)}{(\mathfrak{Bl}'v)^n},\text{ und ebenso }\frac{\mathrm{Al}(nu)}{(\mathrm{Al}\,v)^n}=\frac{\mathfrak{Al}'(nu)}{(\mathfrak{Al}'v)^n},\quad\frac{\mathrm{Bl}(nu)}{(\mathrm{Bl}\,v)^n}=\frac{\mathfrak{Hl}'(nu)}{(\mathfrak{Hl}'v)^n}$$

$$\text{und}\quad\frac{\mathrm{Gl}(nu)}{(\mathrm{Gl}\,v)^n}=\frac{\mathfrak{Gl}'(nu)}{(\mathfrak{Gl}'v)^n}.$$

Demnach darf man in den Formeln (7.) statt $\mathrm{Hl}(nu)$, $\mathrm{Al}(nu)$, $\mathrm{Bl}(nu)$ und $\mathrm{Gl}(nu)$ der Reihe nach setzen $\mathfrak{Bl}'(nu)$, $\mathfrak{Al}'(nu)$, $\mathfrak{Hl}'(nu)$ und $\mathfrak{Gl}'(nu)$, wenn man gleichzeitig statt $\mathrm{Hl}\,v$, $\mathrm{Al}\,v$, $\mathrm{Bl}\,v$ und $\mathrm{Gl}\,v$ der Reihe nach $\mathfrak{Bl}'v$, $\mathfrak{Al}'v$, $\mathfrak{Hl}'v$ und $\mathfrak{Gl}'v$ setzt.

Zusatz. Nach §. 297. können nun auch die so eben entwickelten Formeln ihrer Zahl nach verdoppelt werden. Die Formeln (11. §. 300.) verwandeln sich in

$$\frac{\mathrm{Hl}\,u}{\sqrt{k'}}=\left(\frac{\mathrm{Hl}\,\frac{u}{\mu}}{\sqrt{\lambda'}}\right)^n.\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2\frac{u}{\mu}}{\mathrm{sn}^2\frac{iK'}{\mu}}\right)\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2\frac{u}{\mu}}{\mathrm{sn}^2\frac{3iK'}{\mu}}\right)\ldots\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2\frac{u}{\mu}}{\mathrm{sn}^2\frac{(n-2)iK'}{\mu}}\right)\ (\text{mod. }\lambda),$$

$$\frac{\mathrm{Al}\,u}{\sqrt{k'}}=\left(\frac{\mathrm{Al}\,\frac{u}{\mu}}{\sqrt{\lambda'}}\right)^n.\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2\frac{2iK'}{\mu}}{\mathrm{sn}^2\frac{u}{\mu}}\right)\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2\frac{4iK'}{\mu}}{\mathrm{sn}^2\frac{u}{\mu}}\right)\ldots\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2\frac{(n-1)iK'}{\mu}}{\mathrm{sn}^2\frac{u}{\mu}}\right)\ (\text{mod. }\lambda),$$

$$\frac{\mathrm{Gl}\,u}{\sqrt{k'}} = \left(\frac{\mathrm{Gl}\,\frac{u}{\mu}}{\sqrt{\lambda'}}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{\mathrm{snc}^2\frac{u}{\mu}}{\mathrm{sn}^2\frac{iK'}{\mu}}\right)\left(1 - \frac{\mathrm{snc}^2\frac{u}{\mu}}{\mathrm{sn}^2\frac{3iK'}{\mu}}\right)\cdots\left(1 - \frac{\mathrm{snc}^2\frac{u}{\mu}}{\mathrm{sn}^2\frac{(n-2)iK'}{\mu}}\right) \ (\mathrm{mod.}\ \lambda),$$

$$\frac{\mathrm{Bl}\,u}{\sqrt{k'}} = \left(\frac{\mathrm{Bl}\,\frac{u}{\mu}}{\sqrt{\lambda'}}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{\mathrm{sn}^2\frac{2iK'}{\mu}}{\mathrm{snc}^2\frac{u}{\mu}}\right)\left(1 - \frac{\mathrm{sn}^2\frac{4iK'}{\mu}}{\mathrm{snc}^2\frac{u}{\mu}}\right)\cdots\left(1 - \frac{\mathrm{sn}^2\frac{(n-1)iK'}{\mu}}{\mathrm{snc}^2\frac{u}{\mu}}\right) \ (\mathrm{mod.}\ \lambda).$$

Auch in diesen Formeln wollen wir n unendlich nehmen, wodurch bekanntlich der Modul $\lambda = 0$ wird.

Es ist $\log \frac{\mathrm{Hl}\left(\frac{u}{\mu}\right)}{\sqrt{\lambda'}} = \mathrm{lm}\left(\frac{u}{\mu}\right) - \frac{F}{L} \cdot \frac{\left(\frac{u}{\mu}\right)^2}{2}$. Wird nun der Modul $\lambda = 0$, also $\frac{1}{\mu} = \eta$ gesetzt, so wird $\mathrm{lm}\left(\frac{u}{\mu}\right) = \frac{(\eta u)^2}{2}$; ferner wird $F = L = \frac{1}{2}\pi$ und $\left(\frac{u}{\mu}\right)^2 = (\eta u)^2$, also wird $\log\left(\frac{\mathrm{Hl}\,\frac{u}{\mu}}{\sqrt{\lambda'}}\right) = 0$ und also $\frac{\mathrm{Hl}\,\frac{u}{\mu}}{\sqrt{\lambda'}} = 1$. Hiernach verwandelt sich die erste der vorstehenden vier Formeln in

$$1. \quad \mathrm{Hl}\,u = \sqrt{k'} \cdot \left(1 + \frac{\sin^2 \eta u}{\mathfrak{Sin}^2 \eta K'}\right)\left(1 + \frac{\sin^2 \eta u}{\mathfrak{Sin}^2 3\eta K'}\right)\left(1 + \frac{\sin^2 \eta u}{\mathfrak{Sin}^2 5\eta K'}\right)\left(1 + \frac{\sin^2 \eta u}{\mathfrak{Sin}^2 7\eta K'}\right)\cdots$$

Da nun aber $\mathrm{Al}\,u = \sqrt{k} \cdot \mathrm{sn}\,u \cdot \mathrm{Hl}\,u$, $\mathrm{Bl}\,u = \sqrt{\frac{k}{k'}}\,\mathrm{cn}\,u \cdot \mathrm{Hl}\,u$ und $\mathrm{Gl}\,u = \frac{\mathrm{dn}\,u \cdot \mathrm{Hl}\,u}{\sqrt{k'}}$ ist, so erhalten wir, wenn die in §. 297. für $\mathrm{sn}\,u$, $\mathrm{cn}\,u$ und $\mathrm{dn}\,u$ gefundenen Producte substituirt werden, die Formeln

$$2. \quad \mathrm{Al}\,u = \frac{\sqrt{(kk')}}{\eta} \sin \eta u \left(1 + \frac{\sin^2 \eta u}{\mathfrak{Sin}^2 2\eta K'}\right)\left(1 + \frac{\sin^2 \eta u}{\mathfrak{Sin}^2 4\eta K'}\right)\left(1 + \frac{\sin^2 \eta u}{\mathfrak{Sin}^2 6\eta K'}\right)\cdots$$

$$3. \quad \mathrm{Bl}\,u = \sqrt{k} \cdot \cos \eta u \cdot \left(1 - \frac{\sin^2 \eta u}{\mathfrak{Cos}^2 2\eta K'}\right)\left(1 - \frac{\sin^2 \eta u}{\mathfrak{Cos}^2 4\eta K'}\right)\left(1 - \frac{\sin^2 \eta u}{\mathfrak{Cos}^2 6\eta K'}\right)\cdots$$

$$4. \quad \mathrm{Gl}\,u = \left(1 - \frac{\sin^2 \eta u}{\mathfrak{Cos}^2 \eta K'}\right)\left(1 - \frac{\sin^2 \eta u}{\mathfrak{Cos}^2 3\eta K'}\right)\left(1 - \frac{\sin^2 \eta u}{\mathfrak{Cos}^2 5\eta K'}\right)\left(1 - \frac{\sin^2 \eta u}{\mathfrak{Cos}^2 7\eta K'}\right)\cdots,$$

welche mit den im §. 186. gefundenen übereinstimmen.

§. 302.

Umformung der Modular-Integrale der zweiten Art durch Substitutionen $n$ten Grades, wenn n eine ungerade ganze Zahl ist.

Wählen wir aufser den durch die Gleichung $v = \mu . u$ mit einander verbundenen Argumenten u und v noch die Argumente u' und v' so, dafs auch $v' = \mu . u'$ ist, so ist ebensowohl

$$v + v' = \mu(u' + u), \quad \text{als} \quad v - v' = \mu(u - u'),$$

mithin dürfen wir in den sich auf die früheren Umformungen beziehenden Gleichungen durchweg $u \pm u'$ statt u setzen, wenn gleichzeitig $v \pm v'$ statt v gesetzt wird.

Hiernach erhalten wir aus der Gleichung (2. §. 300.) sofort

$$(\alpha.) \quad \log \sqrt{\frac{\mathrm{Hl}(v+v')}{\mathrm{Hl}(v-v')}} = S\left\{\log \sqrt{\frac{\mathrm{Hl}\left(u+u'+\frac{2\alpha i K'}{n}\right)}{\mathrm{Hl}\left(u-u'+\frac{2\alpha i K'}{n}\right)}}\right\},$$

wenn in dem Summen-Ausdruck auf der rechten Seite α die Werthe 0, ± 1, ± 2, ± 3, ... $\pm \frac{1}{2}(n-1)$ erhält.

Da aber $\partial v' = \mu . \partial u'$, also $\frac{v}{\partial v'} = \frac{u}{\partial u'} = \frac{u}{\partial\left(u'+\frac{2\alpha i K'}{n}\right)}$ ist, so ist auch

$$\frac{\partial \log \mathrm{Hl}\, v'}{\partial v'} . v = S\left\{\frac{\partial \log \mathrm{Hl}\left(u'+\frac{2\alpha i K'}{n}\right)}{\partial\left(u'+\frac{2\alpha i K'}{n}\right)} . u\right\}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhalten wir zusammen durch Subtraction:

$$\frac{\partial \log \mathrm{Hl}\, v'}{\partial v'} . v - \log \sqrt{\frac{\mathrm{Hl}(v+v')}{\mathrm{Hl}(v-v')}}$$

$$= S\left\{\frac{\partial \log \mathrm{Hl}\left(u'+\frac{2\alpha i K'}{n}\right)}{\partial\left(u'+\frac{2\alpha i K'}{n}\right)} . u - \log \sqrt{\frac{\mathrm{Hl}\left(u+u'+\frac{2\alpha i K'}{n}\right)}{\mathrm{Hl}\left(u-u'+\frac{2\alpha i K'}{n}\right)}}\right.$$

oder auch

$$\mathrm{H}(v').v - \log \sqrt{\frac{\mathrm{Hl}(v+v')}{\mathrm{Hl}(v-v')}} = S\left\{\mathrm{H}\left(u'+\frac{2\alpha i K'}{n}\right).u - \log \sqrt{\frac{\mathrm{Hl}\left(u+u'+\frac{2\alpha i K'}{n}\right)}{\mathrm{Hl}\left(u-u'-\frac{2\alpha i K'}{n}\right)}}\right\}.$$

Nach Formel (1. §. 202.) kann aber diese Gleichung einfacher also dargestellt werden:

$$1. \quad \mathfrak{S}(v, v') = S\left\{\mathfrak{S}\left(u, u'+\frac{2\alpha i K'}{n}\right)\right\}.$$

Differentiirt man die Formeln (5. und 4. §. 300.) logarithmisch, nachdem zuvor v' statt v und u' statt u gesetzt worden ist, und multiplicirt die neue Gleichung mit $\frac{v}{\mu} = u$, so erhält man

$$G(v').v = S\left\{G\left(u'+\frac{2\alpha i K'}{n}\right).u\right\}, \quad B(v').v = S\left\{B\left(u'+\frac{2\alpha i K'}{n}\right).u\right\}.$$

Werden diese Gleichungen mit (α.) verbunden, so erhält man, den For-

meln (2. und 3. §. 202.) gemäſs,

$$2.\quad \mathfrak{C}(v,v') = S\left\{\mathfrak{C}\left(u, u' + \frac{2\alpha i K'}{n}\right)\right\},$$

$$3.\quad \mathfrak{D}(v,v') = S\left\{\mathfrak{D}\left(u, u' + \frac{2\alpha i K'}{n}\right)\right\}.$$

Setzt man hierin noch $u'i$ statt u' und $v'i$ statt v', so verwandeln sich die drei vorigen Gleichungen in

$$4.\quad \begin{cases} S(v,v') = S\left\{S\left(u, u' + \frac{2\alpha K'}{n}\right)\right\}, \\ C(v,v') = S\left\{C\left(u, u' + \frac{2\alpha K'}{n}\right)\right\}, \\ D(v,v') = S\left\{D\left(u, u' + \frac{2\alpha K'}{n}\right)\right\}, \end{cases}$$

und die Gleichungen $v = \mu . u$ und $v' = \mu . u'$ gelten auch nun wieder. Ohne das Summations-Zeichen sind diese Gleichungen

$$\begin{aligned} S(v,v') = S(u,u) &+ S\left(u,u'+\frac{2K'}{n}\right) + S\left(u,u'+\frac{4K'}{n}\right) \ldots + S\left(u,u'+\frac{n-1}{n}K'\right) \\ &+ S\left(u,u'-\frac{2K'}{n}\right) + S\left(u,u'-\frac{4K'}{n}\right) \ldots + S\left(u,u'-\frac{n-1}{n}K'\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(v,v') = C(u,u') &+ C\left(u,u'+\frac{2K'}{n}\right) + C\left(u,u'+\frac{4K'}{n}\right) \ldots + C\left(u,u'+\frac{n-1}{n}K'\right) \\ &+ C\left(u,u'-\frac{2K'}{n}\right) + C\left(u,u'-\frac{4K'}{n}\right) \ldots + C\left(u,u'-\frac{n-1}{n}K'\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(v,v') = D(u,u') &+ D\left(u,u'+\frac{2K'}{n}\right) + D\left(u,u'+\frac{4K'}{n}\right) \ldots + D\left(u,u'+\frac{n-1}{n}K'\right) \\ &+ D\left(u,u'-\frac{2K'}{n}\right) + D\left(u,u'-\frac{4K'}{n}\right) \ldots + D\left(u,u'-\frac{n-1}{n}K'\right). \end{aligned}$$

Aus Formel (4. §. 300.) folgt

$$\log \sqrt{\frac{\mathrm{Bl}(v-v')}{\mathrm{Bl}(v+v')}} = S\left\{\log \sqrt{\frac{\mathrm{Bl}\left(v-v'-\frac{2\alpha i K'}{n}\right)}{\mathrm{Bl}\left(v+v'+\frac{2\alpha i K'}{n}\right)}}\right\}.$$

Auſserdem erhält man die Gleichungen

$$B(v').v = S\left\{B\left(u'+\frac{2\alpha i K'}{n}\right).u\right\},$$

$$G(v').v = S\left\{G\left(u'+\frac{2\alpha i K'}{n}\right).u\right\},$$

$$H(v').v = S\left\{H\left(u'+\frac{2\alpha i K'}{n}\right).u\right\},$$

und daraus, den Formeln (1. §. 203.) gemäſs,

$$5.\left\{\begin{aligned}&\mathfrak{S}'(v,v') = \\ &'\mathfrak{S}(u,u') + '\mathfrak{S}\left(u,u'+\frac{2iK'}{n}\right) + '\mathfrak{S}\left(u,u'+\frac{4iK'}{n}\right)\ldots + '\mathfrak{S}\left(u,u'+\frac{n-1}{n}iK'\right) \\ &\quad + '\mathfrak{S}\left(u,u'-\frac{2iK'}{n}\right) + '\mathfrak{S}\left(u,u'-\frac{4iK'}{n}\right)\ldots + '\mathfrak{S}\left(u,u'-\frac{n-1}{n}iK'\right), \\ &'\mathfrak{C}(v,v) = \\ &'\mathfrak{C}(u,u') + '\mathfrak{C}\left(u,u'+\frac{2iK'}{n}\right) + '\mathfrak{C}\left(u,u'+\frac{4iK'}{n}\right)\ldots + '\mathfrak{C}\left(u,u'+\frac{n-1}{n}iK'\right) \\ &\quad + '\mathfrak{C}\left(u,u'-\frac{2iK'}{n}\right) + '\mathfrak{C}\left(u,u'-\frac{4iK'}{n}\right)\ldots + '\mathfrak{C}\left(u,u'-\frac{n-1}{n}iK'\right), \\ &'\mathfrak{D}(v,v(= \\ &'\mathfrak{D}(u,u') + '\mathfrak{D}\left(u,u'+\frac{2iK'}{n}\right) + '\mathfrak{D}\left(u,u'+\frac{4iK'}{n}\right)\ldots + '\mathfrak{D}\left(u,u'+\frac{n-1}{n}iK'\right) \\ &\quad + '\mathfrak{D}\left(u,u'-\frac{2iK'}{n}\right) + '\mathfrak{D}\left(u,u'-\frac{4iK'}{n}\right)\ldots + '\mathfrak{D}\left(u,u'-\frac{n-1}{n}iK'\right).\end{aligned}\right.$$

Setzt man auch in diesen Formeln $u'i$ statt u' und $v'i$ statt v', so erhält man

$$6.\left\{\begin{aligned}&'S(v,v') = \\ &'S(u,u') + 'S\left(u,u'+\frac{2K'}{n}\right) + 'S\left(u,u'+\frac{4K'}{n}\right)\ldots + 'S\left(u,u'+\frac{n-1}{n}K'\right), \\ &\quad + 'S\left(u,u'-\frac{2K'}{n}\right) + 'S\left(u,u'-\frac{4K'}{n}\right)\ldots + 'S\left(u,u'-\frac{n-1}{n}K'\right), \\ &'C(v,v') = \\ &'C(u,u') + 'C\left(u,u'+\frac{2K'}{n}\right) + 'C\left(u,u'+\frac{4K'}{n}\right)\ldots + 'C\left(u,u'+\frac{n-1}{n}K'\right) \\ &\quad + 'C\left(u,u'-\frac{2K'}{n}\right) + 'C\left(u,u'-\frac{4K'}{n}\right)\ldots + 'C\left(u,u'-\frac{n-1}{n}K'\right), \\ &'D(v,v) = \\ &'D(u,u') + 'D\left(u,u'+\frac{2K'}{n}\right) + 'D\left(u,u'+\frac{4K'}{n}\right)\ldots + 'D\left(u,u'+\frac{n-1}{n}K'\right) \\ &\quad + 'D\left(u,u'-\frac{2K'}{n}\right) + 'D\left(u,u'-\frac{4K'}{n}\right)\ldots + 'D\left(u,u'-\frac{n-1}{n}K'\right).\end{aligned}\right.$$

Durch die vorstehenden Formeln sind die Modular-Integrale mit dem Modul λ zurückgeführt auf ähnliche Integrale mit dem Modul k, welcher kleiner als λ ist. Die umgekehrten Formeln haben dieselbe Form. Man hat in den vorstehenden Formeln nur v statt u, v' statt u', nu statt v, nu' statt v', λ statt k, k statt λ, $\frac{L}{n}$ statt $\frac{iK'}{n}$ oder $\frac{iL}{n}$ statt $\frac{K'}{n}$ zu setzen.

§. 303.

Differenzial-Gleichungen für den Zähler und Nenner der Substitution $n$ten Grades, wenn n eine ungerade ganze Zahl ist.

Setzen wir $x = \sqrt{k}.\operatorname{sn} u$ und $X = \sqrt{\lambda}.\operatorname{sn} v$ für $v = \mu . u$, so verwandelt sich, wie oben gezeigt worden ist, $\operatorname{sn} v$ in $\frac{1}{\lambda \operatorname{sn} v}$ oder X in $\frac{1}{X}$, wenn sich $\operatorname{sn} u$ in $\frac{1}{k \operatorname{sn} u}$ oder x in $\frac{1}{x}$ verwandelt.

Auf ähnliche Art wie in §. 164. findet sich, dafs man setzen könne:

$$X = \frac{\overset{m}{a} x + \overset{m-1}{a} . x^3 + \overset{m-2}{a} . x^5 \ldots . \overset{1}{a} . x^{2m-1} + x^{2m+1}}{1 + \overset{1}{a} . x^2 + \overset{2}{a} . x^4 \ldots . + \overset{m}{a} . x^{2m}} \text{ für } m = \tfrac{1}{2}(n-1)$$

oder $2m+1 = n$, oder auch $X = \frac{U}{V}$, wenn man setzt:

$$U = \overset{m}{a} . x + \overset{m-1}{a} . x^3 + \overset{m-2}{a} . x^5 \ldots . + \overset{1}{a} x^{2m-1} + x^{2m+1},$$

$$V = 1 + \overset{1}{a} x^2 + \overset{2}{a} x^4 + \ldots . + \overset{m}{a} . x^{2m}.$$

Auch findet man leicht den Coëfficienten $\overset{m}{a}$. Es ist nämlich $\frac{\overset{m}{a} . \sqrt{k}}{\sqrt{\lambda}} = \mu$, und also rückwärts

$$1. \quad \overset{m}{a} = \mu \sqrt{\frac{\lambda}{k}}.$$

Setzt man wirklich $\frac{1}{x}$ statt x, so verwandelt sich

$$U \text{ in } \frac{V}{x^n} \text{ und } V \text{ in } \frac{U}{x^n}.$$

Aus der Gleichung $x = \sqrt{k}.\operatorname{sn} u$ folgt

$$\partial u = \frac{\partial x}{\sqrt{k} . \sqrt{(1 - 2\alpha x^2 + x^4)}} \text{ für } \alpha = \tfrac{1}{2}\left(k + \frac{1}{k}\right),$$

und aus der Gleichung $X = \sqrt{\lambda}.\operatorname{sn} v$ folgt ebenso

$$\mu . \partial u = \frac{\partial X}{\sqrt{\lambda} \sqrt{(1 - 2\beta X^2 + X^4)}} \text{ für } \beta = \tfrac{1}{2}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right):$$

daher ist $\mu \sqrt{\frac{\lambda}{k}} . \frac{\partial x}{\sqrt{(1 - 2\alpha x^2 + x^4)}} = \frac{\partial X}{\sqrt{(1 - 2\beta X^2 + X^4)}}$, oder auch

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \mu \sqrt{\frac{\lambda}{k}} . \sqrt{\frac{1 - 2\beta X^2 + X^4}{1 - 2\alpha x^2 + x^4}}.$$

Der ersten von den Formeln (12. §. 295.) gemäfs ist

$$X = \frac{\sqrt{k^n}\,\mathrm{sn}\,u\left(\mathrm{sn}^2 u - \mathrm{sn}^2\frac{2iK'}{n}\right)\left(\mathrm{sn}^2 u - \mathrm{sn}^2\frac{4iK'}{n}\right)\ldots\left(\mathrm{sn}^2 u - \mathrm{sn}^2\frac{n-1}{n}iK'\right)}{\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2\frac{iK'}{n}}\right)\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2\frac{3iK'}{n}}\right)\ldots\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2\frac{n-2}{n}iK'}\right)},$$

und wird dieser Ausdruck mit den vorigen verglichen, so hat man

$$U = \sqrt{k^n}.\,\mathrm{sn}\,u\left(\mathrm{sn}^2 u - \mathrm{sn}^2\frac{2iK'}{n}\right)\left(\mathrm{sn}^2 u - \mathrm{sn}^2\frac{4iK'}{n}\right)\ldots\left(\mathrm{sn}^2 u - \mathrm{sn}^2\frac{n-1}{n}iK'\right),$$

$$V = \left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2\frac{iK'}{n}}\right)\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2\frac{3iK'}{n}}\right)\ldots\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}^2\frac{n-2}{n}iK'}\right).$$

Der Ausdruck V kommt auch in der ersten der Formeln (11. §. 300.) vor; daher haben wir einfacher:

$$2.\qquad V = \left(\frac{\mathrm{Hl}\,v}{\sqrt{\lambda'}}\right) : \left(\frac{\mathrm{Hl}\,u}{\sqrt{k'}}\right)^n \quad \text{oder}$$

$$\log V = \log\left(\frac{\mathrm{Hl}\,v}{\sqrt{\lambda'}}\right) - n\log\left(\frac{\mathrm{Hl}\,u}{\sqrt{k'}}\right).$$

Da ferner nach §. 171. $X = \sqrt{\lambda}.\,\mathrm{sn}\,v = \frac{\mathrm{Al}\,v}{\mathrm{Hl}\,v} = \frac{U}{V}$ ist, so haben wir

$$3.\qquad U = \left(\frac{\mathrm{Al}\,v}{\sqrt{\lambda'}}\right) : \left(\frac{\mathrm{Hl}\,u}{\sqrt{k'}}\right)^n \text{ oder auch } \log U = \log\left(\frac{\mathrm{Al}\,v}{\sqrt{\lambda'}}\right) - n.\log\left(\frac{\mathrm{Hl}\,u}{\sqrt{k'}}\right).$$

Nach §. 183. ist $\mathrm{lm}\,v - \frac{F}{L}.\tfrac{1}{2}v^2 = \log\left(\frac{\mathrm{Hl}\,v}{\sqrt{\lambda'}}\right)$ und $\mathrm{lm}\,u - \frac{E}{K}.\tfrac{1}{2}u^2 = \log\left(\frac{\mathrm{Hl}\,u}{\sqrt{k'}}\right)$; daher haben wir

$$\log V = \mathrm{lm}\,v - \frac{F}{L}.\tfrac{1}{2}v^2 - n\left(\mathrm{lm}\,u - \frac{E}{K}.\tfrac{1}{2}u^2\right).$$

In §. 298. wurde $\mu.\frac{F}{L}.v = -2k'^2.s'.u + n.\frac{E}{K}.u$ gefunden; wird diese Gleichung noch mit $\frac{v}{2\mu} = \tfrac{1}{2}u$ multiplicirt, so erhält man $\frac{F}{L}.\tfrac{1}{2}v^2 = -k'^2 s'.\tfrac{1}{2}u^2 + n.\frac{E}{K}.\tfrac{1}{2}u^2$, und es reducirt sich also die vorige Gleichung auf

$$\log V = \mathrm{lm}\,v - n\,\mathrm{lm}\,u + k'^2 s'.u^2.$$

Differenziirt man diese Gleichung zweimal nach einander nach u, so erhält man

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial \log V}{\partial u}\right)}{\partial u} = \mu^2\mathrm{dn}^2 v - n\,\mathrm{dn}^2 u + 2k'^2 s' = \mu^2 - n + 2k'^2 s' - \mu^2\lambda.X^2 + nkx^2,$$

und da nach §. 298. $\mu^2 - n + 2k'^2 s' = 2k^2 t'$ ist, so reducirt sich die vorige Gleichung noch auf

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial \log V}{\partial u}\right)}{\partial u} = 2k^2 t' - \mu^2\lambda . X^2 + nk . x^2,$$

worin $t' = \mathrm{tn}'^2 \frac{2K'}{n} + \mathrm{tn}'^2 \frac{4K'}{n} + \mathrm{tn}'^2 \frac{6K'}{n} \ldots + \mathrm{tn}'^2 \frac{n-1}{n} K'$. Setzen wir

$$\tau = \frac{1}{\mathrm{tn}'^2 \frac{K'}{n}} + \frac{1}{\mathrm{tn}'^2 \frac{3K'}{n}} + \frac{1}{\mathrm{tn}'^2 \frac{5K'}{n}} + \ldots + \frac{1}{\mathrm{tn}'^2 \frac{n-2}{n} K'},$$

so haben wir auch

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial \log V}{\partial u}\right)}{\partial u} = 2\tau - \mu^2\lambda . X^2 + nkx^2.$$

Wie in §. 164. findet man aber

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial \log V}{\partial u}\right)}{\partial u} = \frac{k(1-2\alpha x^2+x^4)}{V} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

$$+ \frac{k(2x^3-2\alpha x)}{V} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{k(1-2\alpha x^2+x^4)}{V^2} \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2.$$

Wird dieser Werth mit V^2 multiplicirt und beachtet, dafs $V^2 . X^2 = U^2$ ist, so erhält man

$$k(1-2\alpha x^2+x^4) \cdot \frac{V\partial^2 V}{\partial x^2} - k(1-2\alpha x^2+x^4) . \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + k(2x^3-2\alpha x) . \frac{V\partial V}{\partial x}$$

$$= 2\tau . V^2 - \mu^2\lambda U^2 + nkx^2 V^2$$

oder auch

$$4. \quad (1-2\alpha x^2+x^4)\left(V . \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\partial V}{\partial x}\right) - (\alpha x - x^2) . \frac{\partial (V^2)}{\partial x}$$

$$= (2kt' + nx^2) V^2 - \frac{\mu^2\lambda}{k} . U^2.$$

Setzt man in der obigen Gleichung $u + iK'$ statt u, also $\frac{1}{x}$ statt x und $\frac{1}{X}$ statt X, so bleibt ∂u ungeändert, aber V verwandelt sich in $\frac{U}{X^n}$, also $\log V$ in $\log U - n \log x$, daher erhalten wir

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial \log U}{\partial u}\right)}{\partial u} - n . \frac{\partial\left(\frac{\partial \log x}{\partial u}\right)}{\partial u} = 2\tau - \mu^2\lambda . \frac{V^2}{U^2} + \frac{nk}{x^2}.$$

Da aber $\frac{\partial\left(\frac{\partial \log x}{\partial u}\right)}{\partial} = kx^2 - \frac{k}{x^2}$ ist, so erhält man

$$5. \quad (1-2\alpha x^2+x^4)\left(U \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial U}{\partial x}\right) - (\alpha x - x^2) . \frac{\partial (U^2)}{\partial x}$$

$$= (2kt' + nx^2) U^2 - \frac{\mu^2\lambda}{k} V^2.$$

Wird diese Gleichung mit der vorigen verglichen, so zeigt sich, dafs sich die eine Gleichung in die andere verwandelt, wenn man U mit V vertauscht.

Substituirt man in einer von diesen Gleichungen die Polynome

$$U = \overset{m}{a}x + \overset{m-1}{a}.x^3 + \overset{m-2}{a}.x^5 \dots + \overset{1}{a}x^{2m-1} + x^{2m+1} \text{ und}$$

$$V = 1 + \overset{1}{a}x^2 + \overset{2}{a}x^4 + \dots + \overset{m}{a}.x^{2m},$$

so kann man dadurch eine Recursionsformel herleiten, welcher gemäfs man dann die Coëfficienten $\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a} \dots \overset{m}{a}$ recurrirend berechnen kann. Die Ausdrücke dieser Coëfficienten werden aber ziemlich zusammengesetzt, und da ihre Anwendung überflüssig ist, so übergehen wir die Angabe der Ausdrücke der ersten von ihnen.

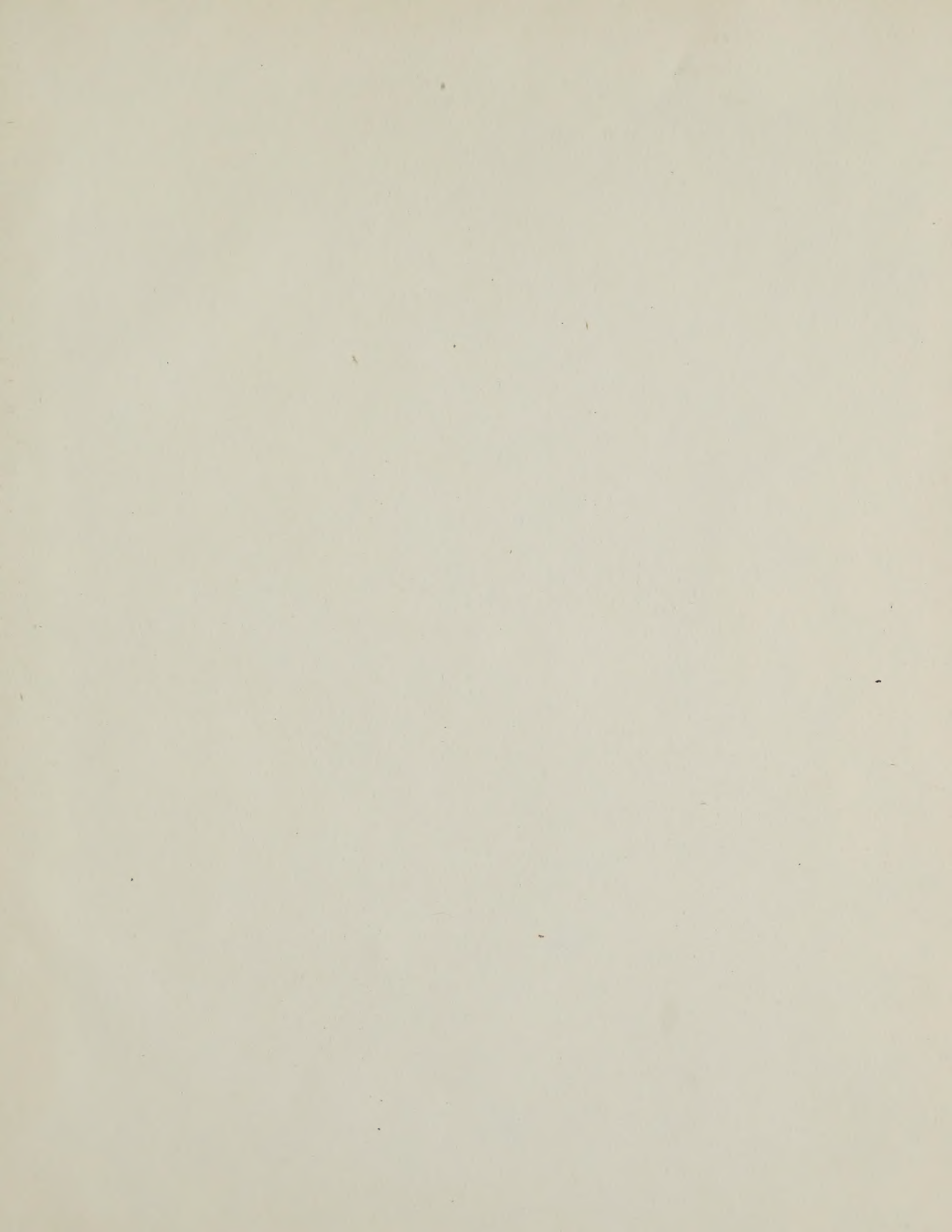
Schlufsbemerkung. Die Gleichung $x = \mathrm{sn}\, u$ läfst sich auch durch eine Substitution $n$ten Grades unter der Voraussetzung, dafs n eine gerade Zahl ist, in eine ähnliche Gleichung mit einem andern Modul umformen, wobei das Argument u wieder mit einem constanten Factor μ multiplicirt wird. Es bietet diese Umformung wenige Schwierigkeiten dar; sie scheint aber wenig interessant, und daher übergehen wir die Ausführung derselben, zumal da der in Ansehung seiner Anwendungen allein wichtige besondere Fall für $n = 2$ schon in §. 51. bis §. 54., ferner in §. 82. und 83. und in §. 251. bis §. 253. umständlich behandelt worden ist.

Verbindet man die Formeln für ein ungerades n mit den so eben genannten für $n = 2$, so übersieht man sogleich, welche Formen die zu substituirenden Ausdrücke haben werden, wenn der Grad der Substitution durch eine beliebige andere gerade Zahl ausgedrückt wird.

Der folgende zweite Theil wird die Behandlung der ebenen und sphärischen Modularcurven, der Rectification und Quadratur der sphärischen Kegelschnitte und hauptsächlich eine Theorie der sphärischen Kettenlinien enthalten. Die Untersuchung dieser statischen Curven, in ihren verschiedenen Formen, erfordert die ausgedehntesten Anwendungen der Theorie der Modularfunctionen und der Modular-Integrale, wodurch allein die merkwürdigen Gesetze dieser und auch der reciproken Curven ermittelt werden konnten.










UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
515.9G93T C001
THEORIE DER MODULAR-FUNCTIONEN UND DER M
3 0112 017212835